

## LA VELOCITÀ DI FUGA DA UN PIANETA

Si chiama velocità di fuga la minima velocità che deve essere posseduta da un proiettile posto sulla superficie di un pianeta per riuscire ad allontanarsi per sempre da esso, senza mai più ricadervi.

Calcoliamo ora la velocità di fuga da un pianeta di massa  $M$  e raggio  $R$ . A questo proposito indichiamo con  $m$  la massa del proiettile e poniamo lo zero dell'energia potenziale del sistema proiettile-pianeta quando questi sono a distanza infinita (formula (14) del capitolo «La gravitazione»).

- La *minima* velocità che permette a un proiettile di sfuggire all'attrazione di un pianeta è quella che gli consente di giungere a distanza infinita dal pianeta con la minima velocità possibile, cioè con velocità nulla e, quindi, con energia cinetica  $K_2 = 0$  J.
- Quando  $m$  è all'infinito, anche l'energia potenziale del sistema è nulla:  $U_2 = 0$  J. Quindi, l'energia meccanica totale del sistema (pianeta + proiettile) è  $U_2 + K_2 = 0$  J.
- Un proiettile di massa  $m$  sparato dalla superficie di un pianeta con una velocità pari alla velocità di fuga  $v_f$  ha energia potenziale  $U_1$  ed energia cinetica  $K_1$  dati da

$$U_1 = -G \frac{mM}{R} \quad \text{e} \quad K_1 = \frac{1}{2}mv_f^2.$$

- La legge di conservazione dell'energia meccanica totale fornisce la relazione:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

e, sostituendo a questi simboli il loro valore, otteniamo:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - G \frac{mM}{R} = 0.$$

- Abbiamo così un'equazione da cui possiamo ricavare la velocità di fuga  $v_f$  che risulta

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1)$$

### Il raggio di Schwarzschild

Nella formula (1) il raggio  $R$  del pianeta è al denominatore. Quindi, se la massa di un corpo celeste rimane sostanzialmente costante mentre il suo raggio diminuisce (come accade, per esempio, a una stella che sta «esaurendo» il proprio combustibile nucleare), la velocità di fuga da esso aumenta. Se il raggio  $R$  continua a diminuire, la velocità di fuga può diventare superiore a  $c$ , la velocità della luce nel vuoto.

Poiché, però, la teoria della relatività di Einstein stabilisce che nessun oggetto può muoversi a velocità maggiore di  $c$ , è impossibile che un oggetto possa allontanarsi da questo corpo celeste.

Esso si è trasformato in un **buco nero**, cioè in un pozzo gravitazionale da cui nulla, neppure la luce, può uscire.

Il valore critico di  $R$  per il quale la velocità di fuga  $v_f$  è uguale alla velocità della luce nel vuoto  $c$  è detto **raggio di Schwarzschild**, dal nome del fisico tedesco Karl Schwarzschild (1873-1916).

#### Energia potenziale

L'energia potenziale è uguale a quella che si avrebbe se tutta la massa del pianeta fosse concentrata nel suo centro.

Per calcolare il valore del raggio di Schwarzschild  $R_s$ , relativo a un corpo di massa  $M$ , poniamo  $v_f = c$  e  $R = R_s$  nella formula (1) e, elevando entrambi i membri al quadrato, troviamo l'equazione

$$c^2 = \frac{2GM}{R_s},$$

da cui ricaviamo il valore

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2)$$

### ESEMPIO

La massa della Terra è  $5,98 \times 10^{24}$  kg.

► Qual è il raggio di Schwarzschild della Terra?

Sostituendo i valori numerici corrispondenti nella formula (2) si ottiene

$$\begin{aligned} R_s = \frac{2GM}{c^2} &= \frac{2 \times \left( 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right) \times (5,98 \times 10^{24} \text{ kg})}{\left( 3,00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2} = \\ &= 8,86 \times 10^{-3} \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{kg}} = 8,86 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{s}^2}{\text{kg}} = 8,86 \times 10^{-3} \text{ m}. \end{aligned}$$

Quindi se, per assurdo, la Terra diventasse un buco nero, il suo raggio diventerebbe minore di 9 mm (ma conterrebbe ancora tutta la materia che la costituisce). Ciò dà un'idea dell'incredibile densità che caratterizza questi corpi celesti.

## ESERCIZI

### DOMANDE SUI CONCETTI

**1** ★★★ Il corpo celeste Caronte, che è un satellite di Plutone, ha un raggio di 604 km e una massa di  $1,52 \times 10^{21}$  kg.

► Determina la velocità di fuga da Caronte.

[579 m/s]

**2** La massa di Giove è  $1,9 \times 10^{27}$  kg.

★★★

► Quanto vale il suo raggio di Schwarzschild?

[28,3 cm]

**3** ★★★ La velocità di fuga da Titano (un satellite di Saturno) vale  $2,63 \times 10^3$  m/s.

★★★

► Determina il rapporto tra la massa di Titano e il suo raggio.

[ $5,19 \times 10^{16}$  kg/m]