

LABORATORIO DI MATEMATICA

LE EQUAZIONI GONIOMETRICHE CON DERIVE

Le funzioni goniometriche in Derive

| La funzione | restituisce |
|-----------------|------------------------------------|
| SIN(α) | il seno dell'angolo α |
| COS(α) | il coseno dell'angolo α |
| TAN(α) | la tangente dell'angolo α |
| COT(α) | la cotangente dell'angolo α |
| DEG | la costante $\frac{\pi}{180}$ |

| La funzione | restituisce |
|-------------|-------------------------|
| ASIN(n) | l'arcoseno di n |
| ACOS(n) | l'arcocoseno di n |
| ATAN(n) | l'arcotangente di n |
| ACOT(n) | l'arcocotangente di n |
| PI | il numero π |

I sistemi di misura degli angoli in Derive

Per default Derive considera le misure degli angoli in radianti.

Possiamo utilizzare anche il sistema sessadecimale (la sigla anglosassone è DD, Decimal Degree), nel quale il grado è la 360-esima parte dell'angolo giro e i suoi sottomultipli si misurano nel sistema decimale. Per farlo selezioniamo *Degree* nel campo *Angolo in* della finestra di dialogo di *Opzioni_Modalità Semplificazione*.

La scelta dei gradi sessadecimali, come tutte le opzioni attivate all'interno del comando *Opzioni_Modalità*, rimane attiva sino a diversa indicazione.

Derive non usa il sistema sessagesimale (la sigla anglosassone è DMS, Degree Minute Second), in cui i sottomultipli di grado si misurano in primi e secondi.

ESERCITAZIONE GUIDATA

Troviamo con Derive tutte e sole le soluzioni appartenenti all'intervallo $[0; 2\pi[$ dell'equazione:

$$2 \sin x + 3 \cos x + 2 = 0.$$

Esprimiamo le soluzioni in radianti, in gradi sessadecimali e in gradi sessagesimali.

Le soluzioni dell'equazione

- Entriamo in ambiente Derive, diamo *Crea_Espressione*, scriviamo il testo dell'equazione $2 \cdot \text{SIN}(x) + 3 \cdot \text{COS}(x) + 2 = 0$ e la inseriamo nell'etichetta #1 (figura 1).
- Diamo *Risolvi_Espressione* e ricaviamo nella #2 l'impostazione e nella #3 la soluzione dell'equazione. Derive dà tre radici nel formato matematico esatto.
- Con *Semplifica Approssima* otteniamo nella #4 le tre soluzioni dell'equazione mostrate da Derive, approssimate ed espresse in radianti.

```
#1: 2 * SIN(x) + 3 * COS(x) + 2 = 0
#2: SOLVE(2 * SIN(x) + 3 * COS(x) + 2 = 0, x)
#3: x = - 2 * ACOT(- 1/5) ∨ x = 2 * ACOT(1/5) ∨ x = - π/2
#4: x = -3.536383773 ∨ x = -1.570796326 ∨ x = 2.746801533
```

▲ Figura 1 Le soluzioni dell'equazione date da Derive.

Le soluzioni richieste

- Per vedere altre soluzioni generiamo tre tabelle, partendo dai valori mostrati da Derive e incrementandoli di 2π , il periodo delle funzioni coinvolte nella nostra equazione.

• Scriviamo l'apposita funzione di Derive per le tabelle VECTOR(- 3.536383773 + 2*k*PI, k, -1, 3)

• Con *Semplifica_Approssima* la facciamo operare. Vediamo nella #6 ($2\pi \simeq 6,289$) che vi è una soluzione soddisfacente alla richiesta del problema.

• Inseriamo all'interno della funzione VECTOR la seconda soluzione e sulla #7 diamo *Semplifica_Base*, ottenendo nella #8 le soluzioni nel formato esatto.

• Diamo sulla #9 *Semplifica_Approssima*, ricavando le medesime soluzioni ma approssimate. Vediamo nella #9 che vi è un'altra soluzione accettabile.

• Operiamo similmente per la terza soluzione scoprendo che genera la medesima successione di soluzioni della prima.

• Osservando i risultati, concludiamo che le soluzioni comprese nell'intervallo $[0; 2\pi[$ sono due, che immettiamo nella #12.

```
#5: VECTOR(-3.536383773 + 2*k*PI, k, -1, 3)
#6: [-9.81956908, -3.536383773, 2.746801534, 9.029986841, 15.31317214]
#7: VECTOR(-PI/2 + 2*k*PI, k, -1, 3)
#8: [-5*PI/2, -PI/2, 3*PI/2, 7*PI/2, 11*PI/2]
#9: [-7.853981633, -1.570796326, 4.71238898, 10.99557428, 17.27875959]
#10: VECTOR(2.746801533 + 2*k*PI, k, -1, 3)
#11: [-3.536383774, 2.746801532, 9.02998684, 15.31317214, 21.59635745]
#12: [2.746801534, 3*PI/2]
```

▲ Figura 2 Le soluzioni nell'intervallo $[0; \pi[$.

Da radianti a sessadecimali

• Per passare da radianti al sistema sessadecimale impostiamo nella #13 (figura 3) e nella #15 la divisione delle misure in radianti dei due angoli per DEG, che è la costante $\frac{\pi}{180^\circ}$.

