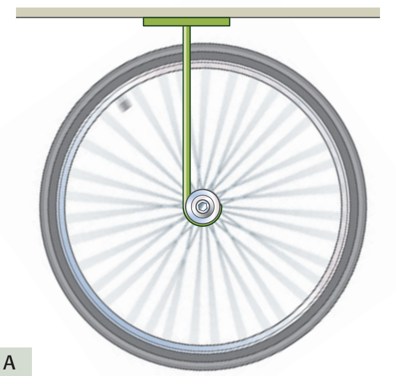
Il momento angolare e il momento d'inerzia

Il momento angolare

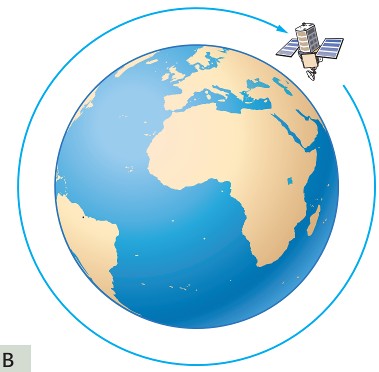
Analizziamo alcuni moti di rotazione.

► Se gli attriti sono trascurabili, una ruota di bicicletta messa in rotazione può continuare a girare a lungo attorno al proprio asse.



A

► Anche un satellite, in orbita circolare attorno a un pianeta, continua a muoversi per molti anni senza rallentare.

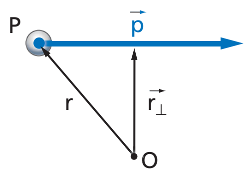


B

Il punto *O*
Come succede per il momento di una forza, anche il momento angolare dipende dal punto O rispetto al quale lo si calcola.

Per descrivere la rotazione di un punto materiale si introduce una nuova grandezza fisica: il **momento angolare** L calcolato rispetto a un punto fisso O. La conservazione di questa grandezza spiega come mai la ruota di una bicicletta e il satellite tendano a non fermarsi.

Consideriamo una particella di massa m che ha una quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$ e che, a un certo istante, si trova nel punto P; inoltre indichiamo con $\vec{r}$ il vettore che congiunge O con P e con $r_\perp$ il vettore componente di $\vec{r}$ perpendicolare a $\vec{p}$. Per definizione:

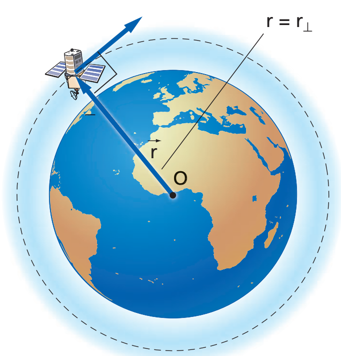


il **momento angolare** di una particella è uguale al prodotto tra la lunghezza di $\vec{r}_\perp$ e il modulo della quantità di moto $\vec{p}$ della particella:

$$L = r_\perp p = r_\perp mv.$$

Negli esempi precedenti della ruota e del satellite è comodo scegliere come punto O, rispetto al quale si calcola il momento angolare, il centro del sistema (cioè, rispettivamente, il mozzo della ruota o il centro della Terra).

In questi casi, come mostra la figura a fianco, il vettore $\vec{r}$ è uno dei raggi della traiettoria del moto; inoltre si ha $r_\perp = r$ e la formula precedente si semplifica:



momento angolare (kg · m²/s) — raggio del moto (m) — velocità (m/s) — massa (kg)

$$L = rmv$$

Nel Sistema Internazionale il momento angolare si misura in (kg · m^2/s).

