

F2

Equilibrio degli elementi articolati



TEORIA

- 1 Elementi articolati, vincoli interni e gradi di libertà
- 2 Elementi articolati isostatici: reazioni vincolari
- 3 Archi a tre cerniere
- 4 Travi Gerber
- 5 Elementi reticolari
- 6 Calcolo degli sforzi delle aste

AUTOVALUTAZIONE



Negli elementi articolati i movimenti provocati dalle forze applicate sono impediti, oltre che dai vincoli esterni, anche da *vincoli interni* che collegano i vari corpi rigidi che formano il sistema, limitando senza annullare completamente le possibilità di movimento relativo. Negli elementi articolati isostatici le reazioni dei vincoli, interni ed esterni, sono ancora determinate da semplici considerazioni di equilibrio.

Due ragazzi che camminano tenendosi per mano creano un vincolo interno al sistema, che limita le libertà di movimento relativo tra i due corpi.

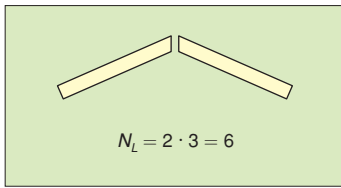


FIGURA 1 Elemento (inusuale) costituito da due corpi rigidi scollegati.

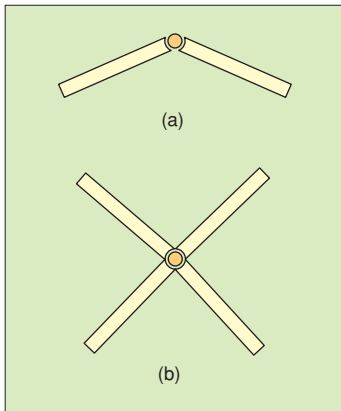


FIGURA 2 Cerniera interna: (a) elemento costituito da $r = 2$ corpi rigidi; (b) elemento costituito da $r = 4$ corpi rigidi.

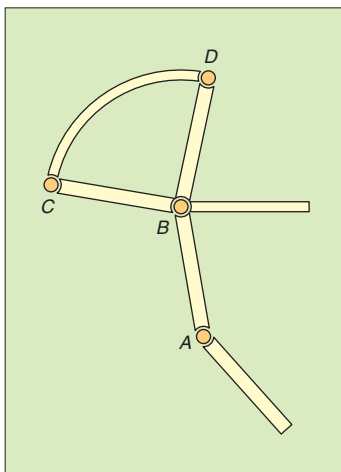


FIGURA 3 Elemento costituito da sei corpi rigidi collegati da quattro cerniere interne.

1. Elementi articolati, vincoli interni e gradi di libertà

Un elemento strutturale può essere costituito da un sistema di n corpi rigidi.

Si è detto che, in generale, un elemento strutturale è costituito da un sistema di n corpi rigidi (unità F1, paragrafo 1). Se questi fossero scollegati (► FIGURA 1), i gradi di libertà sarebbero tre per ogni corpo rigido componente, per un totale di $3 \cdot n$ gradi di libertà. Generalmente, però, i corpi rigidi che formano un sistema sono collegati tra loro mediante *meccanismi di vincolo interno*.

I **vincoli interni** sono meccanismi che, collegando tra di loro i corpi rigidi che formano un elemento strutturale, ne limitano le possibilità di movimento relativo.

Il tipo di vincolo interno più diffuso è lo **snodo** o **cerniera interna**, che permette ai corpi collegati di ruotare, ma non di spostarsi, l'uno rispetto all'altro. Una cerniera interna può collegare un qualsiasi numero r di corpi rigidi (► FIGURA 2a, b). Impedendo a ogni corpo le due possibilità di moto rigido nelle direzioni x e y relativamente agli altri corpi del sistema, sottrae 2 gradi di libertà a ciascun corpo e $2 \cdot r$ gradi di libertà al sistema. Il vincolo stesso, però, non fissato con l'esterno, conserva la possibilità di traslare con l'intero sistema nelle direzioni x e y , mantenendo 2 gradi di libertà. In conclusione, quindi, una cerniera interna che collega r corpi rigidi sottrae all'elemento strutturale $2r - 2 = 2(r - 1)$ gradi di libertà. Se un elemento possiede c_i cerniere interne, esso perde $\sum c_i 2(r - 1)$ gradi di libertà, essendo la sommatoria estesa a tutte le cerniere interne presenti.

Il numero N_L di gradi di libertà di un elemento strutturale piano formato da n corpi rigidi è $3 \cdot n$, cui va sottratto il numero di gradi libertà perduto per effetto delle cerniere interne. Si ha, in generale:

$$N_L = 3n - \sum c_i 2(r - 1) \tag{1}$$

dove:

- n è il numero dei corpi rigidi che costituiscono l'elemento;
- r è il numero degli elementi di volta in volta collegati dalla singola cerniera.

La sommatoria è estesa a tutte le c_i cerniere interne presenti.

Si dicono **articolati** gli elementi formati da più corpi rigidi, collegati tra loro da cerniere interne.

