

## 6. Esercizi di riepilogo

I casi notevoli e gli esempi studiati nei paragrafi precedenti hanno messo in evidenza che i diagrammi delle azioni interne, pur essendo diversi caso per caso, seguono alcune regole generali.

Il *diagramma del taglio* presenta una discontinuità nelle sezioni in cui è applicato un carico concentrato  $P$ ; questo avviene sempre nelle sezioni di vincolo, dove agiscono le reazioni.

In queste sezioni  $V$  non ha valore univoco, ma varia bruscamente dal valore  $V_s$ , assunto nella sezione appartenente al tratto di sinistra, al valore  $V_d$ , assunto nel tratto di destra. Si ha:

$$|V_s| + |V_d| = P$$

Analogamente, il *diagramma del momento flettente* presenta una discontinuità nelle sezioni in cui è applicato un momento concentrato  $M$ , come avviene sempre nelle sezioni di incastro.

In questi casi  $M$  non ha valore univoco, ma varia bruscamente dal valore  $M_s$ , assunto nel tratto di sinistra, al valore  $M_d$ , assunto nel tratto di destra. Si ha:

$$|M_s| + |M_d| = P$$

Negli elementi simmetrici il momento flettente rispetta la simmetria, mentre il taglio è *parasimmetrico*: nelle sezioni equidistanti dall'asse di simmetria ha uguale modulo, ma verso opposto.

Se i carichi sono verticali e rivolti verso il basso:

- nelle mensole
  - $V$  e  $M$  sono entrambi massimi nella sezione di incastro,
  - $M$  è sempre negativo (sono tese le fibre superiori);
- nelle travi appoggiate
  - $V$  è massimo sugli appoggi,
  - $M$  è massimo in campata,
  - $M$  è sempre positivo (sono tese le fibre inferiori).

Si traccino ora i diagrammi delle azioni interne degli elementi strutturali assegnati.

Per analizzare l'andamento di  $N$ ,  $V$  e  $M$  in ogni tratto significativo è conveniente fare coincidere ogni volta l'origine dell'asse  $z$  con il primo estremo del tratto stesso.

**1** Trave ad asse orizzontale, simmetricamente caricata da forze concentrate (► FIGURA 1).

Il calcolo delle reazioni è immediato per la simmetria della trave. Si ha:

$$Y_A = Y_B = 3P/2 = 1,5P$$

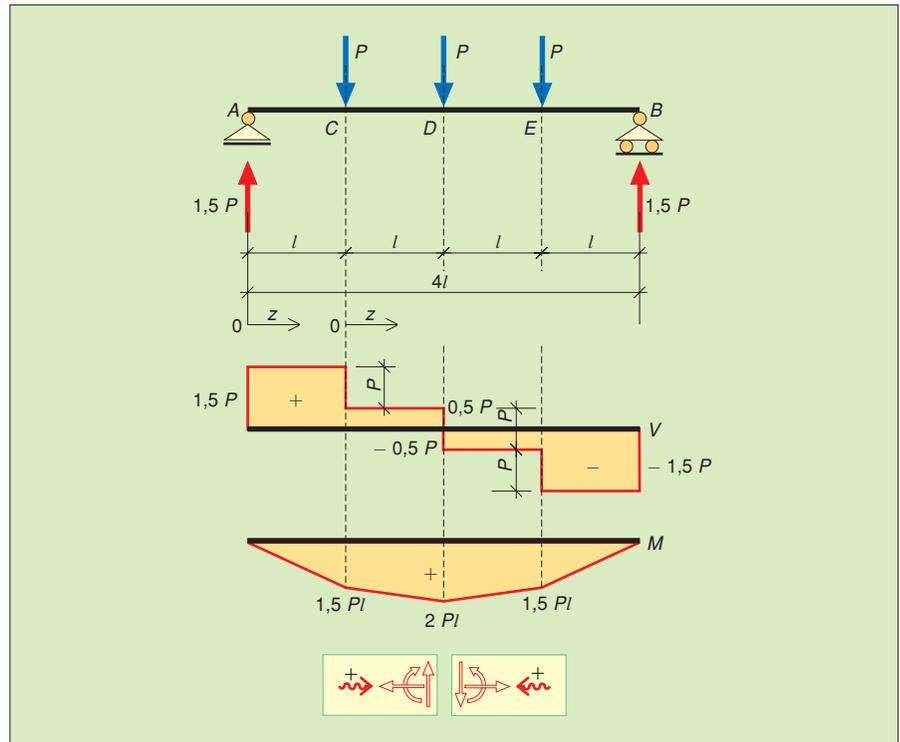
Per l'assenza di forze parallele all'asse  $z$ , lo sforzo normale è nullo su tutta la trave.

