6. Metodo cinematico

UNITÀ 11

Per calcolare le deformazioni in una sezione generica la Scienza delle costruzioni propone diversi metodi. Uno di questi, il **metodo cinematico**, si basa sulla composizione dei movimenti. Particolarmente intuitivo e di semplice impostazione, ha il vantaggio di potere essere esteso (con certi criteri) alle travi appoggiate, consentendo una metodologia di calcolo uniforme.

Per calcolare le deformazioni in un punto qualsiasi di una mensola, si può suddividere la trave in tratti elastici di lunghezza finita e di comportamento più semplice, e comporre poi i movimenti.

Facendo riferimento alla mensola di ▶FIGURA 1*a*, si supponga di volere determinare l'abbassamento della sezione *C*. Conviene iniziare considerando elastico il tratto di trave più vicino all'incastro (tratto *AD*), mentre rimane rigida la restante parte *DB* (▶FIGURA 1*b*). A questo punto, si possono calcolare le deformazioni φ_D e δ_D della sezione *D*, sostituendo il tratto *DB* con la sollecitazione, ovvero applicando alla sezione *D* le azioni interne V_D e M_D. Si ha (forze che precedono):

$$V_D = P_1 + P_2 + P_3$$

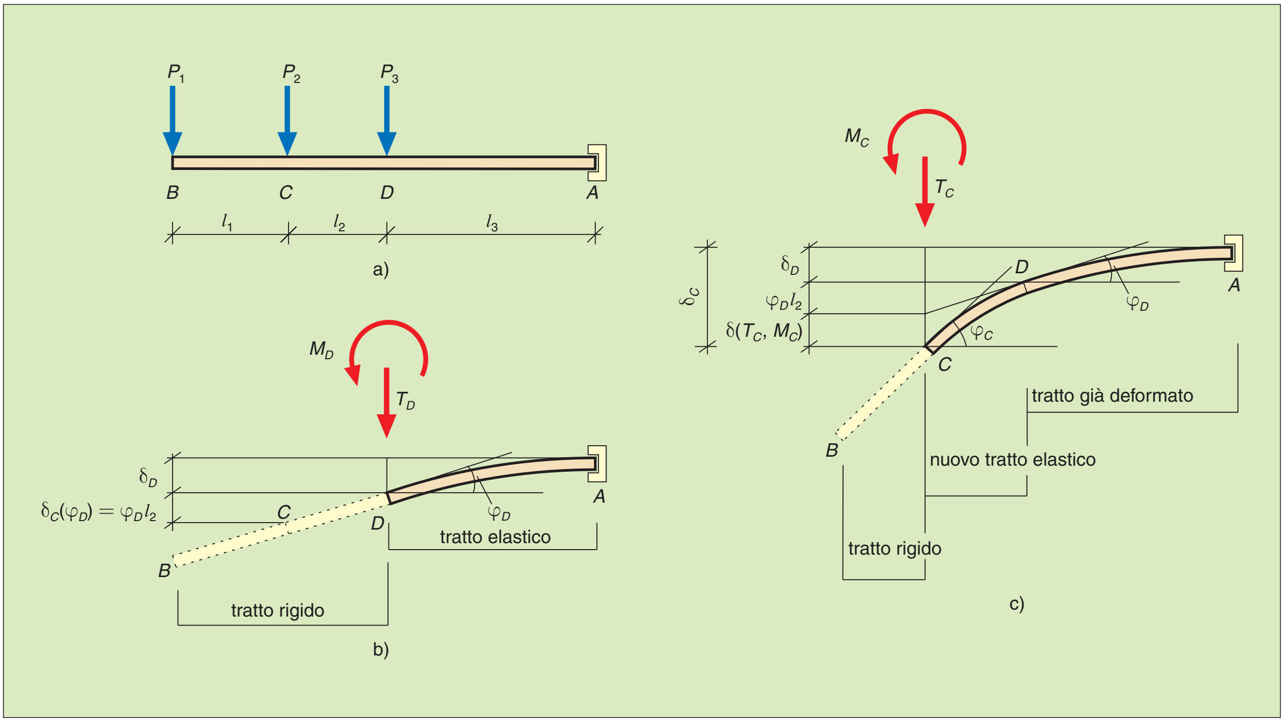
$$M_D = P_1(l_1 + l_2) + P_2 l_2$$

Utilizzando le espressioni della tabella CS1 e il PSE, si ha subito:

$$\varphi_D = \frac{V_D l_3^2}{2EI} + \frac{M_D l_3}{EI}$$

$$\delta_D = \frac{V_D l_3^3}{3EI} + \frac{M_D l_3^2}{2EI}$$

FIGURA 1 Composizione cinematica delle deformazioni.



In seguito alle deformazioni elastiche del tratto DA il tratto DB si muove rigidamente. Tutte le sue sezioni ruotano dello stesso angolo φ_D e si abbassano di una freccia tanto maggiore quanto maggiore è la distanza da D. In particolare, l'abbassamento della sezione C è dovuto a due contribuiti:

- l'abbassamento δ_D, identico a quello della sezione D;
- l'abbassamento dovuto alla rotazione rigida φ_D, che vale $\varphi_D \cdot l_2$.

