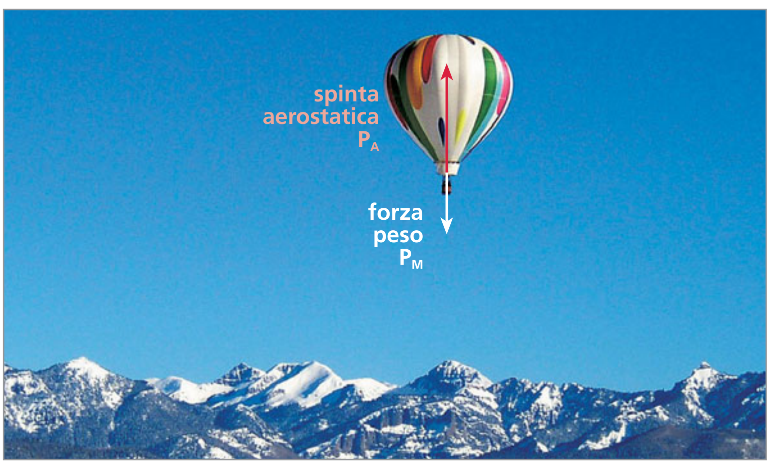
Ad alta quota!

…fino a che quota può volare una mongolfiera?

Si può studiare il comportamento di una mongolfiera posta nell'atmosfera ricordando il Principio di Archimede:
un corpo immerso in un fluido è soggetto a una forza diretta verso l'alto uguale al peso del volume di fluido spostato.
Poiché anche l'aria è un fluido, ogni corpo nell'atmosfera è sottoposto a una forza di Archimede, detta in questo caso «spinta aerostatica». Si deduce quindi che una mongolfiera di peso P_M, che sposta un volume V di aria di peso P_A, sale verso l'alto quando la spinta aerostatica di intensità P_A è maggiore della forza peso P_M della mongolfiera, cioè: $P_A > P_M$.



I termini di tale disuguaglianza possono essere espressi ricordando che la forza peso di un qualsiasi corpo è direttamente proporzionale alla sua massa tramite la costante $g \simeq 9{,}8\ \text{m/s}^2$, cioè $P = m \cdot g$:

$$P_A > P_M \rightarrow m_A \cdot g > m_M \cdot g \rightarrow m_A > m_M.$$

Poiché ogni corpo ha massa direttamente proporzionale al proprio volume secondo la densità d del materiale di cui è costituito, ovvero $m = d \cdot V$, l'ultima disuguaglianza, $m_A > m_M$, si può riscrivere come:

$$d_A \cdot V > d_M \cdot V \rightarrow d_A > d_M.$$

In conclusione, la mongolfiera vola in alto solamente se ha una densità minore di quella dell'aria. Nel 1783, i fratelli Jacques Étienne e Joseph Michel Montgolfier realizzarono questa condizione riscaldando l'aria contenuta in un pallone aerostatico. Questo risalì nell'aria circostante più fredda, quindi più densa, per più di un chilometro, inaugurando l'epoca del volo umano.
Osserviamo ora che la densità dell'atmosfera d_A non è una grandezza costante, ma diminuisce con l'altitudine x fino a diventare praticamente nulla intorno ai 30 km d'altezza. Per quanto la mongolfiera possa avere una bassa densità, ci sarà quindi una quota massima $x_{\max}$ alla quale la densità dell'aria sarà uguale a quella della mongolfiera e la spinta di Archimede uguale al peso del pallone. In tale situazione la salita si arresta.
Cerchiamo di valutare le quote x permesse a una mongolfiera di densità d_M.
Immaginiamo per semplicità che la diminuzione della densità dell'aria sia di tipo lineare in x, cioè:

$$d_A(x) = d_0 - kx \quad \text{con } x \geq 0,$$

dove d_0 è la densità a quota $x = 0$ e k è un'opportuna costante positiva. Sostituiamo l'espressione di $d_A(x)$ nella relazione $d_A \geq d_M$ (tenendo così conto anche del caso in cui $d_A = d_M$):

$$d_0 - kx \geq d_M \ (\text{con } x \geq 0).$$

Si tratta di una disequazione di primo grado in x, le cui soluzioni rappresentano le altezze x consentite alla mongolfiera.
Risolviamola:

$$x \leq \frac{d_0 - d_M}{k}.$$

L'altezza massima raggiungibile è il valore $x_{\max} = \dfrac{d_0 - d_M}{k}$.
Per esempio, data la densità dell'aria a livello del mare $d_0 = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$ e la costante $k = 4{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{kg/m}^4$, se la mongolfiera ha una densità $d_M = 1{,}22\ \text{kg/m}^3$, la quota massima che quest'ultima può raggiungere è $x_{\max} =$

$$= \frac{(1{,}29 - 1{,}22)\ \text{kg/m}^3}{4{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{kg/m}^4} \simeq 1556\ \text{m}.$$

In questo caso, il pallone può alzarsi fino a circa 1,5 km di quota.