*Tratto AC:*

- $V_z = \sum_p Y = +1,5P$
- $M_z = \sum_p M = +1,5P \cdot z$
- $V_A = +1,5P$
- $M_A = +1,5P \cdot 0 = 0$
- $V_C = +1,5P$
- $M_C = +1,5Pl$



**FIGURA 1** Trave simmetrica: carichi concentrati.



Tratto CD:

$$\begin{aligned}
 \bullet V_Z &= \sum_p Y = +1,5P - P = +0,5P & \bullet M_Z &= \sum_p M = +1,5P(z+l) - P \cdot z \\
 V_C &= +0,5P & M_C &= +1,5P(0+l) - P \cdot 0 = +1,5Pl \\
 V_D &= +0,5P & M_D &= +1,5P(l+l) - P \cdot l = 2Pl
 \end{aligned}$$

• Sezione D ( $z = 2l$ ):

$$T_D = +1,5P \quad M_D = +3Pl - Pl = +2Pl$$

Il calcolo delle azioni interne nei tratti DE, EB può essere omesso vista la simmetria della trave.

**2** Trave ad asse orizzontale, simmetricamente caricata da forze distribuite (► FIGURA 2).

Il calcolo delle reazioni è immediato per la simmetria della trave. Si ha:

$$Y_A = Y_B = 4 \cdot 1,2 + 2 \cdot 2 = 8,80 \text{ kN}$$

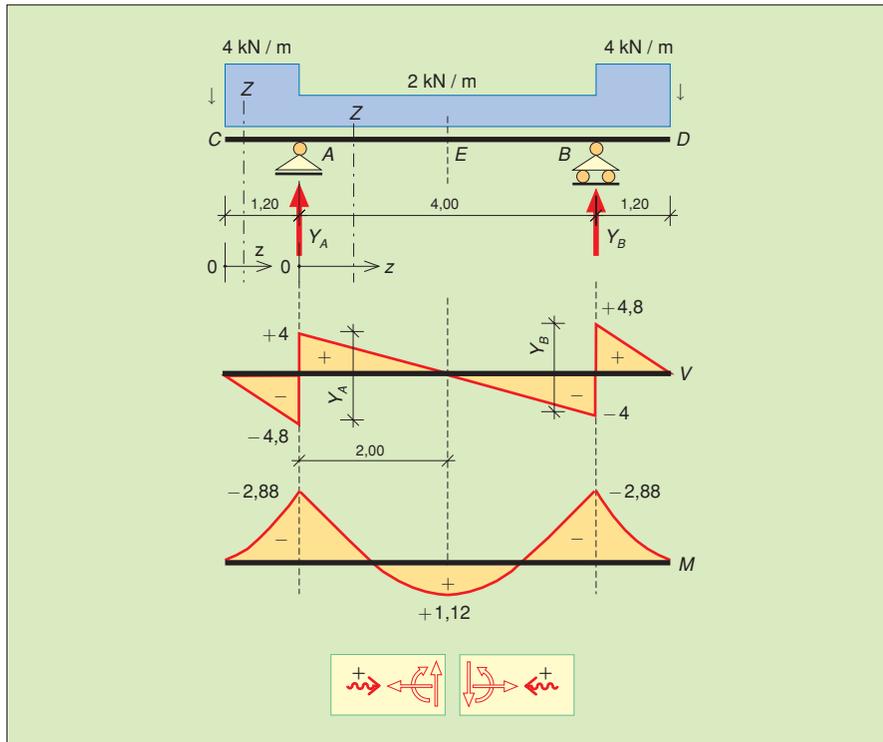
Per l'assenza di forze parallele all'asse z, lo sforzo normale è nullo su tutta la trave.

