

## 6. Archi



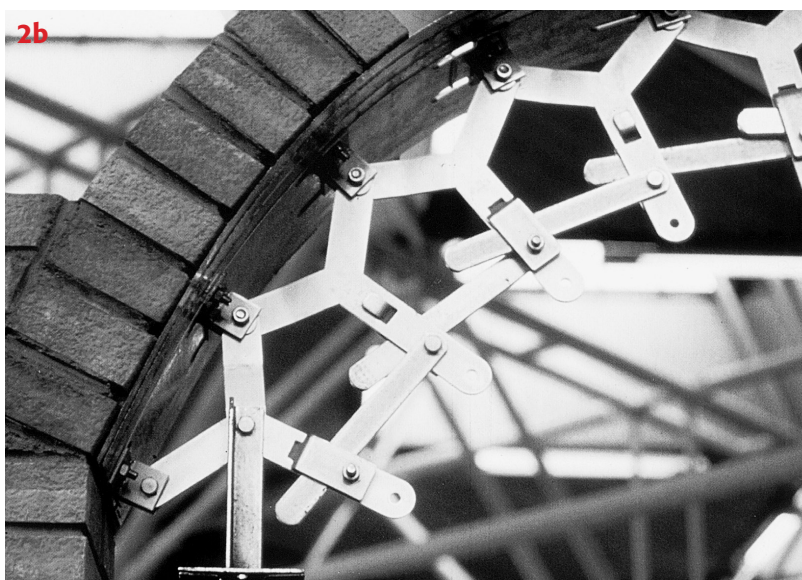
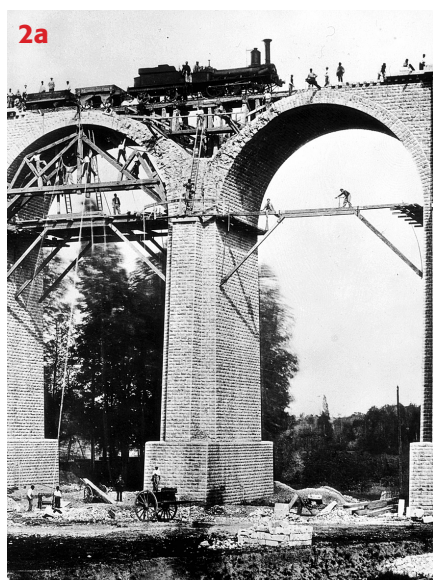
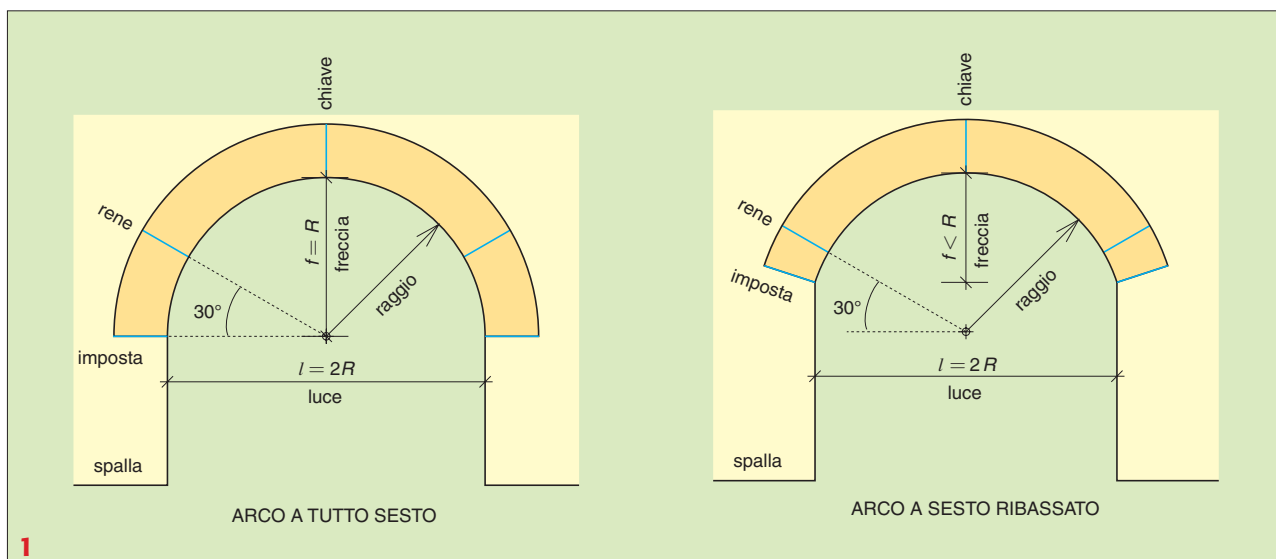
La ►FIGURA 1 mostra due configurazioni tipiche dell'arco circolare, a tutto sesto e a sesto ribassato, e i relativi elementi caratteristici: raggio, luce, freccia; sezioni di chiave, di rene e di imposta.