APPLICAZIONI

Calcolare i gradi di libertà N_L degli elementi articolati assegnati.

1 Per l'elemento di ► FIGURA 3 si ha:

- $n = 6$
- cerniere A, C, D: $r = 2$; ognuna sottrae all'elemento $2(r - 1) = 2$ gradi di libertà;
- cerniera B: $r = 4$; essa sottrae all'elemento $2(4 - 1) = 6$ gradi di libertà.

Sostituendo nella (1), si ha:

$$N_L = 3n - \sum c_i 2(r - 1) = 3 \cdot 6 - (2 + 2 + 2 + 6) = 6$$

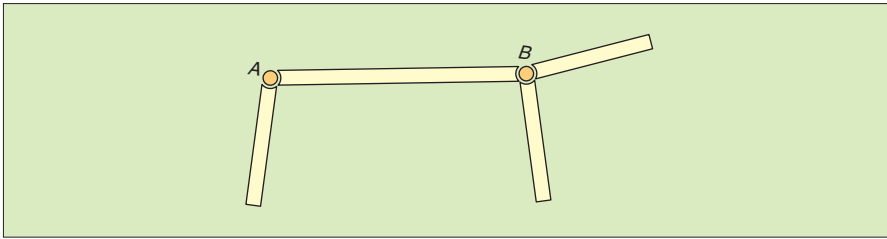


FIGURA 4 L'elemento ha 6 gradi di libertà.

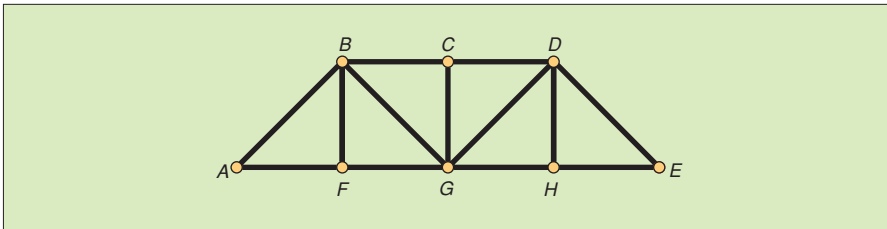


FIGURA 5 L'elemento ha 3 gradi di libertà.

2 Per l'elemento di ► FIGURA 4 si ha:

- $n = 4$
- cerniera A: $r = 2$
- cerniera B: $r = 3$.

Sostituendo nella (C), si ha:

$$N_L = 3n - \sum_{c_j} 2(r - 1) = 3 \cdot 4 - (2 + 4) = 6$$

3 Per l'elemento di ► FIGURA 5 si ha:

- $n = 13$
- cerniere A, E: $r = 2$
- cerniere B, D: $r = 4$
- cerniere C, F, H: $r = 3$
- cerniera G: $r = 5$.

Sostituendo nella (1), si ha:

$$N_L = 3n - \sum_{c_j} 2(r - 1) = 3 \cdot 13 - (2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 8) = 3$$

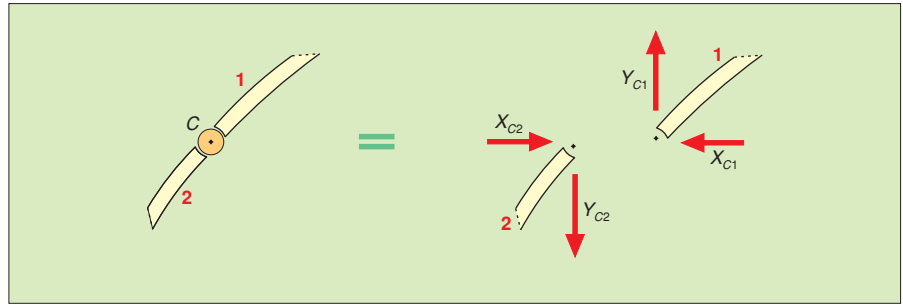
Si noti che questo elemento ha lo stesso numero di gradi di libertà di un corpo rigido.

2. Elementi articolati isostatici: reazioni vincolari

Il grado di libertà degli elementi articolati isostatici è maggiore di tre e quindi maggiore di tre deve essere anche il grado di vincolo esterno. Imponendo l'equilibrio dell'intero elemento il sistema contiene un numero di incognite maggiore del numero delle tre equazioni e non è sufficiente a determinare tutte le reazioni. Non bisogna dimenticare, però, che negli elementi articolati va assicurato non solo l'equilibrio dell'intero elemento (*equilibrio esterno*), ma anche quello dei singoli corpi rigidi componenti (*equilibrio interno*). Si possono dunque scrivere tanti sistemi di equilibrio quanti sono i corpi rigidi componenti l'elemento strutturale, che sono pienamente sufficienti a determinare tutte le reazioni vincolari, esterne e interne.