Tratto CA:

$$\begin{aligned}
 \bullet V_Z &= \sum_p Y = -4z & \bullet M_Z &= \sum_p M = -4z \cdot z/2 = -2z^2 \\
 V_C &= -4 \cdot 0 = 0 & M_C &= -2 \cdot 0^2 = 0 \\
 V_A &= -4 \cdot 1,20 = -4,80 \text{ kN} & M_A &= -2 \cdot 1,2^2 = -2,88 \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Tratto AB:

$$\begin{aligned}
 \bullet V_Z &= \sum_p Y = -4 \cdot 1,20 + 8,80 - 2z = +4 - 2z \\
 V_A &= +4 - 2 \cdot 0 = +4 \text{ kN} \\
 V_B &= +4 - 2 \cdot 4 = -4 \text{ kN}
 \end{aligned}$$



**FIGURA 2** Trave simmetrica: carichi distribuiti.

Poiché in questo tratto il taglio passa da un valore positivo a un valore negativo, si deve determinare l'ascissa  $z_0$  della sezione di taglio nullo; qui andrà poi calcolato il momento flettente, che assumerà il valore di massimo relativo. In questo caso, per la simmetria della trave, la sezione cercata è quella di mezzeria ( $z_0 = 2,00$  m).

$$\bullet M_Z = \sum_p M = -4 \cdot 1,20 (0,60 + z) + 8,80 \cdot z - 2 \cdot \frac{z^2}{2} = -z^2 + 4z - 2,88$$

$$M_A = -2,88 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = -4^2 + 4 \cdot 4 - 2,88 = -2,88 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M(z_0) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 2,88 = +1,12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Nel tratto  $BD$  il diagramma del taglio è para-simmetrico e il diagramma del momento è simmetrico rispetto al tratto  $CA$ .

Può anche essere interessante conoscere le ascisse  $z_1$  e  $z_2$  in cui il momento si annulla. Esse sono le soluzioni dell'equazione  $M_Z = 0$ , ossia:

$$z^2 - 4z + 2,88 = 0$$

Dalla espressione risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$z = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

risulta  $z_1 = 0,94$  m e  $z_2 = 3,06$  m.

### 3 Trave Gerber (► FIGURA 2).

Tratto  $DA$ :