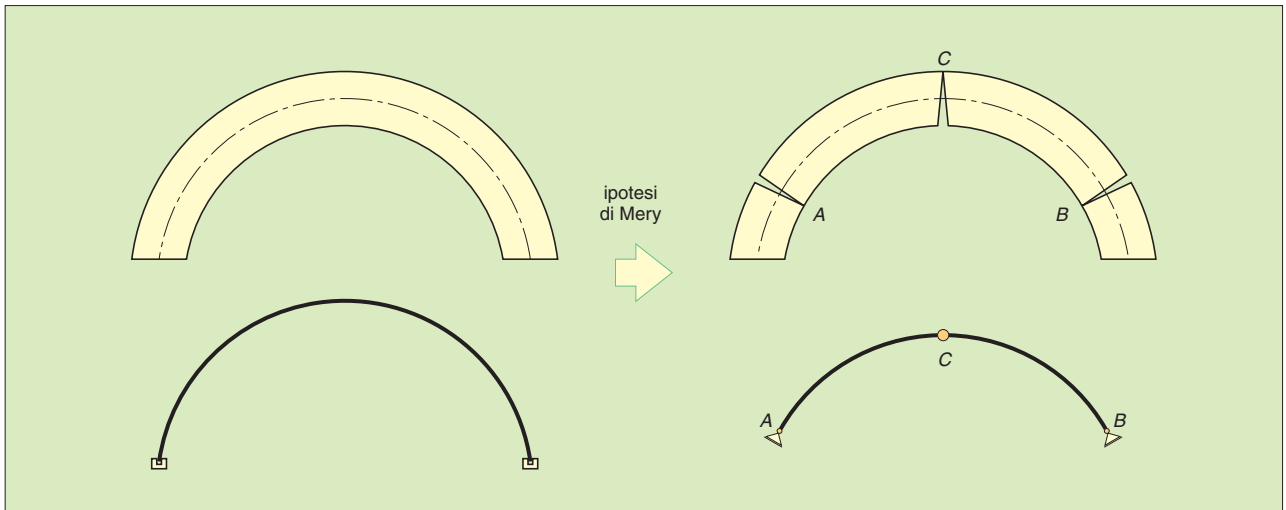
La costruzione dell'arco in muratura è impegnativa, necessitando di opere provvisorie di sostegno (*centine*) e di manodopera specializzata (►FIGURA 2). Si tratta di elementi pesanti: all'elevato peso proprio si somma quello dei riempimenti e dei rinfianchi necessari per pareggiare l'estradosso. Si tratta inoltre di elementi spingenti, che necessitano di adeguate *spalle* murarie o di opportuni accorgimenti.

Lo studio degli archi in muratura è tuttavia molto interessante e può essere condotto in modo approssimato secondo un criterio proposto nel 1840 da Mery, valido nel caso di luci limitate, di andamento circolare o parabolico dell'asse e di carichi simmetrici.

FIGURA 1 Tipi di arco circolare.

FIGURA 2 a) Céntine in legno per la costruzione del viadotto di Villedôme (Francia), fine del XIX secolo. b) Céntina metallica per la realizzazione di archi e volte in muratura; si noti come la posa dei mattoni abbia inizio dalle sezioni di imposta.





**FIGURA 3** Arco in muratura: schema integro e schema fessurato.

All'aumentare del carico la fessurazione inizia all'estradosso delle sezioni di reni e all'intradosso della sezione di chiave.

In questa situazione, che può essere considerata come uno *stato limite di collasso*, nelle tre sezioni indicate è consentita la rotazione e si ha un comportamento a cerniera (► FIGURA 3).

Si può quindi assumere per il calcolo dell'arco lo schema di arco a tre cerniere impostato sulle sezioni di rene.