In modo perfettamente analogo a quanto visto per le cerniere esterne, le reazioni delle cerniere interne sono forze che passano per le cerniere stesse con in-

FIGURA 6 Reazioni vincolari della cerniera interna.



tensità e direzione incognite. Poiché il numero delle componenti equivale al grado di vincolo, una cerniera interna che collega r corpi rigidi ha $2(r - 1)$ componenti di reazione. In particolare, una cerniera interna C che collega due soli corpi rigidi (► FIGURA 6) ha grado di vincolo 2 e, quindi, due sole componenti di reazione X_C, Y_C . Dovendo essere assicurato l'equilibrio alla traslazione verticale e orizzontale, si ha sempre:

$$X_{C1} - X_{C2} = 0 \quad Y_{C1} - Y_{C2} = 0$$

e quindi:

$$X_{C1} = X_{C2} = X_C \quad Y_{C1} = Y_{C2} = Y_C$$

Per calcolare le reazioni vincolari degli elementi articolati è possibile seguire due metodi, concettualmente analoghi:

- il **metodo della risoluzione in serie**, che determina anche le reazioni delle cerniere interne;
- il **metodo delle equazioni ausiliarie**, che lascia indeterminate le reazioni delle cerniere interne.

Occorre notare, infine, che si può operare con le risultanti (totali o parziali) delle forze agenti su ogni parte rigida, mai con la risultante dell'intero schema di forze (► FIGURA 7).

■ Metodo della risoluzione in serie

È il metodo più rapido, tanto più conveniente quanto maggiore è il numero delle cerniere interne.

Soppressi tutti i vincoli, esterni e interni, si impone l'equilibrio interno di tutti i corpi rigidi componenti.

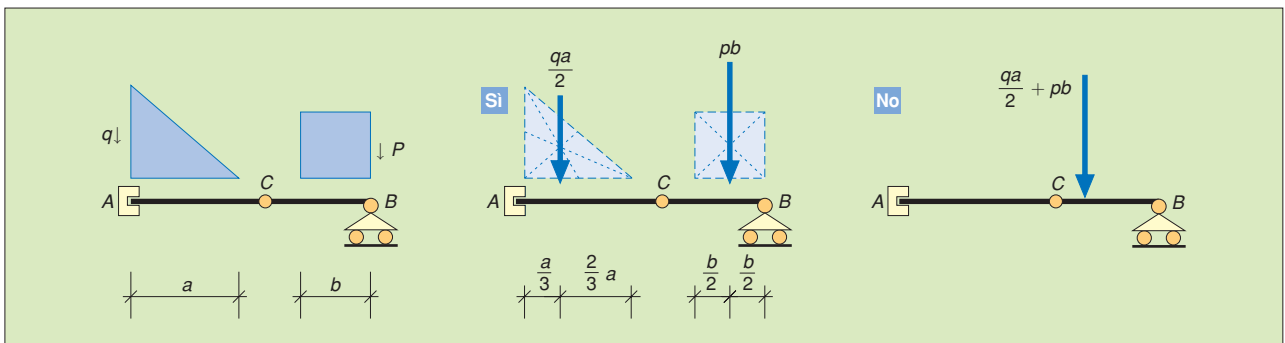


FIGURA 7 Sostituzione dei carichi con la risultante in una trave incastro-appoggio.

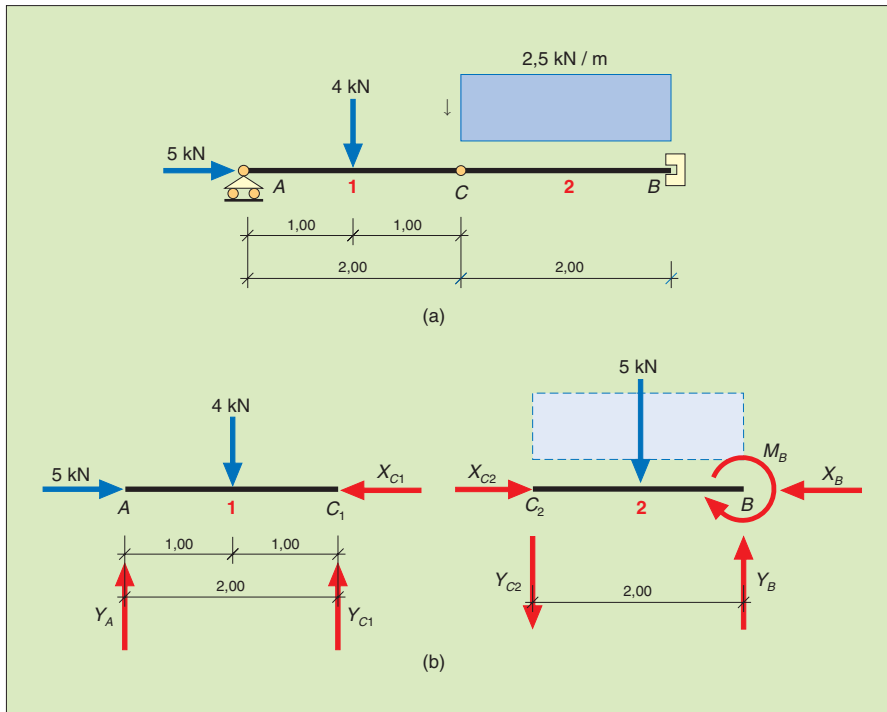


FIGURA 8 Metodo della risoluzione in serie: si determinano tutte le reazioni vincolari.