• Con *Semplifica_Approssima* otteniamo le misure dei due angoli nella #14 e nella #16.

```
#13: 2.746801534 / 1°
#14: 157.380135
#15: 3*PI / 1°
#16: 270
```

► Figura 3 Le soluzioni in gradi sessadecimali.

Da sessadecimali a sessagesimali

Gli angoli in sessadecimale e in sessagesimale hanno la stessa parte intera, quindi:

- per i gradi prendiamo la parte intera della misura del primo angolo;
- per i primi moltiplichiamo per 60 la parte decimale della misura del primo angolo e ne prendiamo la parte intera;
- per i secondi moltiplichiamo la parte decimale dei primi per 60, arrotondando l'ultima cifra intera.

Vediamo le operazioni dalla #17 alla #22 (figura 4).

L'ampiezza del secondo angolo coincide nei due sistemi.

```
#17: FLOOR(157.380135)
#18: 157
#19: (157.380135 - FLOOR(157.380135)) * 60
#20: 22.8081
#21: (22.8081 - FLOOR(22.8081)) * 60
#22: 48.486
```

▲ Figura 4 Il passaggio da gradi sessadecimali a gradi sessagesimali.

Le soluzioni richieste sono pertanto le seguenti.

| In radianti | In gradi sessadecimali | In gradi sessagesimali |
|------------------------------------|------------------------|------------------------|
| 2,746801533 | 157°,380135 | 157°22'48" |
| $\frac{3}{2}\pi \simeq 4,71238898$ | 270° | 270° |

Esercitazioni

Con l'aiuto di Derive trova le soluzioni, comprese fra 0 e 2π ed espresse in radianti, delle seguenti equazioni goniometriche. Trasformale, poi, in gradi, primi e secondi.

Suggerimento. Se Derive non trova le soluzioni di qualche equazione, opera opportune sostituzioni con formule goniometriche e poi torna a usare il comando *Risolvi_Algebricamente*.

- 1** $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}; x = 90^\circ, x = 210^\circ, x = 330^\circ \right]$
- 2** $\cos x = \operatorname{tg} x$ $[x = 0,666239, x = 2,47535; x = 38^\circ 10' 22'', x = 141^\circ 49' 38'']$
- 3** $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$ $[x = 0,364863, x = 1,20593, x = 3,50645, x = 4,34752; x = 20^\circ 54' 19'', x = 69^\circ 5' 41'', x = 200^\circ 54' 19'', x = 249^\circ 5' 41'']$
- 4** $2 \operatorname{sen} x - 1 = 3 - 2 \operatorname{tg} x$ $[x = 0,886287, x = 4,38524; x = 50^\circ 46' 50'', x = 251^\circ 15' 23'']$
- 5** $-3 \operatorname{sen} x + 3 = 2 \cos x$ $\left[x = 0,394791, x = \frac{\pi}{2}; x = 22^\circ 37' 12'', x = 90^\circ \right]$
- 6** $\operatorname{sen} x + \cos x - \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = 0$ $\left[x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}; x = 30^\circ, x = 60^\circ \right]$
- 7** $9 - 4 \cos x = -9 \operatorname{sen} x$ $\left[x = \frac{3\pi}{2}, x = 5,54884; x = 270^\circ, x = 317^\circ 55' 30'' \right]$
- 8** $(2\sqrt{3} - 2) \operatorname{sen} x + 4 \cos^2 x + \sqrt{3} - 4 = 0$
 $\left[x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{11\pi}{6}; x = 60^\circ, x = 210^\circ, x = 120^\circ, x = 330^\circ \right]$
- 9** $4 \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x = 4$
 $\left[x = \frac{\pi}{2}, x = 1,93130, x = \frac{3\pi}{2}, x = 5,09289; x = 90^\circ, x = 111^\circ 48' 5'', x = 270^\circ, x = 291^\circ 48' 5'' \right]$
- 10** $\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0$ $\left[x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}; x = 135^\circ, x = 315^\circ \right]$
- 11** $5 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 4 = 0$ [impossibile]
- 12** $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - \cos^2 x + 1 = 0$
 $\left[x = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \pi, x = 2\pi; x = 0^\circ, x = 30^\circ, x = 150^\circ, x = 180^\circ, x = 360^\circ \right]$

Con l'aiuto di Derive, trova le soluzioni delle seguenti equazioni goniometriche, comprese fra 0° e 360° , espresse in gradi, primi e secondi.

Traccia i grafici della sinusoide contenuta nel primo membro e della retta parallela all'asse x , di equazione $y = k$, dove a k dai il valore numerico del secondo membro. Ritrova nel grafico le soluzioni determinate analiticamente.

- 13** $5 \operatorname{sen}(3x + 24^\circ) = 2$
 $[x = 44^\circ 8' 26'', x = 119^\circ 51' 34'', x = 164^\circ 8' 26'', x = 239^\circ 51' 34'', x = 284^\circ 8' 26'', x = 359^\circ 51' 34'']$
- 14** $2 \operatorname{sen}(2x - 60^\circ) = 1$ $[x = 45^\circ, x = 105^\circ, x = 225^\circ, x = 285^\circ]$
- 15** $4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x + 30^\circ\right) = 3$ $[x = 37^\circ 10' 51'', x = 202^\circ 49' 9'']$