3. Inerzia dei sistemi continui

UNITÀ E2

Inerzia di sezioni elementari

Particolarmente significativi sono i momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici o ad assi che contengono un lato della figura.

• Rettangolo

Si determinino i momenti d'inerzia del rettangolo (▶FIGURA 1):

1) rispetto all'asse x sul quale è distesa la base;
2) rispetto all'asse baricentrico x_G;
3) rispetto all'asse y sul quale è distesa l'altezza;
4) rispetto all'asse baricentrico y_G.

1) Si immagini di suddividere il rettangolo in infinite strisce parallele all'asse x, aventi area $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$ (▶FIGURA 1*a*). Applicando la (6) e integrando tra 0 e h si ha:

$$I_x = \int_0^h y^2\,\mathrm{d}A = \int_0^h y^2\,b\,\mathrm{d}y = b\int_0^h y^2\,\mathrm{d}y = \frac{bh^3}{3}$$

2) Il momento I_{xG} può essere ricavato dal momento ormai noto I_x mediante il teorema di trasposizione (7). Dall'espressione $I_x = I_{xG} + A\,d^2$ si ha:

$$I_{xG} = I_x - A\,d^2$$

Essendo:

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad A = bh \qquad d = \frac{h}{2}$$

si ottiene:

$$I_{xG} = \frac{bh^3}{3} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

3) In modo del tutto analogo (▶FIGURA 1*b*), suddividendo il rettangolo in infinite strisce parallele all'asse y, aventi area $\mathrm{d}A = h\,\mathrm{d}x$ e integrando tra 0 e b, si ha:

$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

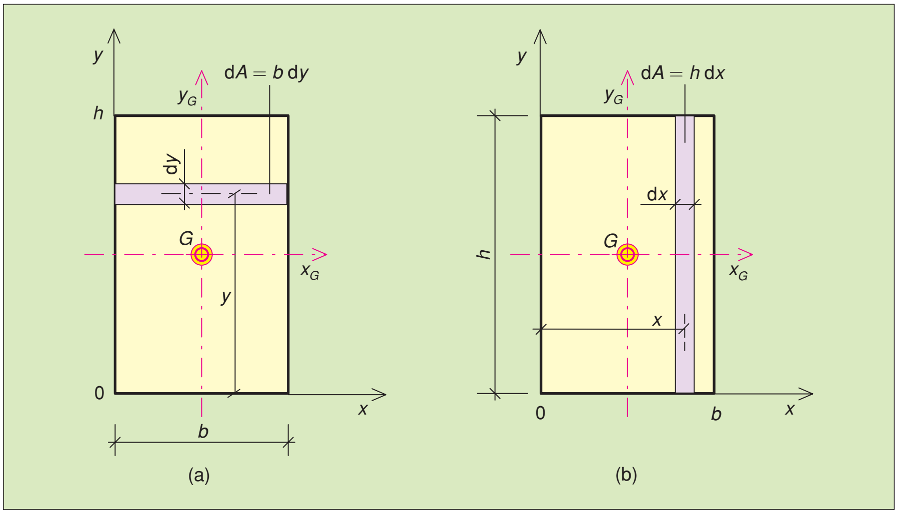

FIGURA 1 Momenti d'inerzia del rettangolo.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna [5929]
Questo file è una estensione online del corso Zavanella, Leti, Veggetti, *Progettazione, costruzioni e impianti*

4) Applicando il teorema di trasposizione ($d = b/2$) si ha:

$$I_{y_G} = I_y - A\ d^2 = \frac{hb^3}{12}$$

Riassumendo, i momenti d'inerzia del rettangolo rispetto alla base b e all'altezza h valgono:

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

mentre i momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici x_G e y_G sono:

$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{y_G} = \frac{hb^3}{12}$$

Cerchio

Si vogliono calcolare:

1) il momento d'inerzia polare I_G rispetto al centro;
2) il momento d'inerzia assiale I_d rispetto a un qualsiasi diametro;
3) il momento d'inerzia assiale I_t rispetto a una qualsiasi tangente.