APPLICAZIONE

Calcolare le reazioni vincolari dell'elemento di ► FIGURA 8a.

- *Equilibrio interno dell'asta AC₁* (► FIGURA 8b). Dall'equazione $\sum X = 0$ si ricava subito:

$$X_{C_1} = 5 \text{ kN}$$

mentre, per simmetria, si ha:

$$Y_A = Y_{C_1} = 2 \text{ kN}$$

- *Equilibrio interno dell'asta C₂B*. Le forze $X_{C_2} = X_{C_1}$ e $Y_{C_2} = Y_{C_1}$ sono ormai note. Dal sistema fondamentale dell'equilibrio:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M(C_2) = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} X_B = X_C \\ -2 - 5 + Y_B = 0 \\ M_B + 5 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = 0 \end{cases}$$

risolvendo, si ottengono le reazioni dei vincoli esterni:

$$X_B = 5 \text{ kN} \quad Y_B = 7 \text{ kN} \quad M_B = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

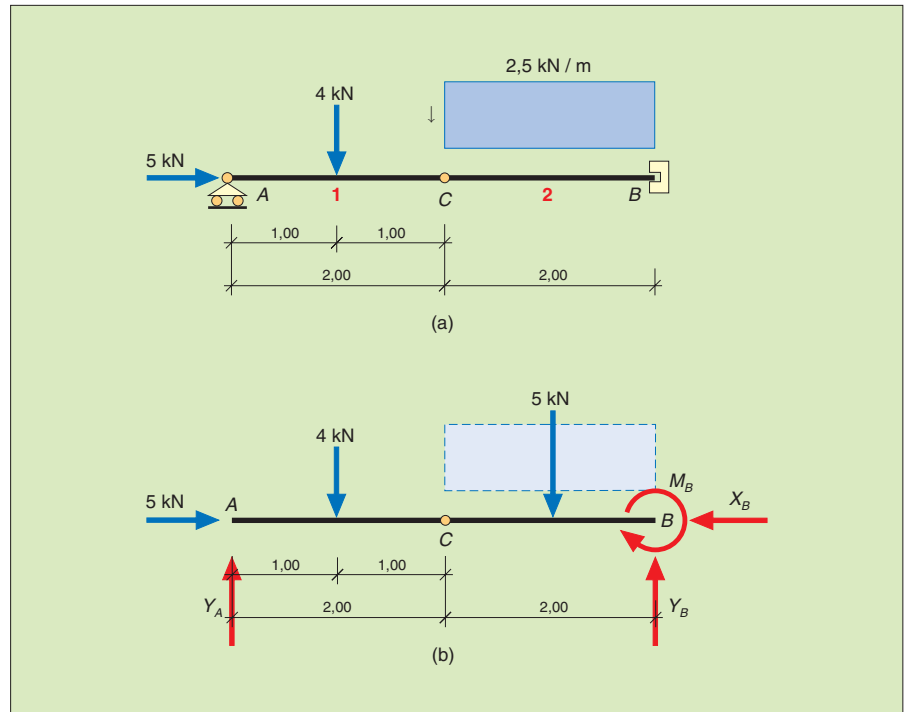
Si noti che non è stato necessario imporre l'equilibrio esterno. Esso, peraltro, deve sussistere e può essere utilizzato per controllare l'esattezza delle soluzioni. Si può controllare, per esempio, che sia soddisfatto l'equilibrio esterno alla traslazione verticale: $\sum Y = 0$. Si ha, infatti:

$$Y_A + Y_B - 5 - 4 = 2 + 7 - 5 - 4 = 0$$

Metodo delle equazioni ausiliarie

Questo metodo determina direttamente le sole reazioni esterne; le reazioni interne possono comunque essere calcolate successivamente.

FIGURA 9 Metodo delle equazioni ausiliarie: si determinano le sole reazioni dei vincoli esterni.



Per calcolare le reazioni della stessa trave precedente, si sopprimono i soli vincoli esterni (► FIGURA 9) e si impone l’equilibrio dell’intero elemento, per esempio scrivendo il sistema nella forma (2) dell’unità F1. Si ha:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum M(A) = 0 \\ \sum M(B) = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 5 - X_B = 0 \\ M_B - 4Y_B + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 0 \\ M_B + 4Y_A - 4 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

Peraltro, deve sussistere anche l’equilibrio delle singole aste. Imponendo l’equilibrio alla rotazione dell’asta AC attorno alla cerniera C, entrano in gioco – come prima – tutte le forze che agiscono sull’asta, ma non la reazione della cerniera stessa, che ha momento nullo intorno al punto C.

