3. Baricentro di linee

La ricerca del baricentro delle linee si effettua con i criteri generali (▶1) esposti nel paragrafo precedente. Poiché le masse sono in questo caso lunghezze, le (1) vanno più propriamente scritte nella forma:

$$x_G = \frac{\sum_i l_i \, x_i}{\sum_i l_i} \qquad y_G = \frac{\sum_i l_i \, y_i}{\sum_i l_i} \tag{2}$$

Segmento

Il baricentro di un segmento AB coincide con il suo punto medio (▶FIGURA 1).

Il baricentro, infatti, deve trovarsi sul segmento poiché tutte le masse sono allineate nella direzione AB. Inoltre, l'asse del segmento (per definizione perpendicolare al segmento nel suo punto medio) è asse di simmetria della figura.

Ai fini del calcolo del momento statico, il segmento (massa lineare continua) equivale a una massa puntiforme concentrata nel baricentro, avente per intensità la lunghezza totale del segmento stesso.

Spezzata

Per determinare il baricentro della spezzata, basta immaginare di concentrare le masse (lunghezze) dei segmenti componenti nei rispettivi baricentri. Si ottiene così un sistema discontinuo di masse di intensità nota, concentrate in punti di posizione nota.

Si determini, per esempio, il baricentro della spezzata $ABCD$ (▶FIGURA 2) nella quale le lunghezze dei tre segmenti sono espresse in metri. La linea equivale a un sistema discreto di tre masse puntiformi di modulo 4 m, 6 m, 2 m, concentrate nei baricentri (punti medi) G_1, G_2, G_3 dei tratti AB, BC, CD (▶FIGURA 3).

Occorre, anzitutto, scegliere un sistema di riferimento (▶FIGURA 4). La scelta è arbitraria e dettata soltanto da criteri di opportunità. Si applicano poi le (2):

$$x_G = \frac{\sum_i l_i \, x_i}{\sum_i l_i} = \frac{4 \cdot 0 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{12} \qquad y_G = \frac{\sum_i l_i \, y_i}{\sum_i l_i} = \frac{4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{12}$$

da cui si ricava

$$x_G = 2{,}50 \text{ m} \qquad y_G = 3{,}17 \text{ m}$$

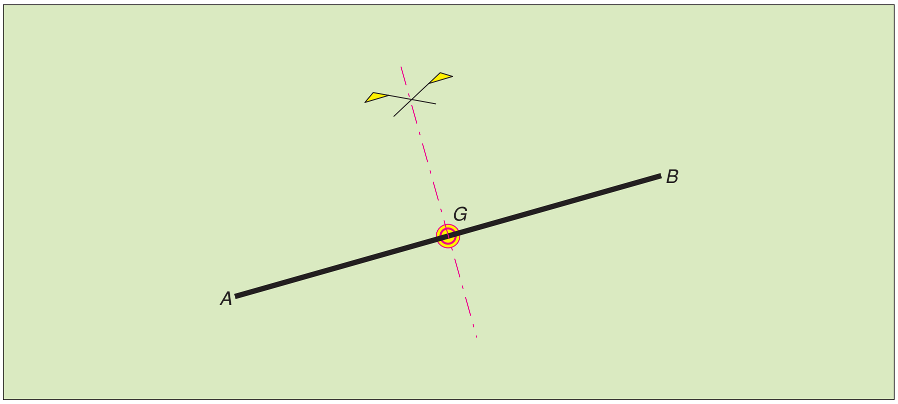
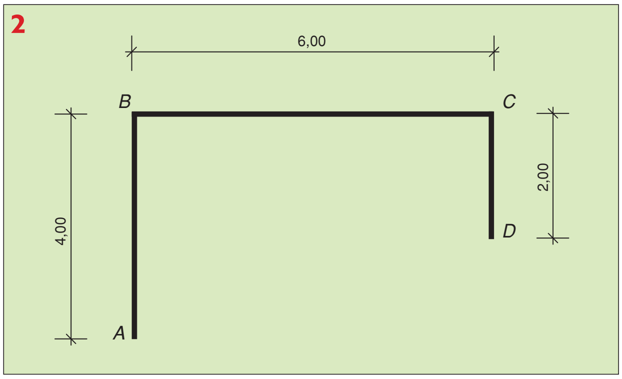


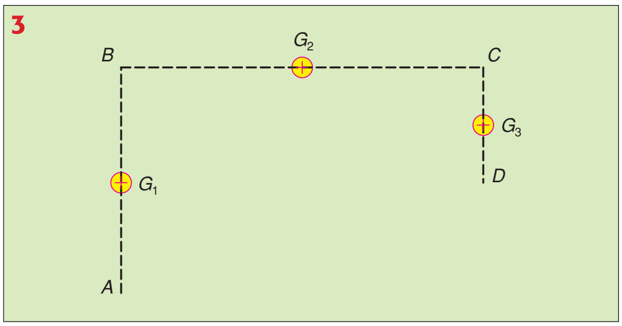
FIGURA 1 Baricentro del segmento.

