

## METTITI ALLA PROVA

**1** Dimostra che la seguente espressione:  $\frac{x^2 - 2\sqrt{7}x + 7}{x - \sqrt{7}} \cdot (x + \sqrt{7}) - x^2 + 14$  è uguale a 7.

**2** Verifica che esiste un rettangolo  $R$  che si ottiene come somma di un quadrato  $Q$  e di un altro rettangolo  $R'$  simile a  $R$ . Calcola inoltre il rapporto, detto rapporto aureo, tra i due lati di  $R$ .

$$\left[ \text{detti } x \text{ e } l \text{ i suoi lati, } \frac{x}{l} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right]$$

**3** Da un punto  $A$  esterno a una circonferenza di centro  $O$  e raggio di 5 cm, conduci le tangenti  $AP$  e  $AQ$ . I punti di contatto  $P$  e  $Q$  distano tra loro 8 cm. Determina l'area e il perimetro del quadrilatero  $APOQ$ .

$$[33,33 \text{ cm}^2; 23,33 \text{ cm}]$$

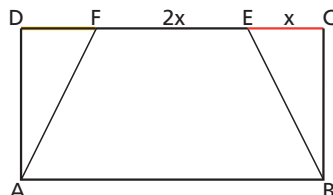
**4** Due fratelli hanno età che differiscono di 7 anni e il prodotto delle età è 60. Quanti anni hanno i due fratelli?

$$[12 \text{ e } 5 \text{ anni}]$$

**5** Quanto vale la somma dei cubi delle radici dell'equazione  $(m - 1)x^2 - mx + m + 1 = 0$ ,  $m \neq 0, 1, -1$ ?

$$\left[ \frac{m(3 - 2m^2)}{(m - 1)^3} \right]$$

**6** È dato un rettangolo di lati  $AB = 20$  cm e  $BC = 10$  cm, nel quale è inscritto un trapezio  $ABEF$  come in figura.



Quanto deve valere  $x$  affinché l'area di  $ABEF$ , moltiplicata per l'area di  $EBC$  e divisa per l'area di  $ABCD$ , valga  $\frac{75}{4}$  cm<sup>2</sup>? Quanto vale in tal caso il perimetro del trapezio?

$$[x = 5 \text{ cm}; 10(3 + \sqrt{5}) \text{ cm}]$$

**7** Dimostra che  $a = h^2 - k^2$ ,  $b = 2hk$  e  $c = h^2 + k^2$  costituiscono una terna pitagorica  $\forall h, k \in \mathbb{R}$  con  $k^2 < h^2$ . Determina poi la terna pitagorica corrispondente ai valori di  $h$  e  $k$ , soluzioni dell'equazione  $3x^2 + 4x + 1 = 0$ .

(Suggerimento. Ricorda che  $a$ ,  $b$  e  $c$  formano una terna pitagorica se vale l'uguaglianza  $a^2 + b^2 = c^2$ .)

$$\left[ \frac{8}{9}, \frac{2}{3}, \frac{10}{9} \right]$$

**8** Risolvi l'equazione di secondo grado  $10000x^2 + 99999999x - 100000 = 0$ , utilizzando la notazione esponenziale con potenze in base 10. Utilizza poi i risultati trovati per generalizzare la risoluzione di un'equazione del tipo  $n^\alpha x^2 + (n^{\alpha+\beta} - 1)x - n^\beta = 0$ , con  $n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ .

$$[-10^5, 10^{-4}]$$


**9** Senza risolvere l'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$ , scrivi l'equazione di secondo grado che ha per radici:

- a) gli opposti dei valori delle radici dell'equazione data;
- b) i reciproci dei valori delle radici dell'equazione data;
- c) le radici dell'equazione data moltiplicate per un numero  $k$ ;
- d) le radici dell'equazione data aumentate di  $k$ .

[a]  $ax^2 - bx + c = 0$ ; b)  $cx^2 + bx + a = 0$ ;

c)  $ax^2 + kbx + k^2c = 0$ ;

d)  $ax^2 + (b - 2ak)x + c - kb + ak^2 = 0$

**10**  **TEST** Data l'equazione  $yx^2 + x - y = 0$ , quale delle seguenti affermazioni è *corretta*?

- A** Esiste un valore di  $x$  che è soluzione dell'equazione per ogni valore di  $y$ .
- B** Per ogni valore di  $y$  vi è almeno un valore di  $x$  che risolve l'equazione.
- C** Per ogni valore di  $y$  esistono due valori distinti di  $x$  che risolvono l'equazione.
- D** Per ogni valore di  $x$  esiste un valore di  $y$  che risolve l'equazione.
- E** Esiste un valore di  $y$  che è soluzione dell'equazione per ogni valore di  $x$ .

(*Olimpiadi della matematica, Gara Provinciale, 1995*)

**11** Nell'equazione  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ , senza calcolare le soluzioni, trova:

a)  $(x_2 - x_1)^2 - 3x_1 x_2$ ;

b)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ .

[a)  $\frac{7}{4}$ ; b)  $\frac{37}{6}$ ]

**12** Esistono basi in cui l'espressione  $15 \cdot 15 = 321$  risulta corretta?

(*Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior, 2004*)

[sì, la base 6]

**13** **TEST** Un foglio di carta rettangolare di misura  $6 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$  è piegato lungo la sua diagonale. Le due parti non sovrapposte vengono tagliate via e poi si riapre il foglio ottenendo così un rombo. Qual è la lunghezza del lato del rombo?

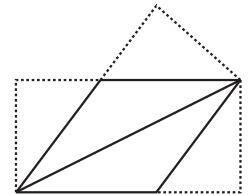
**A**  $3,5\sqrt{5} \text{ cm}$

**B** 7,35 cm

**C** 7,5 cm

**D** 7,85 cm

**E** 8,1 cm



(*Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior, 2003*)

**14** **TEST** Quante sono le coppie  $(x; y)$  di numeri reali che soddisfano l'equazione

$$(x + y)^2 = (x + 3)(y - 3)?$$

(Suggerimento. Poni  $X = x + 3$  e  $Y = y - 3$  e sostituisci.)

**A** 0

**B** 1

**C** 2

**D** 3

**E** Infinite.

(*Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior, 2003*)