In pratica, si deve uguagliare a zero la somma dei momenti delle sole forze che sollecitano l’asta AC ossia, come si usa dire, delle sole forze che precedono la cerniera C. Si ha:

$$\sum_p M(C) = 0 \tag{4}$$

ossia

$$2 Y_A - 4 \cdot 1 = 0$$

Equazioni di questo tipo sono chiamate **equazioni ausiliarie**, perché sono di aiuto alla risoluzione del sistema dell’equilibrio esterno. Aggiungendo la (4) al sistema di equilibrio delle forze esterne, si ha infatti un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, che ammette una e una sola soluzione, identica a quella determinata con il metodo della risoluzione in serie. Risulta:

$$Y_A = 2 \text{ kN} \quad X_B = 5 \text{ kN} \quad Y_B = 7 \text{ kN} \quad M_B = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

In alternativa, si può imporre l’equilibrio alla rotazione dell’asta CB attorno alla cerniera C, uguagliando a zero la somma dei momenti delle sole forze che solleci-

tano l'asta CB , cioè, delle sole forze *che seguono* la cerniera C . Si ha:

$$\sum_s M(C) = 0 \quad (5)$$

ossia

$$-2 Y_B + 5 \cdot 1 - M_B = 0$$

In questo caso, delle due possibili equazioni ausiliarie (4) e (5), la seconda è meno conveniente perché contiene due incognite.

In generale, è necessario scrivere tante equazioni ausiliarie quante sono le cerniere interne dell'elemento articolato.

3. Archi a tre cerniere

L'arco a tre cerniere è una struttura articolata isostatica ad asse curvilineo.

La forma dell'arco (circolare, parabolica, policentrica) non è rilevante ai fini del calcolo delle reazioni, che dipendono solo dai carichi, dalla luce l e dalla *freccia* f . La freccia dell'arco è la quota della *sezione di chiave* C rispetto alla *linea di imposta* AB (► FIGURA 10).

APPLICAZIONE

Determinare le reazioni vincolari di un arco simmetrico e uniformemente caricato (► FIGURA 11a).

• *Metodo delle equazioni ausiliarie.* Soppressi i vincoli esterni (► FIGURA 11b) e considerata la simmetria dell'elemento, il sistema di equilibrio esterno diventa:

$$\begin{cases} X_A = X_B \\ Y_A = Y_B = \frac{ql}{2} \end{cases}$$

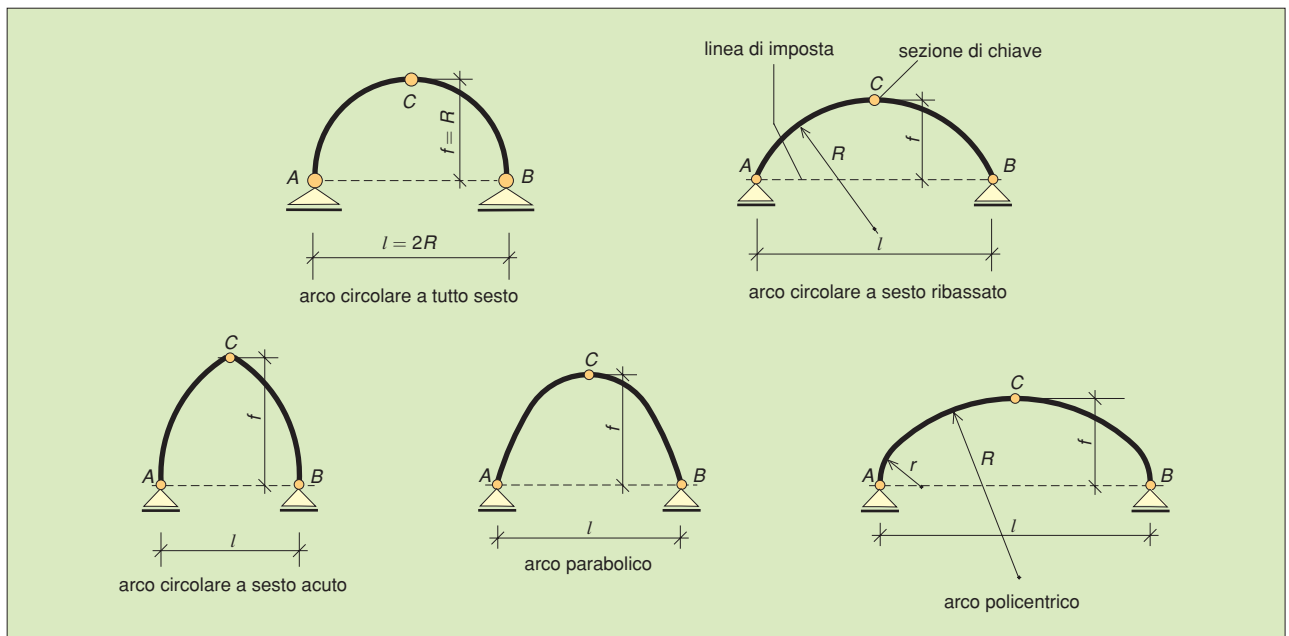
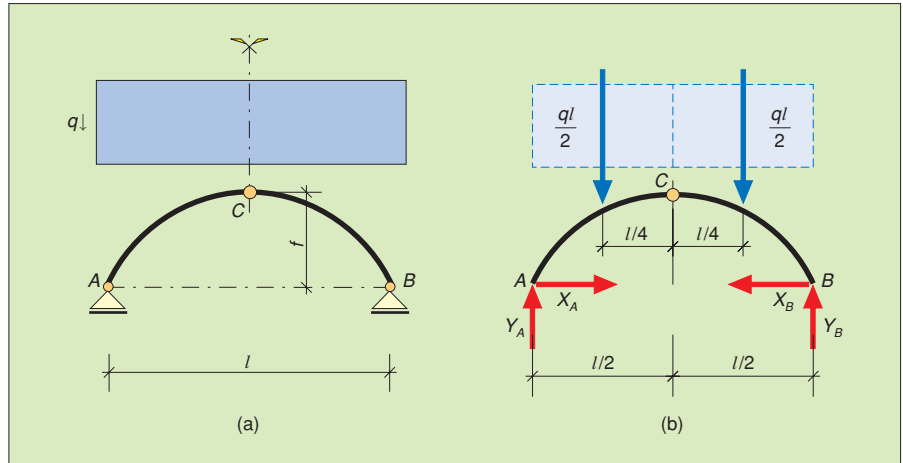