UNITÀ E1

▶1 Gli assi geometrici degli elementi strutturali sono rappresentati da linee:

- segmenti (travi e pilastri);
- spezzate (portali);
- linee curve (archi).

2


3


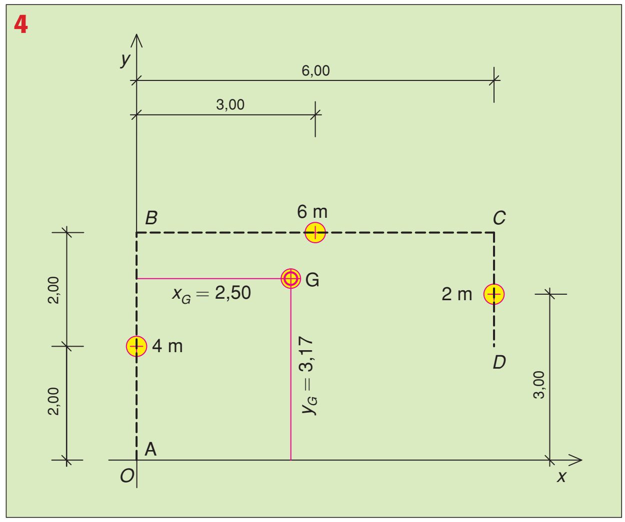
4


FIGURA 2 Spezzata.

FIGURA 3 Ai fini della determinazione del baricentro, la spezzata (sistema continuo) equivale al sistema discreto di tre masse-lunghezza puntiformi.

FIGURA 4 Ricerca del baricentro della spezzata.

Metodo grafico per la determinazione del baricentro di una spezzata

Stabilita un'opportuna scala delle distanze (▶FIGURA 5), si disegnano i punti G_1, G_2, G_3 in cui si immaginano concentrate le lunghezze dei lati (4 m, 6 m, 2 m).

Queste vanno dapprima rappresentate da tre vettori equiversi l_1, l_2, l_3, orientati in direzione x. Stabilita un'opportuna scala per i vettori lunghezza, si può disegnare il poligono delle forze 1 e il poligono funicolare di lati I, II, III, IV, che determina la retta d'azione x della risultante:

$$L = \Sigma_i l_i = 4 + 6 + 2 = 12 \text{ m}$$

Si rappresentano poi le lunghezze dei lati con tre nuovi vettori lunghezza orientati in direzione y. Disegnati il poligono delle forze 2 e il poligono funicolare di lati I′, II′, III′, IV′, resta determinata la retta d'azione y della risultante L; l'intersezione fra le rette x e y è il baricentro G della spezzata.

Poligonale regolare

Data la poligonale $A, C, ..., B$ (▶FIGURA 6), sia l la lunghezza comune dei lati e R il raggio del cerchio inscritto.

La linea presenta un asse verticale di simmetria. Il baricentro si trova, perciò, su questo asse ed è sufficiente determinare l'ordinata y_G (pari alla distanza OG dal centro del cerchio inscritto). La seconda delle (2):

$$y_G = \frac{\Sigma_i l_i y_i}{\Sigma_i l_i}$$

può essere posta in un'altra forma, sfruttando la similitudine dei triangoli FKG e OMM', che hanno i lati a due a due perpendicolari. Si ha:

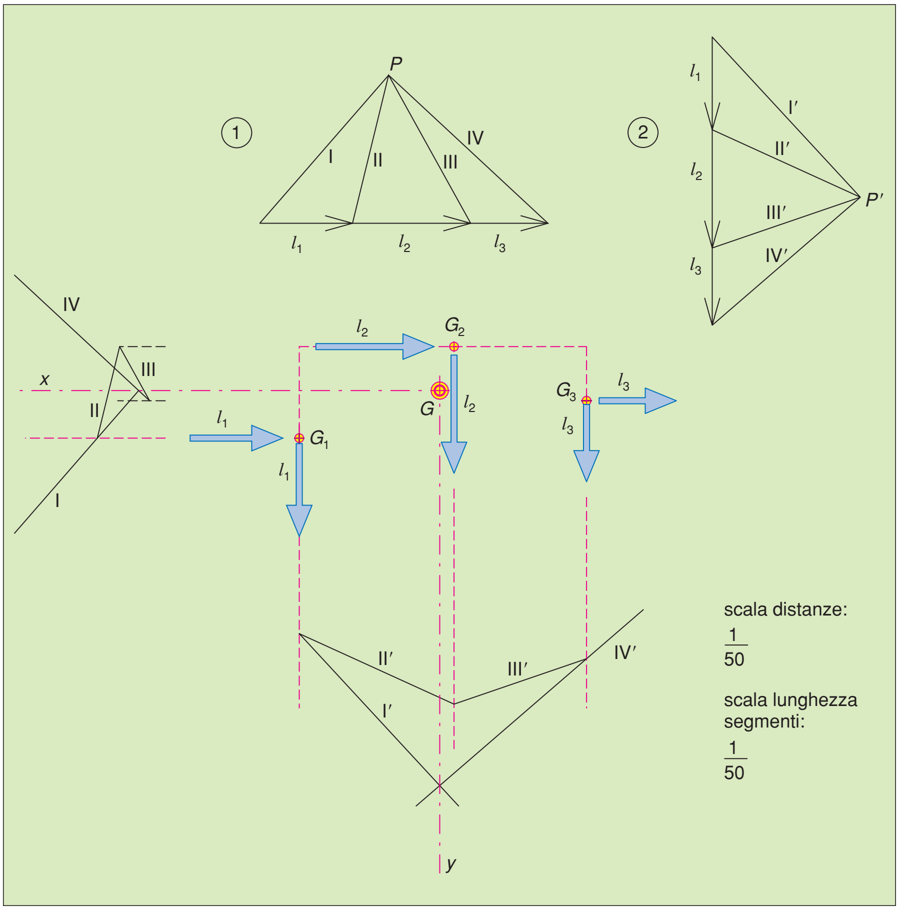


FIGURA 5 Ricerca grafica del baricentro della spezzata.

$$FG : OM = GK : MM'$$

Indicando con p la lunghezza della proiezione del lato FG sul diametro x, si ha:

$$l : R = p : y$$

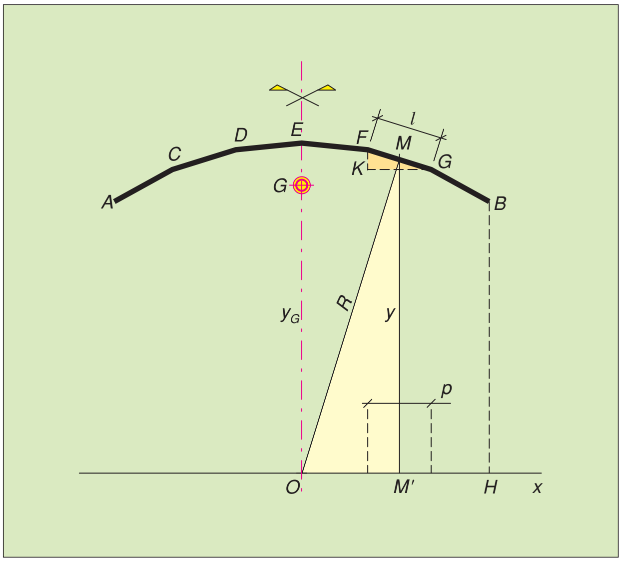


FIGURA 6 Poligonale regolare.

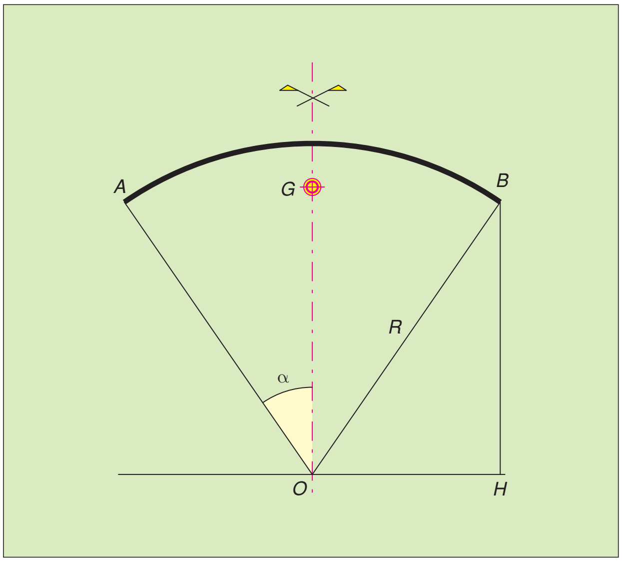


FIGURA 7 Arco di circonferenza.

e quindi:

$$l\, y = p\, R$$

Sostituendo, si ottiene:

$$y_G = \frac{\sum_i l_i\, y_i}{\sum_i l_i} = \frac{\sum_i p_i\, R}{\sum_i l_i} = \frac{R\, \sum_i p_i}{\sum_i l_i} \tag{3}$$

dove $\sum_i p_i$ rappresenta il doppio della lunghezza del segmento OH e $\sum_i l_i$ la lunghezza totale della linea.

Arco di circonferenza

Un arco AB, avente raggio R e angolo al centro 2α (▶FIGURA 7), può essere considerato una poligonale regolare costituita da infiniti lati di lunghezza infinitamente piccola. Poiché la lunghezza dell'arco vale $2R\alpha$ e la lunghezza del segmento OH è pari a R sen α si ha, sostituendo nell'espressione (3):

$$y_G = \frac{R \cdot 2R\,\text{sen}\,\alpha}{2R\alpha} = \frac{R\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha} \tag{4}$$

Nel caso della semicirconferenza, essendo:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$$

si ha:

$$y_G = \frac{R\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha} = \frac{R\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} R = 0{,}636\, R \tag{5}$$