5. Esercizi di riepilogo

UNITÀ E2

Ulteriori esercizi

1 Della *trave di gronda* di ▶FIGURA 1 si vogliono calcolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici x_G, y_G e, successivamente, rispetto agli assi x, y che contengono due lati della sezione.

Le coordinate del baricentro, già note (unità E1, paragrafo 5), sono:

$$x_G = 42{,}9 \text{ cm} \qquad y_G = 25{,}2 \text{ cm}$$

Anche se la sezione è quotata in *centimetri*, come si usa nei disegni del cemento armato, si preferisce eseguire i calcoli in *decimetri* per non avere a che fare con numeri troppo grandi.

Gli assi x_G e y_G non sono caratteristici per nessuno dei tre rettangoli 1, 2, 3, ma sono paralleli agli assi orizzontali e verticali che passano per i baricentri G_1, G_2, G_3. È quindi possibile trasporre agli assi x_G e y_G i momenti d'inerzia dei tre rettangoli calcolati rispetto ai propri assi baricentrici e noti per le (10). Tenendo conto dei dati delle sezioni elementari, si hanno i risultati della ▶TABELLA 1.

TABELLA 1

Sezioni elementari	Aree (dm^2)	Coordinate del baricentro (x; y) (dm)
1	1,5 · 4,5 = 6,75	(0,75; 2,25)
2	4,5 · 1,5 = 6,75	(3,75; 0,75)
3	1,5 · 7,5 = 11,25	(6,75; 3,75)
Sezione composta	24,75	(4,29; 2,52)

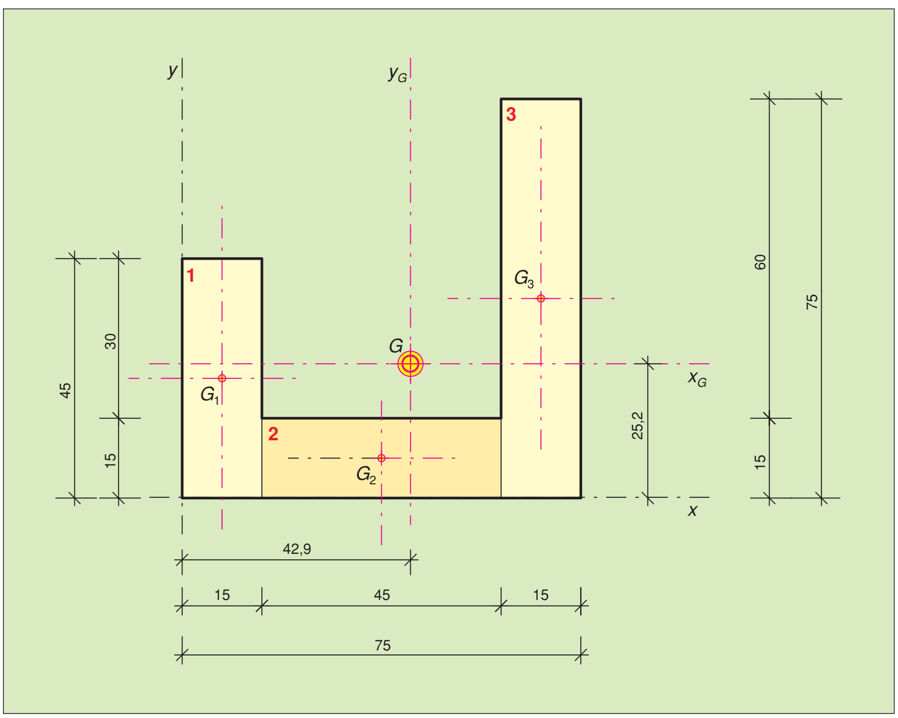

FIGURA 1 Inerzia di una sezione composta.

- **Calcolo di I_{x_G}**

I momenti d'inerzia delle sezioni semplici rispetto all'asse x_G valgono:

$$I_{x_G}(1) = \frac{1{,}5 \cdot 4{,}5^3}{12} + 6{,}75(2{,}52 - 2{,}25)^2 = 11{,}88 \text{ dm}^4$$

$$I_{x_G}(2) = \frac{4{,}5 \cdot 1{,}5^3}{12} + 6{,}75(2{,}52 - 0{,}75)^2 = 22{,}41 \text{ dm}^4$$

$$I_{x_G}(3) = \frac{1{,}5 \cdot 7{,}5^3}{12} + 11{,}25(2{,}52 - 3{,}75)^2 = 69{,}75 \text{ dm}^4$$