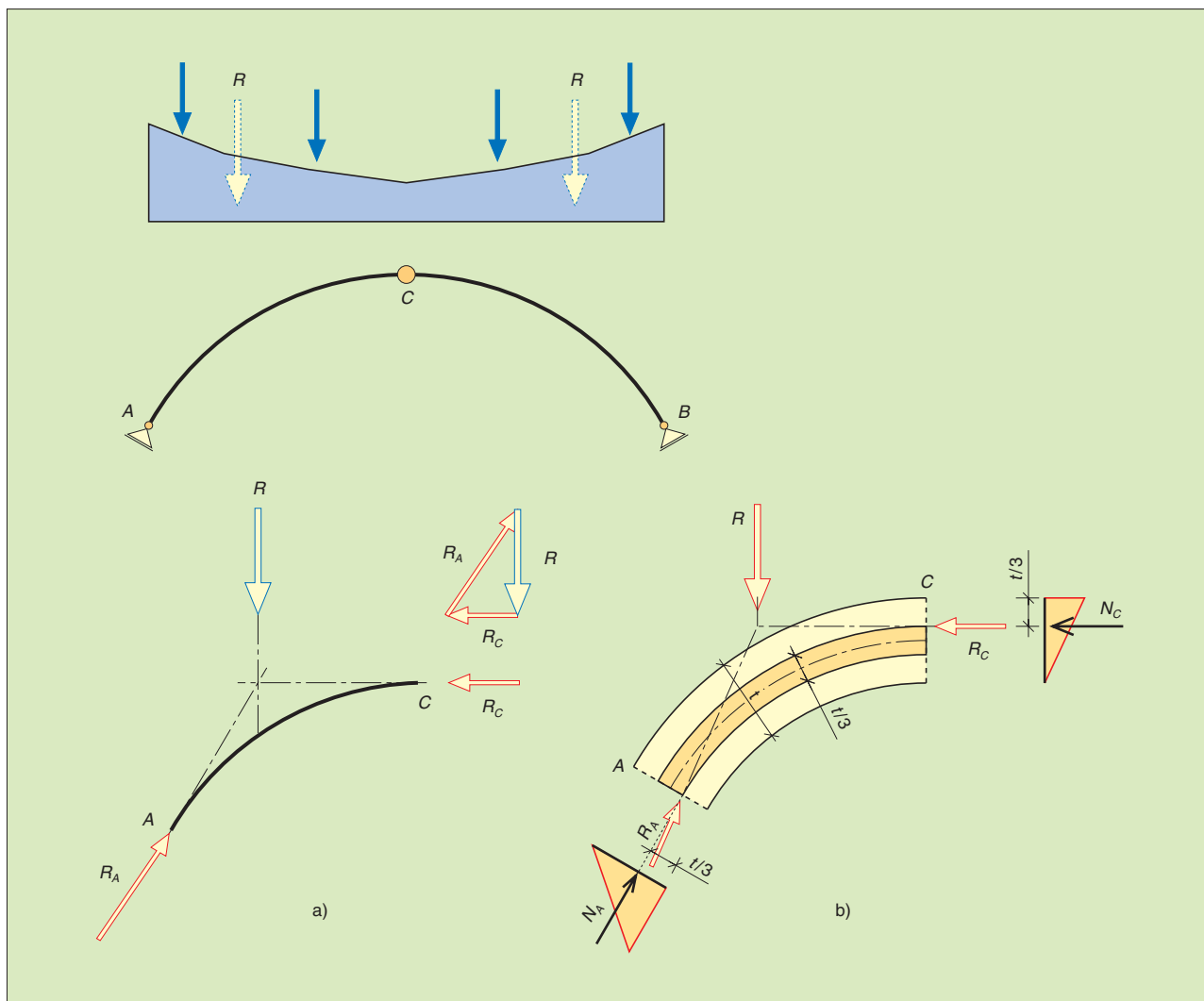
L'arco a tre cerniere è un elemento articolato isostatico, le cui reazioni vincolari si possono ricavare con le sole condizioni di equilibrio del corpo rigido; data la simmetria, inoltre, si può studiare un solo semiarco (► FIGURA 4). La reazione della cerniera di chiave  $R_C$  è orizzontale (v. unità F2 online, volume 1). Nota, quindi la risultante dei carichi  $R$ , resta determinata la reazione della cerniera di rene  $R_A$ . Le due reazioni, però, non passano per l'asse dell'arco, ma rispettivamente per il terzo medio superiore e per il terzo medio inferiore. Ciò è coerente con lo stato di fessurazione ipotizzato, che comporta diagrammi triangolari delle tensioni: nulle dove si ha la massima apertura, massime in corrispondenza del centro di rotazione.