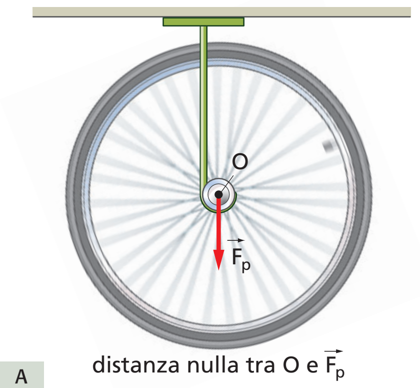
■ La conservazione del momento angolare

Consideriamo un sistema fisico e calcoliamo il suo momento angolare rispetto a un punto O fissato. Si dimostra che

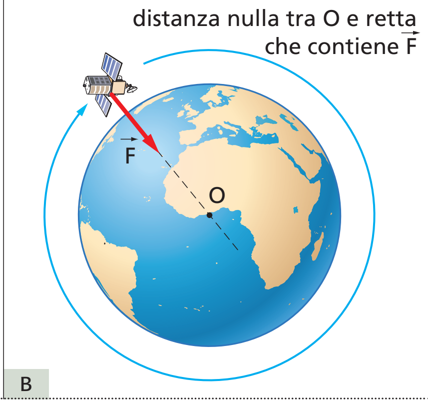
Il momento angolare di un sistema di corpi si conserva nel tempo se è nullo il momento totale delle forze *esterne* che agiscono su di esso.

Nei due esempi considerati prima i momenti delle forze esterne sono nulli e quindi i momenti angolari si conservano.

▶ Sulla ruota agisce la sua forza-peso $\vec{F}_P$, applicata nel suo baricentro, che è nel centro di rotazione. Quindi il braccio del momento della forza-peso è nullo e si ha $M = 0$.

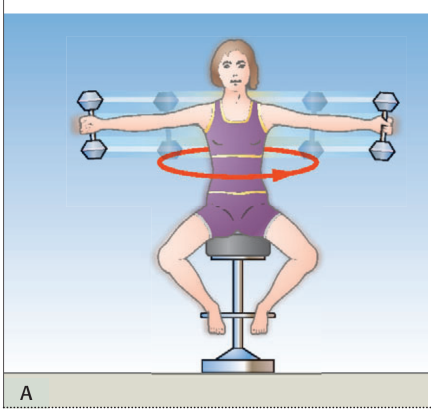


▶ Sul satellite agisce la forza di gravità $\vec{F}$ dovuta al pianeta. Anche il braccio di $\vec{F}$ rispetto al centro di rotazione è uguale a zero e, quindi, il momento della forza è nullo.

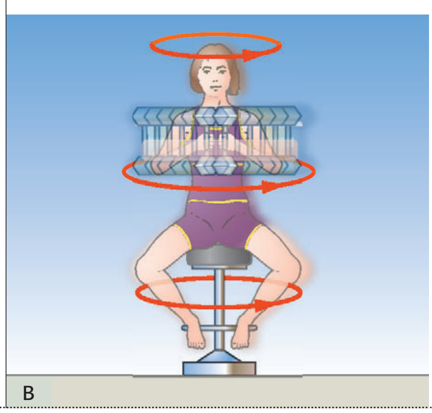


Alcune conseguenze della conservazione del momento angolare si possono osservare facilmente.

▶ Una ragazza che regge due manubri da palestra con le braccia aperte siede su uno sgabello, girevole attorno a un asse, e ruota con una certa velocità angolare.



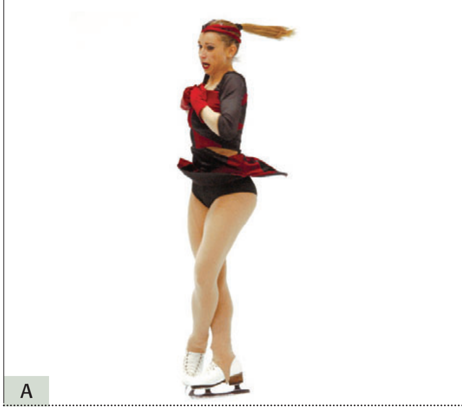
▶ Se stringe le braccia, il suo momento angolare rmv si conserva (se gli attriti sono trascurabili). Visto che r diminuisce, la velocità v delle varie parti aumenta.