$$\bullet V_Z = \sum_p Y = -1,5z$$

$$\bullet M_Z = \sum_p M = -1,5z \cdot \frac{z}{2} = -0,75z^2$$

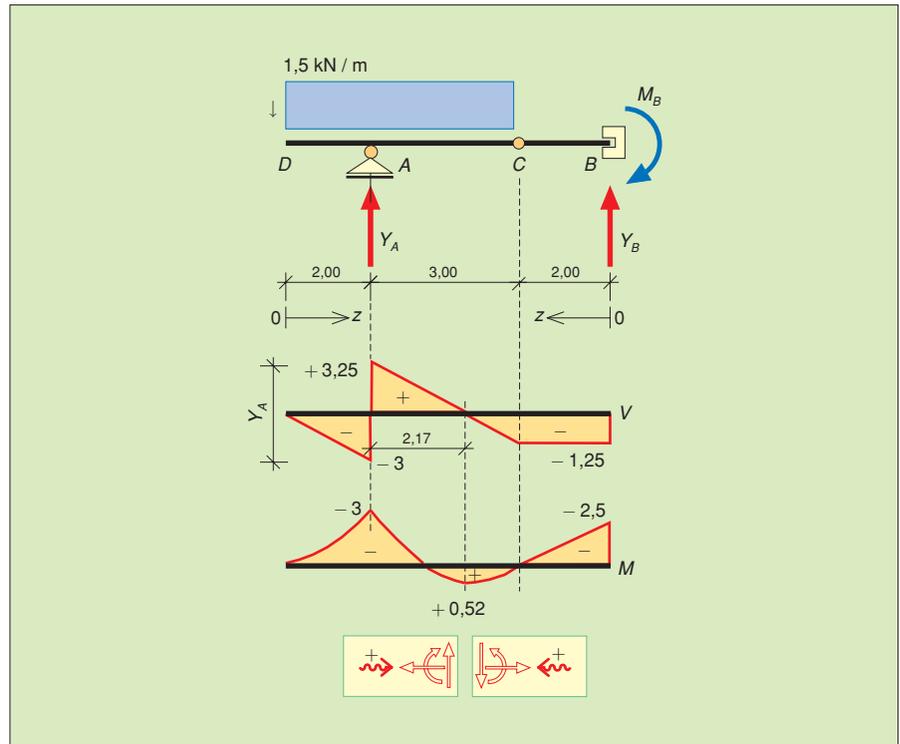
$$V_D = 0$$

$$M_D = 0$$

$$V_A = -1,5 \cdot 2 = -3,00 \text{ kN}$$

$$M_A = -0,75 \cdot 2^2 = -3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

FIGURA 3 Trave Gerber.



Tratto AC:

- $V_Z = \sum_p Y = -1,5 \cdot 2 + 6,25 - 1,5z = +3,25 - 1,5z$
- $V_A = +3,25 - 1,5 \cdot 0 = +3,25 \text{ kN}$
- $V_C = +3,25 - 1,5 \cdot 3 = -1,25 \text{ kN}$

Poiché in questo tratto il taglio passa da un valore positivo a un valore negativo, si deve determinare l'ascissa  $z_0$  della sezione di taglio nullo. In tale sezione andrà poi calcolato il momento flettente, che assumerà il valore di massimo relativo. Si ha:

$$V_Z = 0 \rightarrow +3,25 - 1,5z = 0 \rightarrow z_0 = 2,17 \text{ m}$$

- $M_Z = \sum_p M = -1,5 (2 + z)^2 \cdot \frac{1}{2} + 6,25z = -0,75 (4 + z^2 + 4z) + 6,25z = -0,75z^2 + 3,25z - 3$
- $M_A = -0,75 \cdot 0 + 3,25 \cdot 0 - 3 = -3 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- $M_C = -0,75 \cdot 3^2 + 3,25 \cdot 3 - 3 = 0$
- $M(z_0) = -0,75 \cdot 2,17^2 + 3,25 \cdot 2,17 - 3 = -0,52 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Tratto BC:

- $V_Z = \sum_s Y = -1,25 + 6,25 - 1,5z = +3,25 - 1,5z$
- $V_B = -1,25 \text{ kN}$
- $V_C = -1,25 \text{ kN}$
- $M_Z = \sum_s M = -2,5 + 1,25z$
- $M_B = -2,5 + 1,25 \cdot 0 = -2,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$
- $M_C = -2,5 + 1,25 \cdot 2 = 0$

Il valore nullo di  $M_C$  era prevedibile perché tipico delle cerniere interne, dove la rotazione è perfettamente consentita.