Si può notare infine che, mentre la reazione di chiave è perpendicolare alla sezione (e quindi produce solo sforzo normale), la reazione di rene è inclinata e produce nella sezione sforzo normale e taglio. La deviazione dalla perpendicolare è però, in genere, talmente modesta che si possono trascurare gli effetti del taglio, assegnando allo sforzo normale l'intero valore della reazione  $R_A$ .

## ■ Risoluzione grafica

La risoluzione grafica, soprattutto se eseguita con un programma CAD che la rende più rapida e precisa, è particolarmente interessante perché mostra con grande immediatezza l'andamento della sollecitazione nell'intero arco e, quindi, il suo funzionamento statico.

Si consideri uno dei due archi a tutto sesto della ► FIGURA 5, di cui sono dati lo spessore  $t = 51$  cm, la luce e la freccia d'intradosso. La profondità  $b$ , nel piano perpendicolare al foglio, è di 45 cm, pari allo spessore dei muri sovrastanti, realizzati in muratura di mattoni pieni ( $\gamma_m = 18$  kN/m<sup>3</sup>). Sugli archi appoggia un solaio in legno di luce 4,00 m sul quale insiste un carico areale di 5 kN/m<sup>2</sup>.



Su ogni metro lineare di muro il solaio trasferisce un carico di  $5 \cdot 4/2 = 10$  kN; si deve dunque considerare sul muro un carico  $p = 10$  kN/m. Nell'ipotesi di Mery è possibile studiare il solo semiarco a sesto ribassato della ►FIGURA 6.

### • Determinazione della risultante R dei carichi

È il passaggio più laborioso dell'intero procedimento; infatti, il peso del muro superiore non grava uniformemente sull'arco, ma cresce (e non linearmente) dalla chiave alle reni. Conviene suddividere il semiarco in un certo numero di conci di uguali dimensioni, per esempio cinque (►FIGURA 6a), e determinare il carico competente a ciascuno; più è grande il numero delle suddivisioni, più precisi saranno i risultati.