FIGURA 10 Archi a tre cerniere.

FIGURA 11 (a) Arco a tre cerniere uniformemente caricato. (b) Reazioni dei vincoli esterni.



L'equazione ausiliaria:

$$\sum_p M(C) = 0 \quad \text{ossia} \quad Y_A \frac{l}{2} - X_A \cdot f - \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = 0$$

forisce la soluzione:

$$X_A = \frac{ql^2}{8f}$$

Le reazioni dei vincoli esterni dell'arco a tre cerniere uniformemente caricato valgono:

$$X_A = X_B = \frac{ql^2}{8f} \quad Y_A = Y_B = \frac{ql}{2} \quad (6)$$

Se l'arco è semicircolare, basta sostituire nelle (6) il valore $f = l/2 = R$ ottenendo:

$$X_A = X_B = \frac{qR}{2} \quad Y_A = Y_B = qR \quad (7)$$

• *Metodo della risoluzione in serie.* Soppressi tutti i vincoli (► FIGURA 12), si mettono in evidenza, oltre alle componenti delle reazioni esterne $X_{A'}, Y_{A'}, X_{B'}, Y_{B'}$, anche le componenti delle reazioni interne X_{C1}, Y_{C1} (applicate al semiarco AC_1) e X_{C2}, Y_{C2} (applicate al semiarco C_2B) uguali e opposte alle precedenti.

Per l'equilibrio esterno e per la simmetria si ha:

$$X_A = X_B \quad Y_A = Y_B = \frac{ql}{2}$$

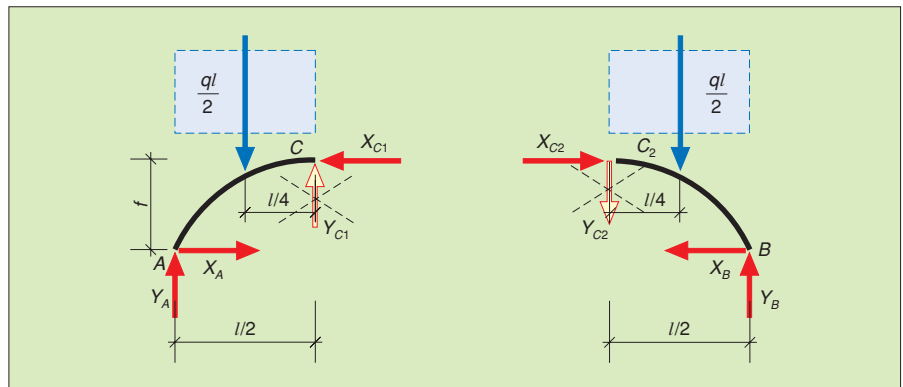


FIGURA 12 Reazioni dei vincoli interni.

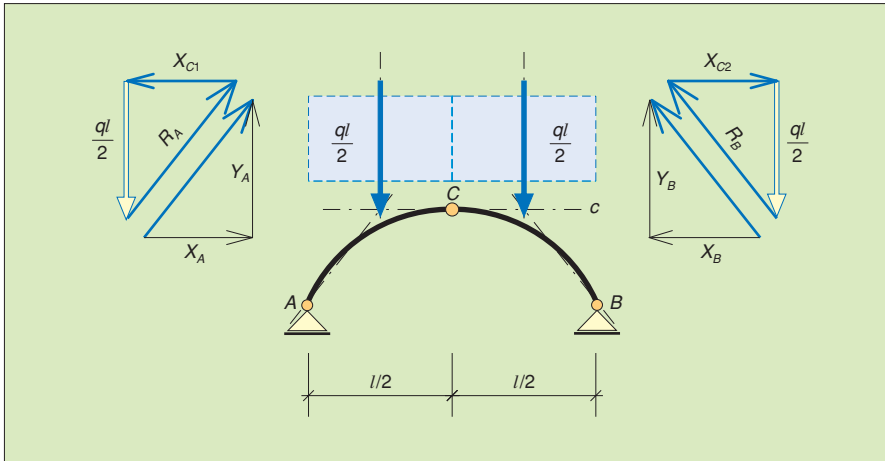


FIGURA 13 Determinazione grafica delle reazioni vincolari.