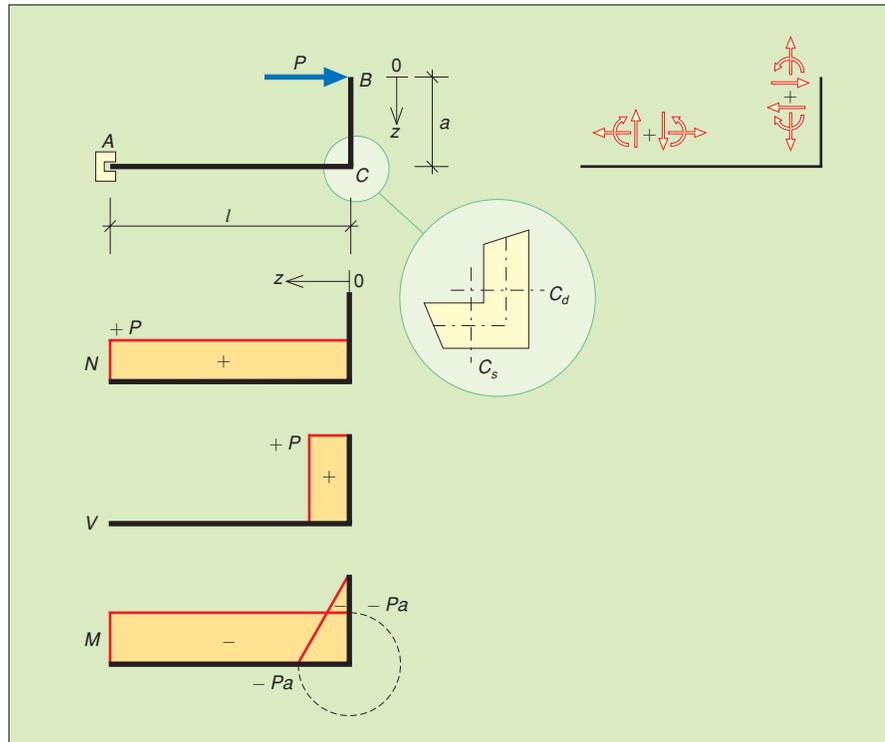


FIGURA 4 Trave ad asse spezzato.

#### 4 Mensola ad asse spezzato (► FIGURA 4).

La risoluzione degli elementi ad asse spezzato non comporta particolari difficoltà: basta considerare gli spigoli come sezioni significative. Nei tratti non orizzontali l'asse  $z$  deve comunque coincidere con l'asse strutturale; la convenzione sui segni delle azioni interne non cambia se si immagina di *raddrizzare* l'elemento secondo l'asse orizzontale.

Tratto BC:

$$\begin{aligned}
 \bullet N_Z = \sum_s Z &= 0 & \bullet V_Z = \sum_s Y &= +P & \bullet M_Z = \sum_s M &= -Pz \\
 N_B = N_C &= 0 & V_B = V_A &= +P & M_B &= -P \cdot 0 = 0 \\
 & & & & M_C &= -P \cdot a
 \end{aligned}$$

Tratto CA:

$$\begin{aligned}
 \bullet N_Z = \sum_s Z &= +P & \bullet V_Z = \sum_s Y &= 0 & \bullet M_Z &= -P \cdot a \\
 N_C = N_A &= +P & V_C = V_A &= 0 & M_C = M_A &= -P \cdot a
 \end{aligned}$$

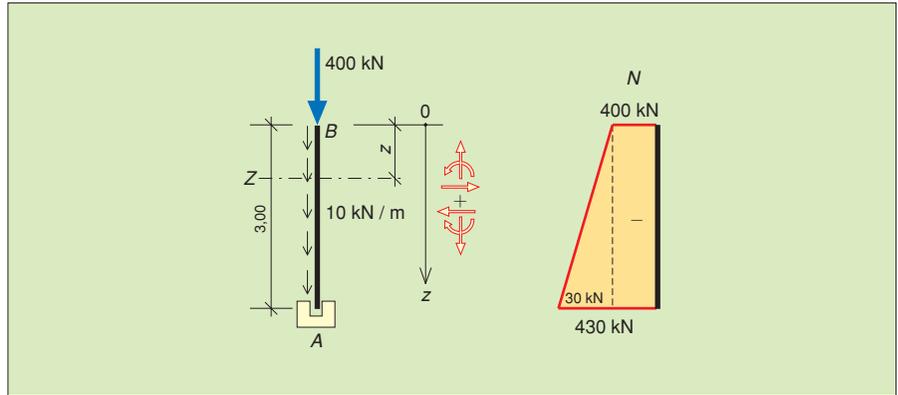
#### 5 Pilastro con carico concentrato (► FIGURA 5).