1) Suddiviso il cerchio in corone circolari di area infinitesima $\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$ (▶FIGURA 2), il momento polare si determina integrando la (6) tra 0 e R:

$$I_G = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}A = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

2) Il momento rispetto a un qualsiasi diametro d può essere ricavato scrivendo la (3) per una qualsiasi coppia di diametri d_1 e d_2 fra loro ortogonali:

$$I_G = I_{d_1} + I_{d_2}$$

Si noti che, per la simmetria del cerchio rispetto a tutti i suoi infiniti diametri, si ha sempre $I_{d_1} = I_{d_2}$ e quindi $I_G = 2I_d$, ossia:

$$\frac{\pi R^4}{2} = 2I_d$$

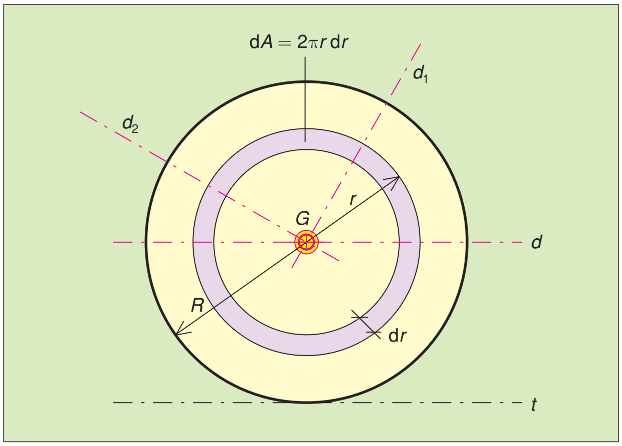

FIGURA 2 Momenti d'inerzia del cerchio.

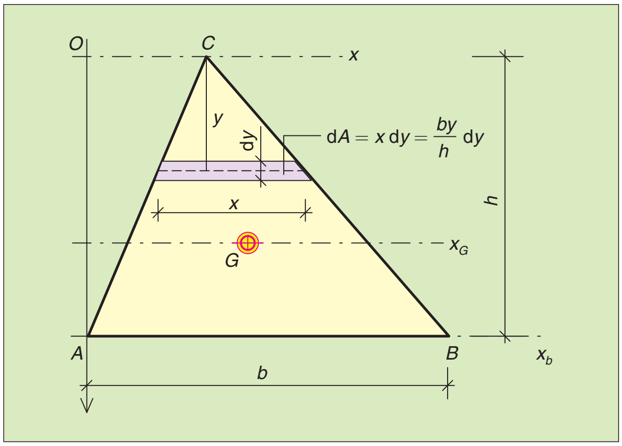

FIGURA 3 Momenti d'inerzia del triangolo rispetto ad assi paralleli alla base.

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna [5929]
Questo file è una estensione online del corso Zavanella, Leti, Veggetti, *Progettazione, costruzioni e impianti*

da cui segue:

$$I_d = \frac{\pi R^4}{4}$$

3) Per calcolare il momento d'inerzia del cerchio rispetto a una qualsiasi tangente t, basta applicare il teorema di trasposizione (7) al momento d'inerzia baricentrico I_d. Si ha:

$$I_t = I_d + A\ R^2 = \frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 \cdot R^2$$

da cui:

$$I_t = \frac{5}{4} \cdot \pi R^4$$

Triangolo

Si vogliono calcolare i momenti d'inerzia del triangolo rispetto agli assi x, x_G, x_b tra loro paralleli (▶FIGURA 3).

1) Suddiviso il triangolo nelle infinite strisce di area infinitesima (▶1)

$$\mathrm{d}A = x\ \mathrm{d}y = \frac{b}{h} y\ \mathrm{d}y$$

e integrando la (6) tra 0 e h si ha:

$$I_x = \int_0^h y^2\ \mathrm{d}A = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} y\ \mathrm{d}y = \frac{b}{h}\int_0^h y^3\ \mathrm{d}y = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{bh^3}{4}$$

I momenti d'inerzia I_{x_G} e I_{x_b} si possono determinare applicando il teorema di trasposizione (7).

2) Momento d'inerzia rispetto all'asse x_G:

$$I_{x_G} = I_x - Ad^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2}\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{2}{9}bh^3$$

$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{36}$$

3) Momento d'inerzia rispetto all'asse x_b:

$$I_{x_b} = I_{x_G} + Ad^2 = \frac{bh^3}{36} = \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh^3}{18}$$

$$I_{x_b} = \frac{bh^3}{12}$$

▶1 Per la similitudine tra i due triangoli di vertice C si ha, infatti:

$$b : x = h : y$$

ossia:

$$x = \frac{b}{h} y$$

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna [5929]
Questo file è una estensione online del corso Zavanella, Leti, Veggetti, *Progettazione, costruzioni e impianti*