Vista la simmetria dello schema strutturale, è sufficiente imporre l'equilibrio interno di un solo semiarco, per esempio AC₁. Si ha:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M(C_1) = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} X_A = X_{C1} \\ Y_A - \frac{ql}{2} + Y_{C1} = 0 \\ Y_A \frac{l}{2} - X_A \cdot f - \frac{ql}{2} \frac{l}{4} = 0 \end{cases}$$

Sostituendo il valore di Y_A e risolvendo il sistema si ottengono sia i valori delle componenti delle reazioni esterne:

$$X_A = X_B = \frac{ql^2}{8f} \quad Y_A = Y_B = \frac{ql}{2}$$

sia quelli delle reazioni interne:

$$X_{C1} = X_{C2} = X_C = \frac{ql^2}{8f} \quad Y_{C1} = Y_{C2} = 0$$

Osservazione. Era prevedibile che le componenti Y_C fossero nulle, perché qualsiasi valore diverso da zero sarebbe incoerente o con la simmetria o con l'equilibrio. Infatti, le due forze devono avere verso opposto per rispettare l'equilibrio alla traslazione verticale della cerniera C. Se così fosse, però, non sarebbe rispettata la simmetria.

Soluzione grafica

Per rispettare la simmetria la retta d'azione c (reazione della cerniera interna) è orizzontale. Le reazioni delle cerniere esterne passano quindi, oltre che per le cerniere stesse, per i punti intersezione fra c e le risultanti dei carichi sui due semiarchi (► FIGURA 13).

4. Travi Gerber

Le **travi Gerber** (► 1) possono essere definite come *elementi articolati isostatici ad asse rettilineo*.

Quando si ha più di una cerniera interna, è senz'altro conveniente il metodo della risoluzione in serie.

► 1 Prendono il nome dall'ingegnere tedesco Gerber (leggi *Gherber*).

