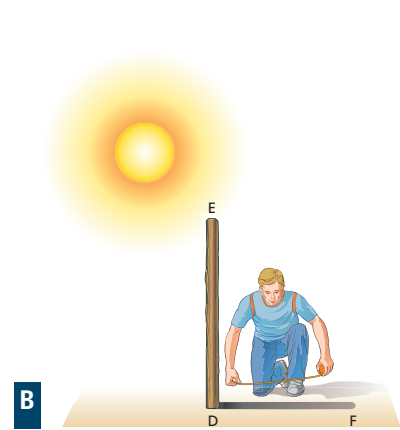
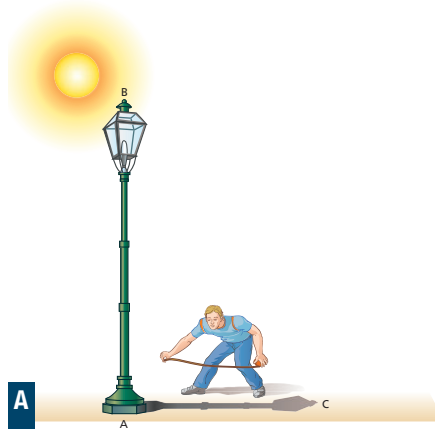
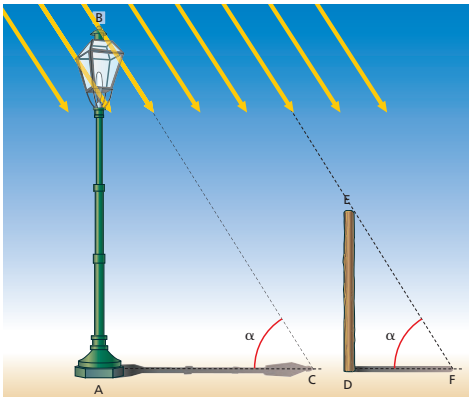


LA MISURA DI GRANDI DISTANZE CON LA TRIANGOLAZIONE

Come si può misurare l'altezza di un lampione senza doversi arrampicare su di esso? Se è una giornata di sole, è possibile sfruttare l'ombra del lampione.

► Con un metro a nastro si misura la lunghezza dell'ombra del lampione.

► Subito dopo si misura l'altezza di un paletto e la lunghezza della sua ombra.



I due triangoli rettangoli ABC (i cui cateti sono il lampione e la sua ombra) e DEF (formato dal paletto e dalla sua ombra) sono simili perché i due angoli indicati con α sono uguali visto che sono dovuti all'inclinazione dei raggi solari, che è la stessa nei due casi. Così si può impostare la proporzione

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF},$$

da cui si ricava l'altezza del lampione \overline{AB} :

$$\overline{AB} = \overline{DE} \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Questa misura dell'altezza del lampione è un esempio di *triangolazione*.

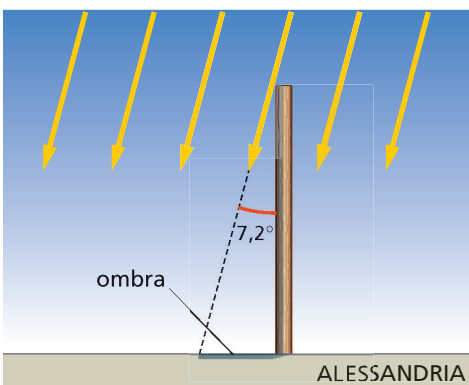
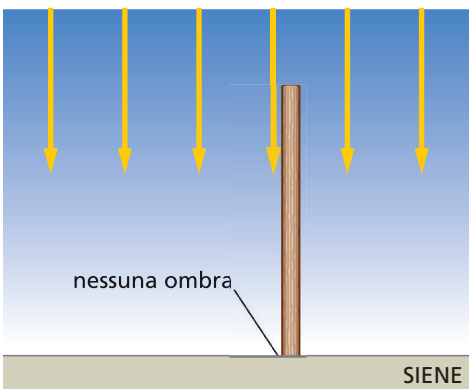
La **triangolazione** permette di ricavare la misura di una lunghezza incognita grazie alle proprietà geometriche dei triangoli.