In questo esempio, il momento angolare si conserva perché il momento totale delle forze esterne rispetto a qualsiasi punto è nullo. In assenza di attriti, una volta messo in rotazione lo sgabello, le uniche forze esterne che agiscono sulla ragazza sono la sua forza-peso e la reazione vincolare dello sgabello, che si annullano.

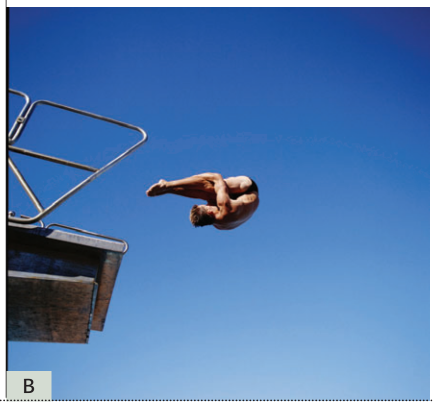
Questo fenomeno è molto sfruttato negli sport:

- i pattinatori aumentano la propria velocità di rotazione attorno a un asse verticale avvicinando le braccia al corpo.



A

- I tuffatori riescono a ruotare velocemente attorno a un asse orizzontale raggruppando il corpo il più possibile.



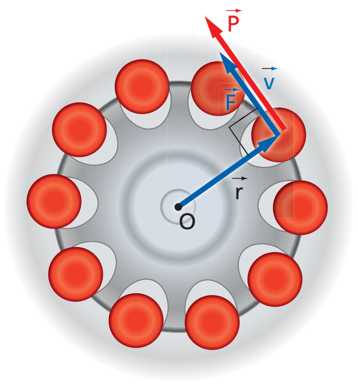
B

La variazione del momento angolare

Se sul sistema agisce un momento della forza M per un intervallo di tempo Δt, si dimostra che la variazione ΔL del suo momento angolare è data dalla formula:

$$\underbrace{\Delta L}_{\text{variazione del momento angolare } (\mathrm{kg \cdot m^2/s})} = \underbrace{M}_{\text{momento della forza } (\mathrm{N \cdot m})} \underbrace{\Delta t}_{\text{intervallo di tempo (s)}}$$

Per esempio, consideriamo una provetta all'interno di una centrifuga da laboratorio: a un certo istante, il suo momento angolare (rispetto al centro di rotazione) vale L. Se il motore della centrifuga si accende per un tempo Δt, sulla provetta agisce una forza (che, come mostra la figura, è perpendicolare al vettore $\vec{r}$) e questa genera un momento della forza M.



Di conseguenza il momento angolare rmv della provetta aumenta della quantità $\Delta L = M\,\Delta t$; visto che le quantità r e m sono fisse, il risultato finale è che il valore v della velocità della provetta aumenta.

Al contrario, sulla pallina da roulette agisce la forza di attrito, che si oppone al suo moto. In questo caso il momento della forza è negativo e, di conseguenza, anche ΔL è negativo: la pallina rallenta fino a fermarsi.

DOMANDA

Una giostrina dei giardinetti sta ruotando e i suoi sedili hanno una certa velocità. Se spingi un sedile con la mano, fai in modo che la giostrina vada più veloce.

▶ Utilizzando i concetti di momento angolare e momento torcente, spiega perché, dopo la spinta, la giostrina ruota più velocemente attorno al suo asse.