L'abbassamento rigido della sezione C dovuto alle deformazioni elastiche del tratto DA è dunque:

$$\delta_D + \varphi_D \, l_2$$

Si consideri ora elastico anche il tratto DC. La freccia effettiva δ_C della sezione C (▶FIGURA 1c) risulta dalla **composizione cinematica** del precedente abbassamento rigido con l'abbassamento elastico $\delta\,(V_C, M_C)$, dovuto alle CS agenti sulla sezione C. Esso si calcola sostituendo nelle formule della tabella CS1 i valori $V_C = P_1 + P_2$ e $M_C = P_1 l_1$. Si ha:

$$\delta_C = \delta_D + \varphi_D l_2 + \delta\,(T_C, M_C)$$

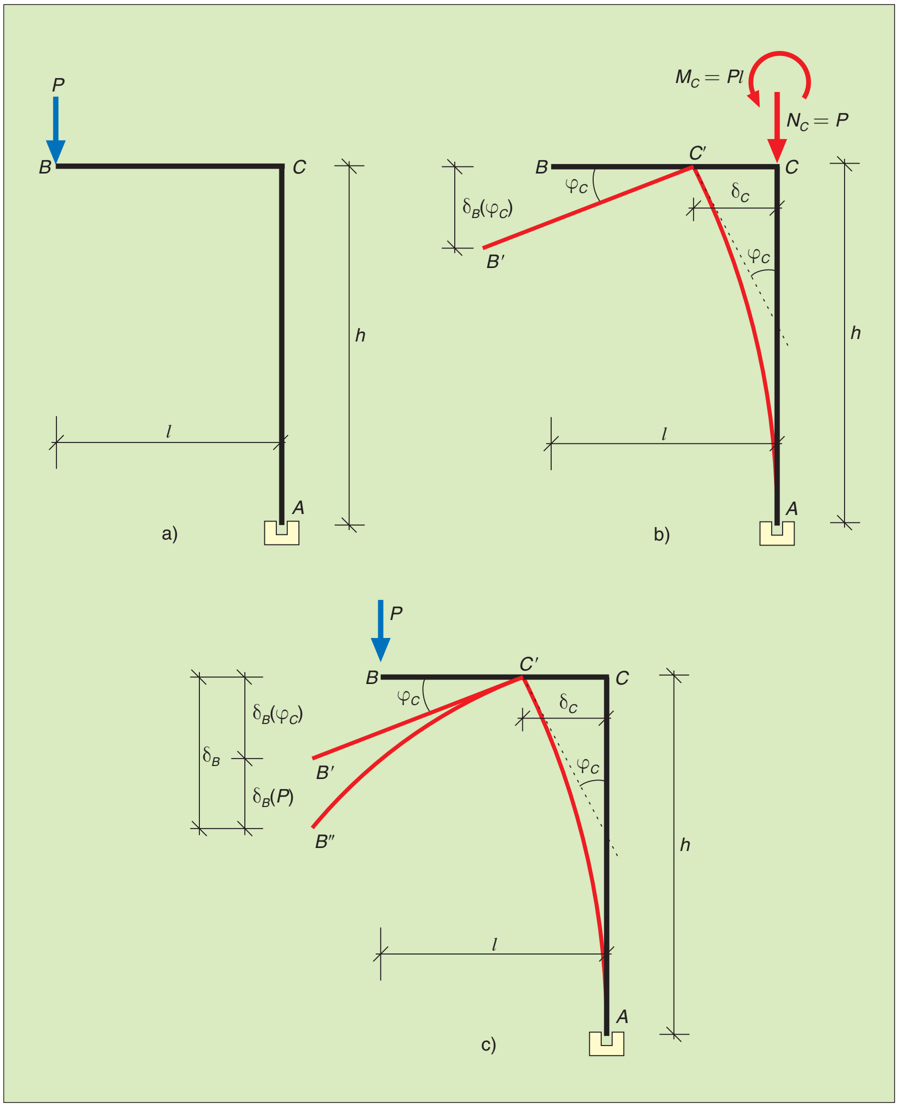


FIGURA 2 Mensola ad asse spezzato: calcolo dell'abbassamento dell'estremo libero.

APPLICAZIONE

Calcolare l'abbassamento della sezione B della mensola ad asse spezzato rappresentata nella ▶FIGURA 2a.

Si supponga dapprima elastico il solo tratto verticale *AC* (▶FIGURA 2*b*). La parte *BC*, che rimane rigida, trasmette le azioni interne $N_C = P$ e $M_C = Pl$.
Trascurando gli effetti dello sforzo normale, il momento flettente causa nella sezione *C* una rotazione e uno spostamento elastici. Si ha (tab. CS1):

$$\varphi_C = \frac{M_C h}{EI} = \frac{Plh}{EI} \qquad \text{sinistrogira}$$

$$\delta_C = \frac{M_C h^2}{EI} = \frac{Plh^2}{EI} \qquad \text{verso sinistra}$$

In seguito ai movimenti elastici della sezione *C* la sezione *B* ruota rigidamente dell'angolo φ_C portandosi nella posizione *B′*. L'abbassamento rigido $\delta_B(\varphi_C)$ vale:

$$\varphi_C \cdot l = \frac{Pl^2 h}{EI}$$

Rendendo elastico anche il secondo tratto *BC* (▶FIGURA 2*c*) si ha la freccia elastica dovuta al carico *P* e, componendo l'abbassamento rigido con l'abbassamento elastico, si ottiene la freccia cercata. Si ha:

$$\delta_C = \frac{Pl^2 h}{EI} + \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{Pl^2}{EI}\left(h + \frac{l}{3}\right)$$