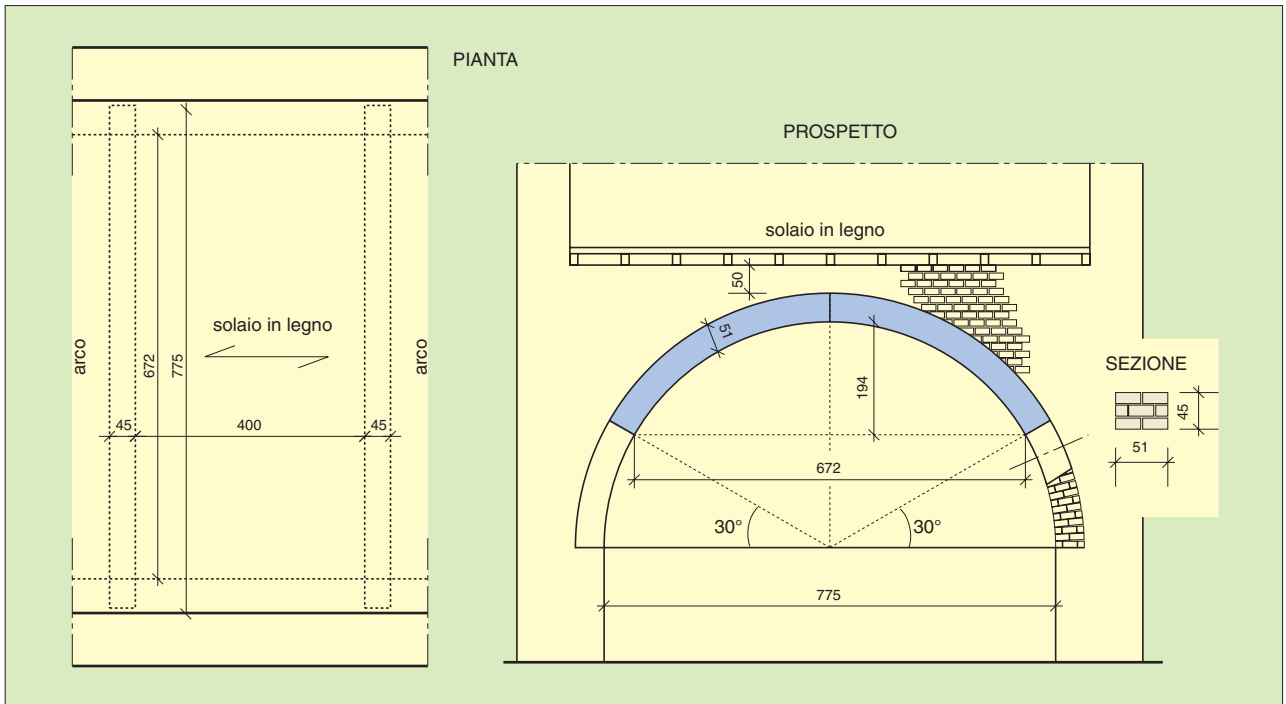
### • Peso proprio G dei conci

Passa per il baricentro di ogni cono. Il suo modulo si ottiene moltiplicando il volume  $V$  del cono per il peso specifico  $\gamma_m$  della muratura. Considerando che in un angolo di  $360^\circ$  sono compresi  $360/12 = 30$  conci, si ha:

$$G = V \cdot \gamma_m = \frac{\pi(4,38^2 - 3,87^2)}{30} \cdot 0,45 \cdot 18 = 3,57 \text{ kN}$$

**FIGURA 4** a) Determinazione grafica delle reazioni delle cerniere in un arco simmetrico.

b) La reazione di chiave passa per il terzo medio superiore; la reazione di rene, per il terzo medio inferiore.



**FIGURA 5** Archi a tutto sesto in muratura.

• **Peso  $P_i$  portato dal singolo concio**

L'intensità si ottiene sommando alla parte competente del carico distribuito  $g$  il peso della striscia di muro sovrastante il concio stesso. Misurate le altezze  $h_i$  di muro relative alle estremità di ogni concio, ad ognuna di esse compete il carico lineare  $p_i = h_i \cdot l_i \cdot \gamma_m$  che, sommato al carico uniforme del solaio, determina il diagramma di carico che agisce sul semiarco. Sul concio 1, per esempio, si ha:

$$\text{all'ascissa 0: } p_0 = 0,50 \cdot 0,45 \cdot 18 + 10 = 14,05 \text{ kN/m}$$

$$\text{all'ascissa 1: } p_1 = 0,60 \cdot 0,45 \cdot 18 + 10 = 14,86 \text{ kN/m}$$

Il peso di muro portato dal concio 1 vale quindi:

$$P_1 = \frac{14,05 + 14,86}{2} \cdot 0,91 = 13,15 \text{ kN}$$

La sua retta d'azione può essere determinata ricorrendo alla ricerca grafica del baricentro del trapezio (► FIGURA 6b), anche se la modesta differenza tra le basi può giustificare il suo posizionamento sulla mezzzeria della striscia di carico. In modo del tutto analogo si calcolano e si posizionano i pesi  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  competenti ai conci 2, 3, 4, 5.

• **Risultante  $R$  dei carichi**

Il peso  $P_1$ , composto con il peso proprio  $G$ , determina il peso  $R_1$  competente al concio 1. Si ha:

$$R_1 = 13,15 + 3,57 = 16,72 \text{ kN}$$

La retta d'azione  $r_1$  si può individuare per via grafica (► FIGURA 6c). In modo del tutto analogo si calcolano e si posizionano i carichi  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  competenti ai conci 2, 3, 4, 5. L'intensità della risultante dei carichi vale:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 91,31 \text{ kN}$$

La sua retta d'azione  $r$  è individuata dal poligono funicolare  $F$ , che ha per lati le parallele alle proiettanti tracciate dal polo  $O$  e connette le rette d'azione  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $r_5$  delle risultanti parziali (► FIGURA 6d).