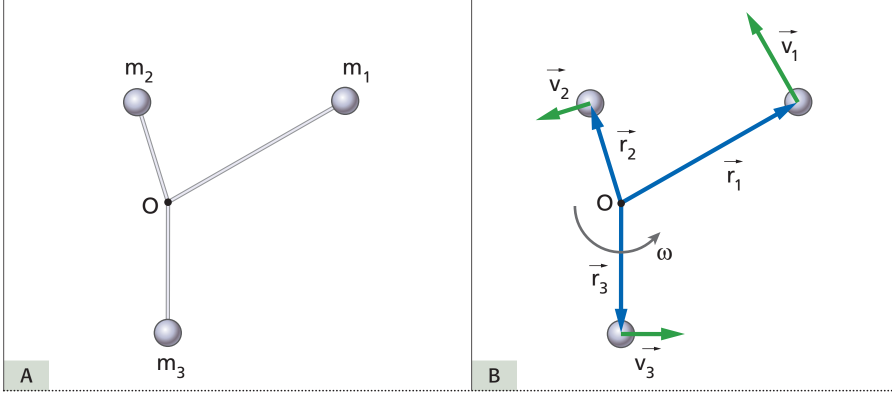
Giochipark Sud 2004

Il momento d'inerzia

Vogliamo ora calcolare il momento angolare di un corpo rigido. Iniziamo a studiare un caso particolare, cioè:

▶ un corpo rigido molto semplice, composto da tre particelle di masse m_1, m_2, e m_3 collegate al centro di rotazione O mediante tre sbarrette di massa trascurabile.

▶ Le lunghezze delle aste sono r_1, r_2, r_3 e indichiamo con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ i vettori velocità delle tre particelle. Il corpo rigido ruota attorno a O con frequenza f.



Il momento angolare totale L del corpo rigido rispetto a O è la somma dei momenti delle tre particelle:

$$L = L_1 + L_2 + L_3.$$

Questi sono tutti dati dalla formula $L = m\,v\,r$:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = m_1v_1r_1 + m_2v_2r_2 + m_3v_3r_3.$$

Utilizzando la formula $v = 2\pi r/T = 2\pi f$ del moto circolare uniforme calcoliamo, per esempio,

$$L_1 = m_1v_1r_1 = m_1(2\pi r_1 f)r_1 = m_1r_1^2(2\pi f).$$

Nei moti circolari la quantità $2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ è detta velocità angolare e si indica con il simbolo greco ω (omega minuscolo); con questa definizione la formula precedente si scrive come

$$L_1 = m_1r_1^2\omega;$$

così il movimento angolare totale L diventa

$$L = m_1r_1^2\omega + m_2r_2^2\omega + m_3r_3^2\omega = (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2)\omega.$$

La quantità che compare tra parentesi nell'ultima espressione viene chiamata **momento d'inerzia** I del corpo rigido. In questo modo il modulo del momento angolare può essere scritto come

$$L = I\omega.$$

Unità di misura
L'unità di misura della velocità angolare ω è radianti/secondo (rad/s). Il radiante (che è un numero puro) è l'unità di misura degli angoli nel Sistema Internazionale; esso è definito in modo tale che l'angolo giro (di solito indicato come 360°) ha un'ampiezza di 2π rad.

Analogia formale
La formula $L = I\,\omega$, valida per la rotazione di un corpo rigido, è analoga alla formula $p = mv$, che riguarda il moto traslatorio di un punto materiale. L'analogia si ottiene scambiando contemporaneamente p con L, m con I e v con ω.

Dalla definizione, l'unità di misura del momento d'inerzia è (kg · m²).

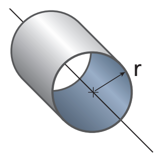
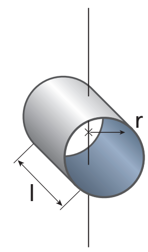
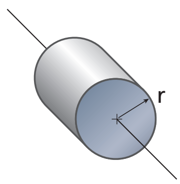
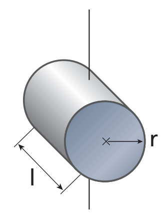
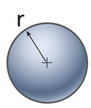
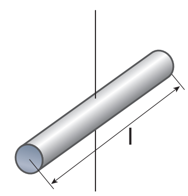
Il momento d'inerzia di un corpo rigido formato da n masse puntiformi è definito come

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2 + \ldots + m_nr_n^2.$$

In generale, per calcolare il momento d'inerzia di un solido è necessario fare crescere n all'infinito; in questo caso le masse m_1, m_2 … diventano infinitamente piccole. Inoltre, quando il corpo rigido è tridimensionale (e non planare come quello formato da tre sole masse) i valori r_1, r_2 … sono le distanze delle singole masse dall'asse di rotazione.