Nei casi più semplici, come quello del lampione, il triangolo utilizzato per la misurazione è rettangolo. Ma si possono usare triangoli di forma qualunque, anche se la matematica che si deve utilizzare è più complessa. In tutti i casi è indispensabile la conoscenza di un lato del triangolo, detto **base**, che deve essere misurato con grande precisione.

La misura del raggio terrestre

Nel III secolo a.C. Eratostene di Cirene misurò il raggio della Terra. Egli sapeva che a Siene (una città dell'antico Egitto) a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole è esattamente a perpendicolo sulla città, quindi un bastone piantato in verticale nel terreno non ha ombra (figura a lato).

Nello stesso giorno Eratostene misurò l'ombra di un bastone ad Alessandria, una città che, secondo le sue conoscenze, si trovava a nord di Siene a una distanza di 5000 stadi. Grazie all'ombra del bastone egli stabilì che la direzione dei raggi solari formava un angolo di $7,2^\circ$ con la verticale (figura a lato). Come si vede dalla figura,



nelle condizioni scelte da Eratostene, l'angolo α di inclinazione dei raggi solari ad Alessandria è uguale all'angolo al centro β formato dai raggi che uniscono il centro della Terra con le due città.

È quindi possibile impostare la proporzione

$$\begin{aligned} (\text{circonferenza terrestre}) : (\text{distanza Siene-Alessandria}) = \\ = (\text{angolo giro}) : (\text{angolo } \beta), \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} (\text{circonferenza terrestre}) = (\text{distanza Siene-Alessandria}) &= \frac{(\text{angolo giro})}{(\text{angolo } \beta)} = \\ &= (5000 \text{ stadi}) \times \frac{360^\circ}{7,2^\circ} = 2,5 \times 10^5 \text{ stadi}. \end{aligned}$$

Sulla base di testi antichi si ritiene che uno stadio equivalga a 156 m, perciò la circonferenza terrestre trovata da Eratostene risulta

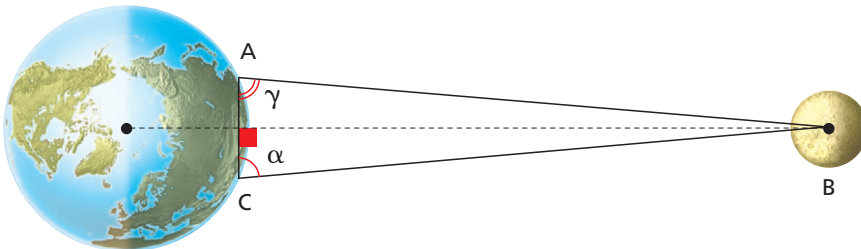
$$(2,5 \times 10^5) \times (156 \text{ m}) = 3,9 \times 10^7 \text{ m},$$

un risultato straordinariamente simile a quello accettato oggi ($4,01 \times 10^7 \text{ m}$).

Le distanze della Luna e del Sole dalla Terra

Conoscendo le dimensioni della Terra diventa possibile misurare la distanza Terra-Luna con il metodo della triangolazione.

La **figura** seguente mostra in modo schematico il triangolo ABC , che ha il vertice B nel centro del disco lunare e i vertici A e C in due località molto lontane tra loro ma disposte sullo stesso meridiano terrestre. La base \overline{AC} è nota, perché è calcolata a partire dalla conoscenza del valore della circonferenza terrestre.



Conoscendo la base \overline{AC} e misurando da Terra gli angoli α e γ è possibile calcolare la distanza tra il centro della Terra e il centro della Luna.