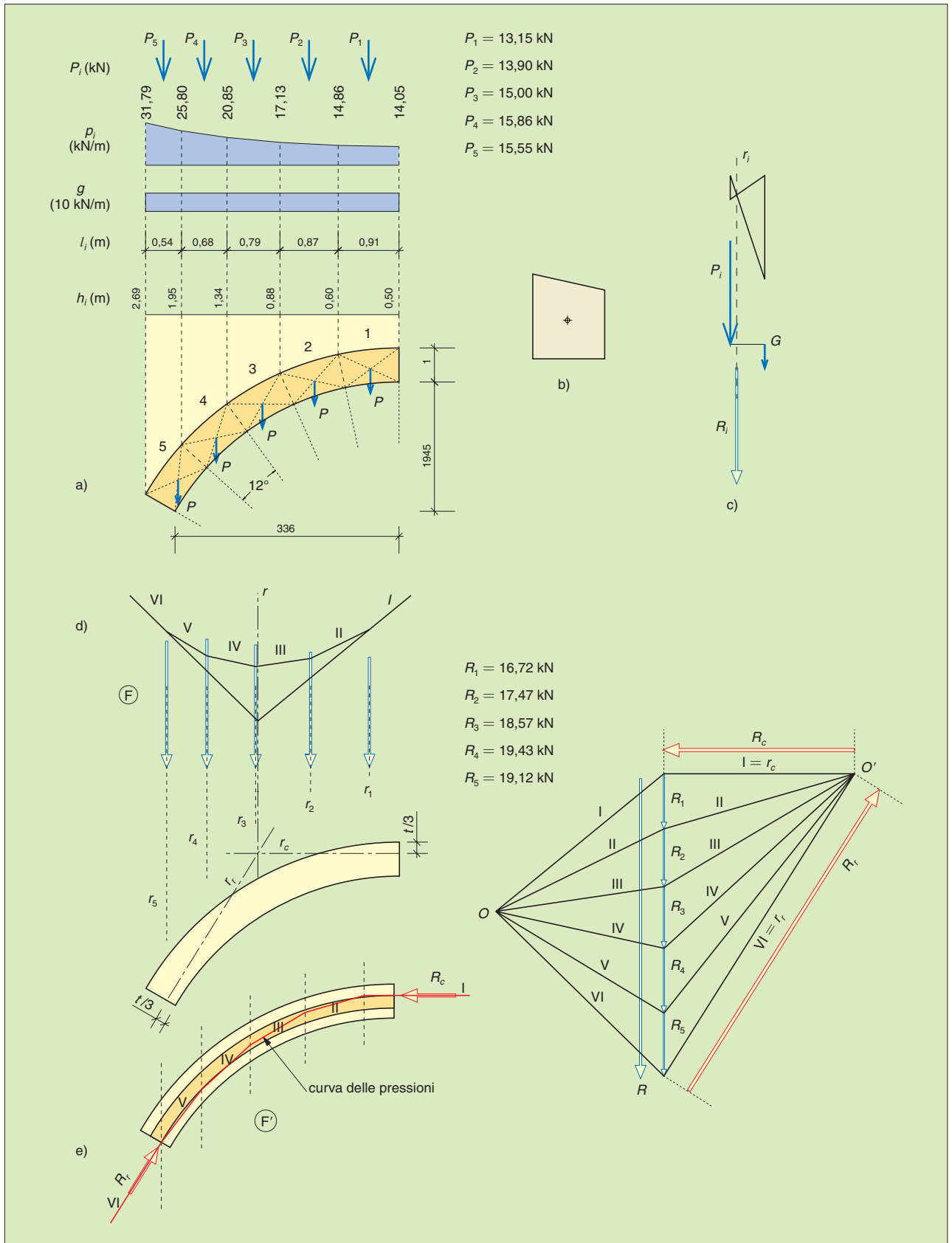


FIGURA 6 Stato di sollecitazione dell'arco in muratura.

- **Determinazione delle reazioni di chiave  $\mathbf{R}_c$  e di rene  $\mathbf{R}_r$**

Mandando l'orizzontale  $r_c$  dal terzo medio superiore, si individua l'intersezione tra questa e la retta  $r$ ; per questo punto e per il terzo medio inferiore della sezione di rene passa la retta  $r_r$ , su cui giace la reazione  $\mathbf{R}_r$ .

Scomponendo la risultante  $\mathbf{R}$  nelle due direzioni così individuate, restano determinati i due vettori  $\mathbf{R}_c$  e  $\mathbf{R}_r$  in modulo, direzione e verso. Si ha:

$$R_c \cong 57,5 \text{ kN}$$

$$R_r \cong 108 \text{ kN}$$

- **Andamento della sollecitazione**

Proiettando i vertici del poligono delle forze dal polo  $O'$  si ottiene il poligono delle successive risultanti dell'arco: la proiettante I  $\equiv r_c$  è la somma delle forze che precedono la retta d'azione  $r_1$  delle forze che agiscono sul concio 1 (la sola  $\mathbf{R}_c$ ); la proiettante II è la somma delle forze che precedono la retta d'azione  $r_2$  delle forze che agiscono sul concio 2 ( $\mathbf{R}_c$  e  $\mathbf{R}_1$ ), e così via. Le successive proiettanti rappresentano dunque, in modulo, direzione e verso, le sollecitazioni che competono ai conci, mentre il poligono funicolare  $F'$  rappresenta la *spezzata delle rette d'azione delle successive risultanti*, che ne definisce l'andamento sull'arco. Se questo fosse suddiviso in un numero infinito di conci, la spezzata sarebbe una curva continua, detta **curva delle pressioni**. Fatta eccezione per la sezione di chiave, nella sezione generica dell'arco la sollecitazione è inclinata, producendo taglio e sforzo normale eccentrico; il centro di pressione si mantiene interno al terzo medio, o ne esce di poco.

Se la curva delle pressioni si mantiene compresa nella striscia dei terzi medi, il centro di pressione è in ogni sezione interno al nocciolo centrale d'inerzia. Tutte le sezioni dell'arco sono soggette, oltre che a modesti sforzi di taglio, a sola compressione.

Il funzionamento dell'arco è dunque profondamente diverso da quello della trave. Nella trave la sezione generica è inflessa ( $M + V$ ) e deve quindi essere costruita con materiali resistenti anche a trazione e a taglio; nell'arco, tutte le sezioni sono prevalentemente compresse e gli elementi resistenti, opportunamente disposti, possono sostenersi per reciproco contrasto.

- **Verifica di resistenza**

Constatato che la curva delle pressioni si mantiene compresa entro la striscia dei terzi medi, o ne esce di poco, nell'arco di spessore costante basta eseguire la verifica di resistenza alle tensioni normali nella sezione di rene, che risulta la più sollecitata.

Attribuendo allo sforzo normale  $N$ , considerato agente sul terzo medio inferiore, l'intero valore  $R_r$ , si ha:

$$\sigma = \frac{2N}{bt} = 2 \cdot \frac{108\,000}{450 \cdot 510} = 0,94 \text{ N/mm}^2$$

Tale valore è compatibile con la resistenza di una muratura nuova e anche di una muratura vecchia in mattoni pieni, purché consolidata (v. volume 3).

Proprio perché le sezioni più sollecitate sono prossime alle reni, dove la sollecitazione è maggiore e la curva delle pressioni tende a uscire dalla striscia dei terzi medi, si realizzavano archi di spessore variabile, crescente dalla chiave alle reni (► FIGURA 7).

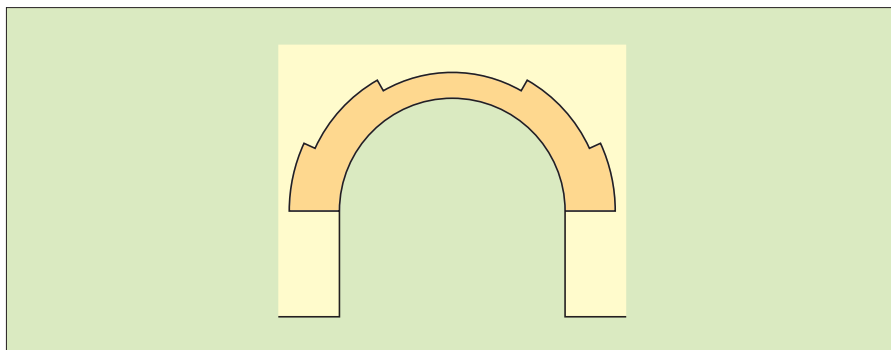


FIGURA 7 Arco di spessore variabile.

## ■ Risoluzione analitica

La risoluzione analitica può essere conveniente quando non si è tanto interessati al tracciamento della curva delle pressioni, quanto a un rapido controllo della resistenza.