Il momento d'inerzia della sezione composta è:

$$I_{x_G}(\text{tot}) = \sum I_{x_G} = 104{,}04 \text{ dm}^4$$

- **Calcolo di I_{y_G}**

I momenti d'inerzia delle sezioni semplici valgono:

$$I_{y_G}(1) = \frac{4{,}5 \cdot 1{,}5^3}{12} + 6{,}75(4{,}29 - 0{,}75)^2 = 85{,}85 \text{ dm}^4$$

$$I_{y_G}(2) = \frac{1{,}5 \cdot 4{,}5^3}{12} + 6{,}75(4{,}29 - 3{,}75)^2 = 13{,}36 \text{ dm}^4$$

$$I_{y_G}(3) = \frac{7{,}5 \cdot 1{,}5^3}{12} + 11{,}25(4{,}29 - 6{,}75)^2 = 70{,}19 \text{ dm}^4$$

Il momento d'inerzia della sezione composta è:

$$I_{y_G}(\text{tot}) = \sum I_{y_G} = 169{,}40 \text{ dm}^4$$

- **Calcolo di I_x**

I tre rettangoli 1, 2, 3 hanno, tutti, base coincidente con l'asse di calcolo x. Rispetto a tale asse il momento d'inerzia è noto dalla ▶FIGURA 8:

$$I_x = \frac{b\,h^3}{3}$$

Si ha quindi, per le sezioni elementari:

$$I_x(1) = \frac{1{,}5 \cdot 4{,}5^3}{3} = 45{,}56 \text{ dm}^4$$

$$I_x(2) = \frac{4{,}5 \cdot 1{,}5^3}{3} = 5{,}06 \text{ dm}^4$$

$$I_x(3) = \frac{1{,}5 \cdot 7{,}5^3}{3} = 210{,}93 \text{ dm}^4$$

e, per la sezione composta:

$$I_x(\text{tot}) = \sum I_x = 261{,}55 \text{ dm}^4$$

- **Calcolo di I_y**

L'asse y è asse caratteristico per il rettangolo 1. Di conseguenza, $I_y(1)$ può essere ricavato direttamente dalla ▶FIGURA 8:

$$I_y(1) = \frac{h\,b^3}{3}$$

Per i rettangoli 2 e 3 è necessario, invece, trasporre rispetto all'asse y i momenti baricentrici $h\,b^3/12$. Si ha quindi, per le sezioni elementari:

$$I_y(1) = \frac{4{,}5 \cdot 1{,}5^3}{3} = 5{,}06 \text{ dm}^4$$

$$I_y(2) = \frac{1{,}5 \cdot 4{,}5^3}{12} + 6{,}75 \cdot 3{,}75^2 = 106{,}31 \text{ dm}^4$$

$$I_y(3) = \frac{7{,}5 \cdot 1{,}5^3}{12} + 11{,}25 \cdot 6{,}75^2 = 514{,}69 \text{ dm}^4$$

e, per la sezione composta:

$$I_y(\text{tot}) = \Sigma I_y = 626{,}06 \text{ dm}^4$$

I momenti d'inerzia $I_x(\text{tot})$ e $I_y(\text{tot})$ possono essere ricavati anche trasponendo agli assi x e y i momenti d'inerzia $I_{xG}(\text{tot})$ e $I_{yG}(\text{tot})$ già calcolati rispetto agli assi baricentrici. Si ha:

$$I_x(\text{tot}) = I_{xG} + A(\text{tot})\, d_x^2 \qquad I_y(\text{tot}) = I_{yG} + A(\text{tot})\, d_y^2$$

dove d_x e d_y (distanze tra gli assi x_G e x, y_G e y) equivalgono alle coordinate del baricentro G. Si ha:

$$I_x(\text{tot}) = 104{,}04 + 24{,}75 \cdot 2{,}52^2 = 261{,}21 \text{ dm}^4$$

$$I_y(\text{tot}) = 169{,}40 + 24{,}75 \cdot 4{,}29^2 = 624{,}90 \text{ dm}^4$$

Le lievi differenze nei risultati sono dovute alle approssimazioni di calcolo.