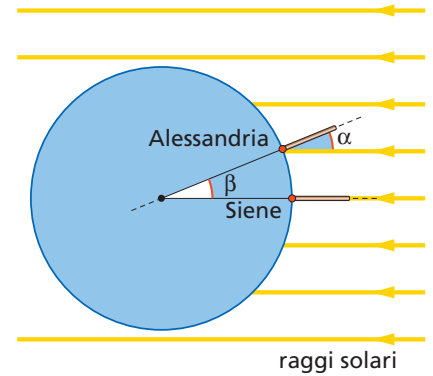
Questa distanza vale 384 400 km. Oggi, grazie a un particolare specchio lasciato sulla Luna dagli astronauti dell'Apollo 11, è possibile misurare la distanza Terra-Luna rilevando il tempo che un impulso laser, partito da Terra, impiega a riflettersi sullo specchio lunare e a tornare al punto di partenza.

Il metodo è così preciso che è possibile stabilire che la distanza media Terra-Luna aumenta di 3,8 cm ogni anno.

Basato essenzialmente su una triangolazione è anche il metodo per misurare la distanza Terra-Sole. Si è trovato che il valore medio di tale distanza è $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$; questa grandezza è chiamata **Unità Astronomica (UA)**.

DOMANDA

In una giornata di sole misura l'altezza di un lampione o di un palo con il metodo della triangolazione.



ESERCIZI

1 **Test.** Quale tra i seguenti elementi non fu usato da Eratostene per calcolare la lunghezza della circonferenza terrestre?

- A Una proporzione tra archi di circonferenza e angoli al centro corrispondenti.
- B Una proporzione tra gli elementi di due triangoli simili.
- C La distanza tra Alessandria e Siene.
- D L'angolo tra i raggi solari e un bastone piantato in terra.

2 La distanza dal Sole di Plutone, il pianeta più lontano, vale $5,91 \times 10^{12}$ m.

▶ Esprimi questa distanza in UA.

[39,4 UA]

3 PROBLEMA SVOLTO

Calcolo di un'altezza con la triangolazione

Una turista alta 1,68 m visita Piazza del Popolo, a Roma, dove si trova un obelisco. La turista misura la lunghezza dell'ombra dell'obelisco (compresa la sua base), che risulta 17,9 m. Subito dopo è misurata l'ombra della turista, che risulta lunga 0,81 m.

- Qual è l'altezza dell'obelisco (compresa la base su cui poggia)?



Dati e incognite

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Altezza della turista	\overline{DE}	1,68 m	
	Lunghezza dell'ombra della turista	\overline{DF}	0,81 m	
	Lunghezza dell'ombra dell'obelisco	\overline{AC}	17,9 m	
INCOGNITE	Altezza dell'obelisco	$x = \overline{AB}$?	

Ragionamento

- Si tratta di una misura mediante triangolazione, perché i due triangoli rettangoli ABC e DEF sono simili.

Risoluzione

Scriviamo la proporzione tra i due triangoli

$$x : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF}$$

Ricaviamo x nella proporzione

$$x = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DE}}{\overline{DF}}$$

Sostituiamo nella soluzione i valori numerici

$$x = \frac{(1,68 \text{ m}) \cdot (17,9 \text{ m})}{0,81 \text{ m}} = 37 \text{ m}$$

Controllo del risultato

La punta dell'obelisco di Piazza del Popolo si trova a 36,5 m da terra. Con due cifre significative, il risultato di 37 m è in accordo con tale dato.

- 4** Per conoscere l'altezza di un albero, un ragazzo alto 1,74 m misura la lunghezza della sua ombra, che risulta 2,45 m. Poi misura la lunghezza dell'ombra dell'albero, ottenendo 5,60 m.
- Quale valore trova il ragazzo per l'altezza dell'albero?

[3,98 m]

- 5** La circonferenza terrestre è lunga $4,01 \times 10^7$ m. Vuoi conoscere la distanza tra due città, A e B, poste sullo stesso meridiano. Quando un bastone piantato in terra in A non fa ombra, misuri l'angolo fatto in B dai raggi solari con la direzione verticale, trovando 5° .
- Qual è la distanza tra le due città?

[557 km]