Per una verifica sommaria possono bastare due sole suddivisioni in conci del semiarco per determinare la risultante dei carichi  $\mathbf{R}$ . Le reazioni vincolari si calcolano imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto al terzo medio inferiore della sezione di rene (► FIGURA 8). Si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma M(A) &= 0\end{aligned}$$

E quindi:

$$\begin{aligned}X_A &= X_C \\ Y_A &= R = 91,31 \text{ kN} \\ 91,31 \left( 1,69 - \frac{2}{3} 0,51 \cdot \cos 30^\circ \right) \\ - X_C \left( 1,94 + \frac{2}{3} 0,51 - \frac{0,51}{3} \cdot \sin 30^\circ \right) &= 0\end{aligned}$$

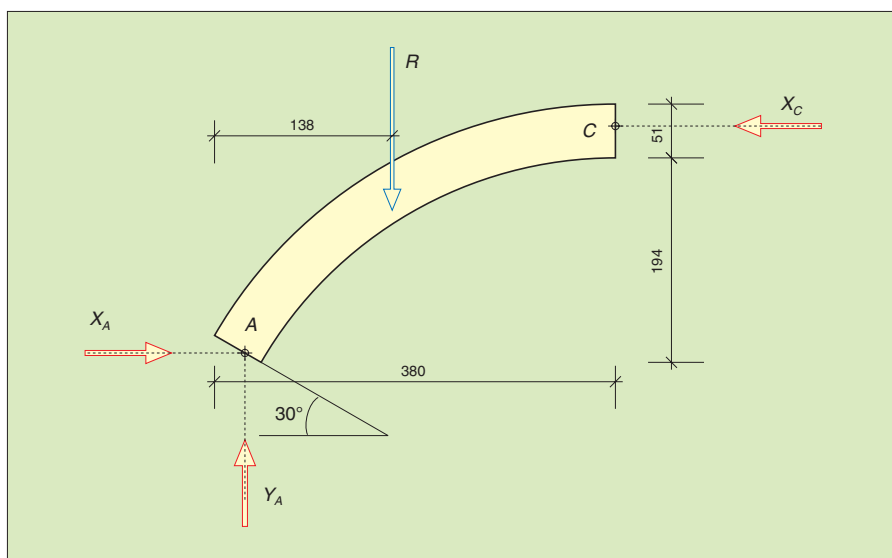


FIGURA 8 Determinazione analitica delle reazioni di chiave e di rene.

Risolvendo, si ha:

$$X_A = X_C = 57,5 \text{ kN}$$

$$Y_A = R = 91,31 \text{ kN}$$

Lo sforzo normale è dato da:

$$N = Y_A \cos 30^\circ + X_A \sin 30^\circ = 107,5 \text{ kN}$$

e la massima tensione normale vale:

$$\sigma = \frac{2N}{tb} = 2 \cdot \frac{107\,500}{450 \cdot 510} = 0,94 \text{ N/mm}^2$$

### ■ Archi a spinta eliminata

Al contrario delle travi, gli archi sono elementi spingenti.

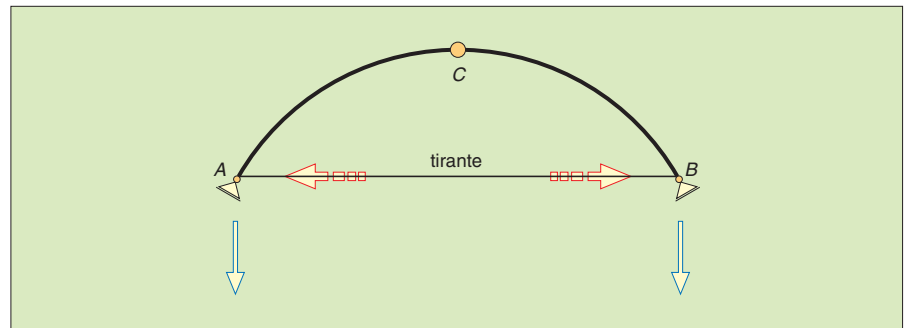
Le spinte orizzontali sono mal sopportate dai muri di appoggio: oltre a provocare effetti taglianti in tutte le sezioni, sono causa di momento flettente, che diventa massimo alla base del muro e può generare pericolose tensioni di trazione.

Le spinte possono essere neutralizzate da tiranti metallici (*catene*) collocati nel piano di imposta, realizzando **archi a spinta eliminata** (► FIGURA 9).

Il dimensionamento delle catene viene eseguito a sforzo normale semplice di trazione. Se si volesse eliminare la spinta dell'arco dell'esercizio precedente occorrerebbe inserire un tondo metallico in acciaio tipo S235 di area almeno pari a:

$$A_{min} = \frac{N}{\bar{\sigma}_a} = \frac{X_A}{\bar{\sigma}_a} = \frac{57\,500}{160} = 360 \text{ mm}^2$$

cui corrisponde un tondo di diametro  $\varnothing 22 \text{ mm}$ .



**FIGURA 9** Arco a spinta eliminata: le spinte sono assorbite dal tirante.