Se si trascura il peso proprio l'elemento risulta sollecitato dallo sforzo normale uniforme di compressione  $N = -400$  kN. Se, invece, si vuole tenere conto anche del peso proprio (10 kN/m) il pilastro risulta ancora soggetto a solo sforzo normale, che però varia linearmente da un valore minimo in sommità a un valore massimo al piede. Procedendo dall'alto, si ha:

$$\begin{aligned}
 N_Z = \sum_s Z &= -400 - 10z \\
 N_B &= -400 - 10 \cdot 0 = -400 \text{ kN} \\
 N_A &= -400 - 10 \cdot 3 = -430 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

6. ESERCIZI DI RIEPILOGO

**FIGURA 5** Pilastro soggetto a solo sforzo normale.



**6** Pilastro con carico concentrato e carico distribuito perpendicolare all'asse (► FIGURA 6).

Trascurando il peso proprio e procedendo dall'alto, si ha:

$$\begin{aligned}
 \bullet N_Z = \sum_s Z = -400 & \quad \bullet V_Z = \sum_s Y = +10 \cdot z & \quad \bullet M_Z = \sum_s M = -10z \cdot \frac{z}{2} = -10 \frac{z^2}{2} \\
 N_B = N_A = -400 \text{ kN} & \quad V_B = +10 \cdot 0 = 0 & \quad M_B = 0 \\
 & \quad V_A = +10 \cdot 3 = +30 \text{ kN} & \quad M_A = -10 \cdot \frac{3}{2} = -45 \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

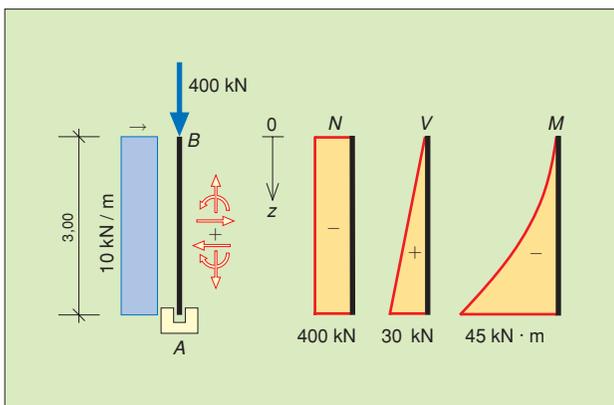
**7** Trave soggetta a momento torcente uniforme (► FIGURA 7).

Se il piano dei carichi non contiene l'asse della trave, si ha anche momento torcente. In questo caso occorre tracciare anche il relativo diagramma.

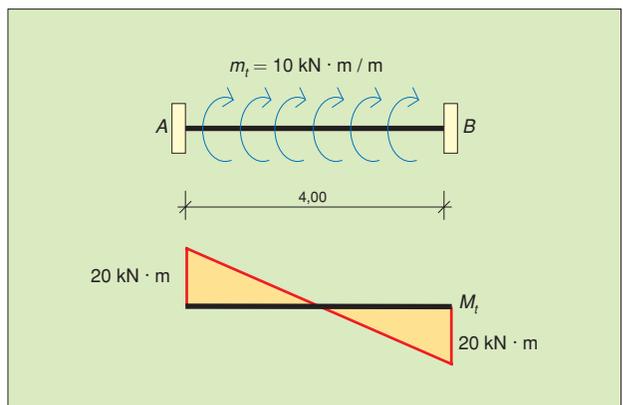
I vincoli di estremità siano due generici ritegni antitorzionali, cioè capaci di opporsi a rotazioni attorno all'asse della trave reagendo – ognuno – con una coppia torcente concentrata:

$$M_{tA} = M_{tB} = 10 \cdot \frac{4}{2} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Il diagramma del momento torcente si costruisce con criteri analoghi a quelli del diagramma del taglio di una trave appoggiata soggetta a carico uniformemente distribuito.



**FIGURA 6** Pilastro soggetto a sforzo normale, taglio e momento flettente.



**FIGURA 7** Trave simmetrica soggetta a momento torcente uniformemente distribuito.