La tabella seguente mostra i valori dei momenti d'inerzia calcolati, sulla base della definizione precedente, per diversi corpi rigidi di forma comune.

MOMENTI DI INERZIA DI ALCUNI CORPI RIGIDI

	Guscio cilindrico, rispetto all'asse $I = mr^2$	Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$	
	Cilindro pieno, rispetto all'asse $I = \frac{1}{2}mr^2$	Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$	
	Sfera piena, rispetto a un diametro $I = \frac{2}{5}mr^2$	Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro $I = \frac{1}{12}ml^2$	

A parità di massa totale il momento d'inerzia aumenta al crescere delle dimensioni del corpo e diminuisce se esso diventa più piccolo.

■ L'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione

L'introduzione del momento d'inerzia permette di esprimere in maniera semplice l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione. Torniamo di nuovo al corpo rigido composto di tre particelle: se esso ruota con velocità angolare ω, la sua energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 = \frac{1}{2}(m_1r_1^2\omega^2 + m_2r_2^2\omega^2 + m_3r_3^2\omega^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2)\omega^2.$$

Nell'ultimo passaggio, la quantità che si trova tra parentesi è il momento d'inerzia del corpo rigido. Il calcolo può essere ripetuto nella stessa maniera qualunque sia il numero di punti che formano il corpo, ottenendo sempre il risultato

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Traslazione e rotazione
La formula a fianco per l'energia cinetica di rotazione ha la stessa forma matematica dell'energia cinetica di traslazione $K = \frac{1}{2}mv^2$ se si scambia, come visto in precedenza, m con I e v con ω.

La dinamica rotazionale di un corpo rigido

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno a un asse con velocità angolare ω e che, quindi, ha un momento angolare $L = I\omega$. Esso viene poi accelerato fino alla velocità angolare ω_1, per cui il suo momento angolare diventa $L_1 = I\omega_1$. La variazione ΔL del momento angolare del corpo vale:

$$\Delta L = L_1 - L = I\omega_1 - I\omega = I(\omega_1 - \omega) = I\Delta\omega.$$

Dalla formula $\Delta L = M\,\Delta t$ possiamo allora scrivere:

$$\Delta L = I\Delta\omega = M\Delta t.$$

Dividendo per Δt gli ultimi due termini della formula precedente otteniamo, infine:

$$M = I\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\,.$$

Il rapporto $\Delta\omega/\Delta t$ esprime la rapidità con cui varia la velocità angolare del corpo ed è chiamato **accelerazione angolare** α:

variazione della velocità angolare (rad/s)

accelerazione angolare (rad/s²)

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

intervallo di tempo (s)

Avendo introdotto questa grandezza, la penultima formula può essere riscritta come

$$M = I\alpha.$$

Questa formula, che descrive la rotazione di un corpo rigido, è analoga alla legge $F = ma$ che vale per un moto di traslazione.

DOMANDA

Un cilindro pieno ha un raggio di 3,2 cm e una massa di 760 g.

▶ Quanto vale il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di simmetria?

ESERCIZI

1 **Vero o falso?**

a. Il momento angolare è una grandezza fisica utile per descrivere i moti di rotazione. V F

b. Il momento angolare di un corpo non dipende dal punto O rispetto al quale lo si calcola. V F

2 **Vero o falso?**

a. La velocità di rotazione di una pattinatrice artistica che fa una piroetta può cambiare senza l'applicazione di un momento di una forza esterna. V F

b. La variazione del momento angolare di un corpo rigido è uguale al rapporto fra il momento della forza applicata a esso e l'intervallo di tempo durante il quale tale momento agisce. V F

c. Per un oggetto che si muove di moto circolare uniforme il valore del momento angolare, calcolato rispetto al centro della traiettoria, non cambia mai. V F