2 **Tracciare l'ellisse centrale d'inerzia della sezione composta da due angolari a lati uguali L 60 × 10, disposti *di spigolo* (▶FIGURA 2).**

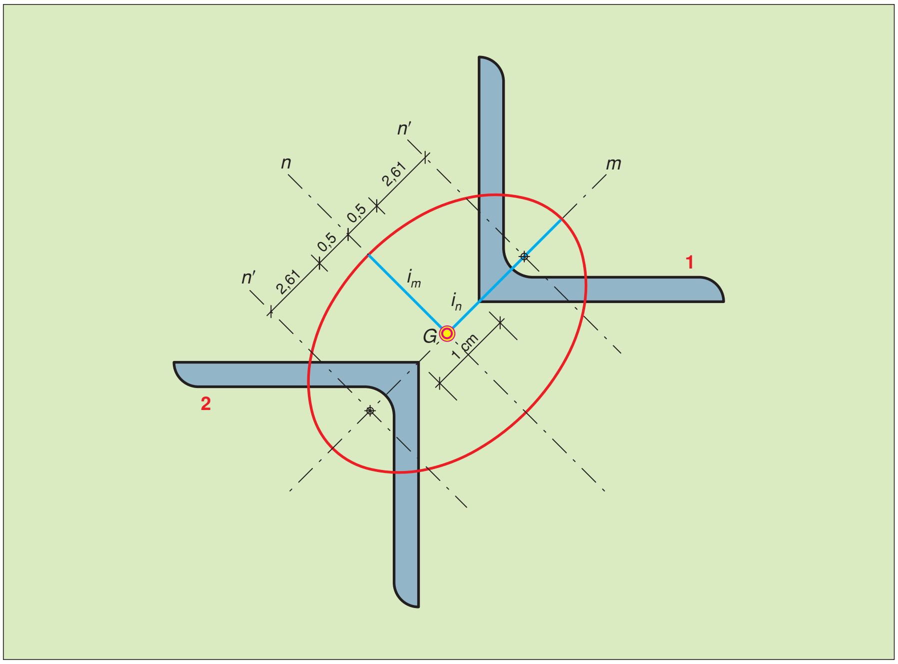

FIGURA 2 Ellisse centrale d'inerzia di sezione composta da due profilati tipo L.

Si segue il procedimento indicato nel paragrafo 4.

a) *Determinazione degli assi principali d'inerzia.* Gli assi principali d'inerzia coincidono con gli assi di simmetria m ed n.

b) *Calcolo dei momenti principali d'inerzia.* L'area e le coordinate del baricentro delle sezioni elementari (profilati tipo L) si leggono direttamente nella tabella Acc4 (*Prontuario*) e sono riportate nella ▶TABELLA 2.

TABELLA 2

Sezioni elementari	Aree (cm^2)	Coordinate del baricentro (m; n) (cm)
1	11,1	(3,11; 0)
2	11,1	(−3,11; 0)
Sezione composta	22,2	(0; 0)

Essendo m asse caratteristico sia dell'intera sezione sia delle sezioni 1 e 2, il valore di $I_m(1) = I_m(2)$ delle sezioni elementari si legge direttamente nella tabella Acc4. Si ha:

$$I_m(1) = I_m(2) = 55{,}1 \text{ cm}^4$$

e quindi, per la sezione composta:

$$I_m(\text{tot}) = \sum I_m = 2 \cdot 55{,}1 = 110{,}2 \text{ cm}^4$$

L'asse n, invece, non è asse caratteristico delle due sezioni elementari, ma è parallelo all'asse n', di queste baricentrico e caratteristico. Di conseguenza, i due momenti baricentrici $I_{n'} = 14{,}8$ cm^4 letti nella tabella Acc4 possono essere trasposti all'asse n. Si ha:

$$I_n = 14{,}8 + 11{,}1 \cdot 3{,}11^2 = 122{,}16 \text{ cm}^4$$

e quindi:

$$I_n(\text{tot}) = \sum I_n = 2I_n = 2 \cdot 122{,}16 = 244{,}32 \text{ cm}^4$$

c) *Calcolo dei raggi principali d'inerzia.* Basta applicare la (8). Si ha:

$$i_m = \sqrt{\frac{I_m}{A(\text{tot})}} = \sqrt{\frac{110{,}2}{2 \cdot 11{,}1}} = 2{,}23 \text{ cm} \qquad i_n = \sqrt{\frac{I_n}{A(\text{tot})}} = \sqrt{\frac{244{,}32}{2 \cdot 11{,}1}} = 3{,}32 \text{ cm}$$

d) *Tracciamento dell'ellisse*: i_m, che va disteso sull'asse n, e i_n, che viceversa va disteso sull'asse m, sono i semiassi dell'ellisse centrale d'inerzia.