3 **Vero o falso?**

a. Il momento d'inerzia è una grandezza scalare che caratterizza i corpi rotanti. V F

b. Il momento angolare di un corpo rigido in rotazione è direttamente proporzionale al suo momento d'inerzia. V F

c. L'energia cinetica di un corpo in rotazione non dipende dal suo momento d'inerzia. V F

4 **Completa la tabella.**

CORPO	MASSA (kg) E DIMENSIONI (m)		ASSE DI ROTAZIONE	MOMENTO D'INERZIA (kg · m²)
Sfera piena	$m = 5$	$r =$	Diametro della sfera	2×10^{-4}
Guscio cilindrico	$m = 3$	$r = 0{,}04$	Asse del cilindro	
Cilindro pieno	$m =$	$r = 0{,}15$	Asse del cilindro	2×10^{-2}
....	$m = 12$	$l = 2$	Retta perpendicolare e passante per il suo centro	4

5 La pallina di una roulette di raggio 30 cm ha massa 2,0 g. Il croupier lancia la pallina facendola ruotare alla velocità di 25 cm/s.

▶ Quanto vale il modulo del suo momento angolare calcolato rispetto al centro della roulette?

[$1{,}5 \times 10^{-4}$ kg · m²/s, direzione perpendicolare al tavolo, verso l'alto]

6 Durante l'orbita intorno al Sole, la cometa di Halley passa da una distanza massima dal Sole di $5{,}2 \times 10^{12}$ m a una distanza minima di $8{,}8 \times 10^{10}$ m. La sua velocità nel punto più lontano dal Sole vale $9{,}1 \times 10^2$ m/s.

▶ Quanto vale la velocità della cometa nel punto più vicino al Sole, se il momento angolare della cometa si conserva? (Calcola il momento angolare rispetto al centro del Sole.) [$5{,}4 \times 10^4$ m/s]

7 Una pattinatrice ferma in mezzo alla pista sta facendo una piroetta con le braccia distese e con velocità angolare di valore 3,50 rad/s. A un certo punto raccoglie le braccia intorno al corpo: così facendo, il suo momento d'inerzia si dimezza.

▶ Quanto vale ora il modulo della sua velocità angolare?

8 Un guscio cilindrico, che ha un raggio di 7,2 cm e una massa di 54 g, sta ruotando attorno al suo asse di simmetria alla frequenza di 1,4 Hz.

▶ Calcola il momento d'inerzia del guscio cilindrico.

▶ Calcola la sua velocità angolare e la sua energia cinetica di rotazione.

[$2{,}8 \times 10^{-4}$ kg·m²; 8,8 rad/s, $1{,}1 \times 10^{-2}$ J]

9 Una sfera piena ha un raggio di 5,7 cm ed è fatta di bronzo (la densità del bronzo è $8{,}9 \times 10^3$ kg/m³).

▶ Quanto vale il suo momento d'inerzia rispetto a un diametro?

[$9{,}0 \times 10^{-3}$ kg·m²]

10 Le caratteristiche del moto della Terra intorno al Sole sono: all'afelio, la sua velocità di rivoluzione è $v_A = 2{,}93 \times 10^4$ m/s, la distanza dal Sole è $r_A = 1{,}52 \times 10^{11}$ m; al perielio la velocità di rivoluzione è $v_P = 3{,}03 \times 10^4$ m/s, la distanza dal Sole è $r_P = 1{,}47 \times 10^{11}$ m. La massa della Terra è $5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

▶ Verifica che il moto di rivoluzione della Terra soddisfa la legge di conservazione del momento angolare, calcolato rispetto al centro del Sole.

11 Una catapulta giocattolo lancia in aria una pallina solida di plastica di massa 50 g. Il braccio della catapulta è lungo 25 cm. La pallina al momento del lancio ha un'accelerazione angolare di 100 rad/s^2.

► Quanto vale il momento torcente sulla pallina? (Trascura il momento d'inerzia del braccio della catapulta.) [0,31 N · m]