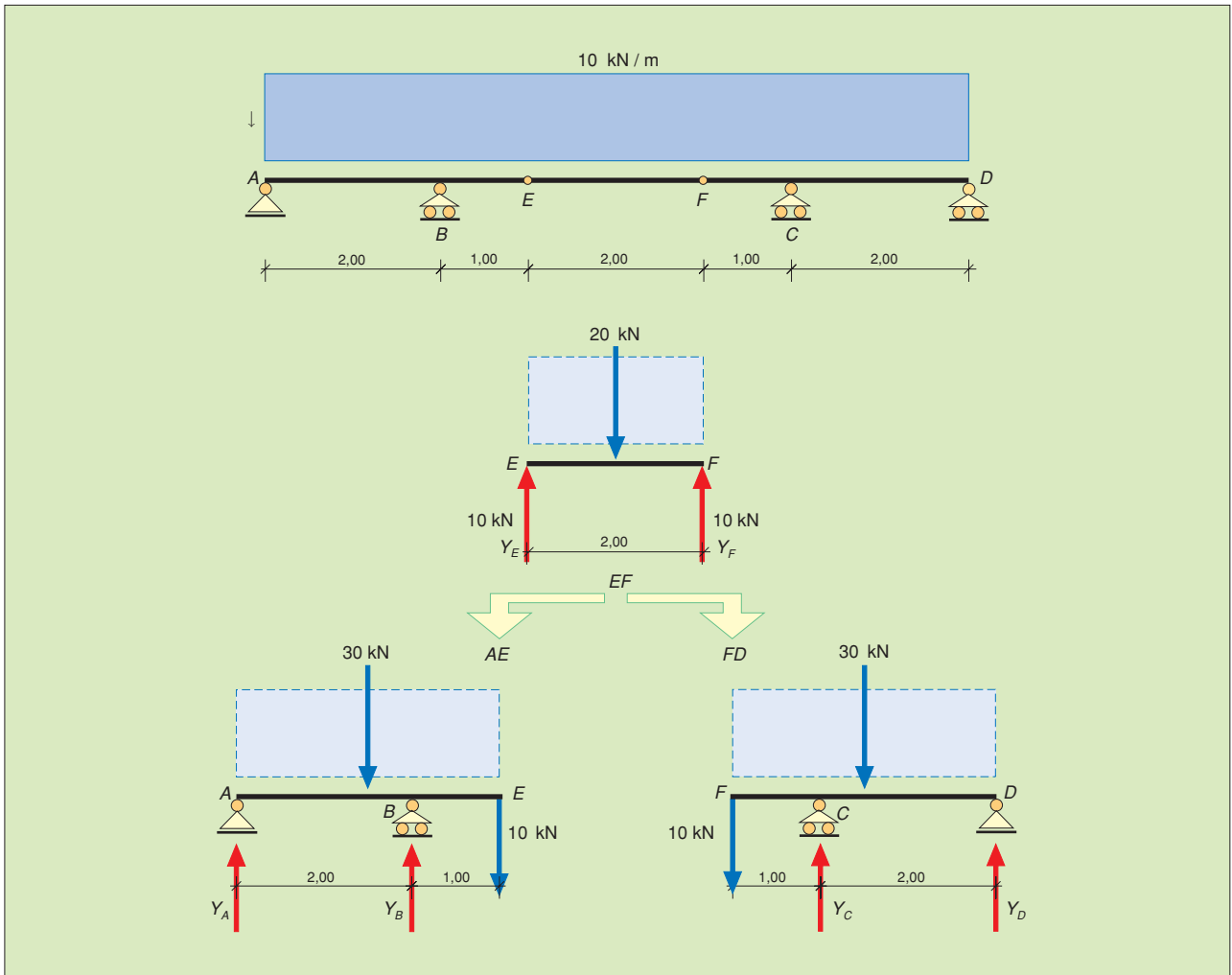


FIGURA 14 Elemento articolato: trave Gerber su quattro appoggi.

APPLICAZIONE

Nella trave Gerber di **FIGURA 14** si nota immediatamente che la componente X_A della cerniera esterna A è nulla, o non sarebbe assicurato l'equilibrio alla traslazione orizzontale (i carichi sono perpendicolari all'asse). Sopprimendo le cerniere interne, l'elemento resta diviso nei tratti rigidi AE, EF, FD, il cui equilibrio interno può essere imposto in una successione qualsiasi; si può notare, però, che nel tratto centrale EF compaiono due sole incognite (Y_E e Y_F), il cui calcolo è immediato per simmetria. Si ha:

$$Y_E = Y_F = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10 \text{ kN}$$

Le due reazioni (ormai note) vanno applicate (con verso opposto) alle estremità dei tratti AE e FD. L'equilibrio interno dell'elemento AE imposto nella forma (3):

$$\begin{cases} \sum M(A) = 0 \\ \sum M(B) = 0 \end{cases} \text{ diventa } \begin{cases} 10 \cdot 3 - Y_B \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0 \\ 10 \cdot 1 + Y_A \cdot 2 - 10 \cdot 3 \cdot 0,5 = 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$Y_B = 37,5 \text{ kN} \quad Y_A = 2,5 \text{ kN}$$

Le reazioni Y_C e Y_D , che si possono ricavare in modo analogo imponendo l'equilibrio

interno del tratto rigido FD , sono in questo caso già note per la simmetria dell'intero elemento strutturale. Si ha:

$$Y_D = Y_A = 2,5 \text{ kN} \quad Y_C = Y_B = 37,5 \text{ kN}$$

L'equilibrio esterno può essere utilizzato come prova dell'esattezza delle soluzioni. Per esempio, l'equilibrio alla traslazione verticale è soddisfatto perché risulta:

$$\Sigma Y = Y_A + Y_B + Y_C + Y_D - 10 \cdot 8 = 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 37,5 - 80 = 0$$

5. Elementi reticolari

Si definisce **elemento reticolare** un insieme **indeformabile** di **aste** collegate tra loro mediante cerniere interne in punti detti *nodi* (► FIGURA 15).

Un elemento reticolare è indeformabile quando si comporta come un corpo rigido e ha, quindi, lo stesso numero di gradi di libertà ($N_L = 3$).

Dato che, di solito, si ha a che fare con un gran numero di nodi e di aste, conviene calcolare i gradi di libertà basandosi sulle considerazioni che seguono.

Si può notare (► FIGURA 16) che per collegare rigidamente i primi tre nodi 1, 2, 3, sono sufficienti 3 aste. Per collegare rigidamente i tre nodi successivi 4, 5, 6 occorre aggiungere ogni volta *almeno* due aste. Si può quindi affermare che, collegati i primi 3 nodi, per collegare gli altri $n - 3$ nodi occorrono altre $2(n - 3)$ aste. Di conseguenza, per collegare rigidamente n nodi, occorre un numero minimo a di aste pari a:

$$a = 3 + 2(n - 3) = 3 + 2n - 6 = 2n - 3 \quad (8)$$

La (8) non è sufficiente a garantire l'indeformabilità: è anche necessario controllare che la disposizione delle aste sia efficace (► FIGURA 17).

Tutti gli elementi reticolari *a generazione triangolare* sono strettamente indeformabili.

Gli elementi reticolari possono essere rigidi (► FIGURA 18) o articolati (► FIGURA 19), spaziali o piani (► FIGURA 15), isostatici o iperstatici.

Lo studio, qui limitato a elementi isostatici e piani, si basa su alcune ipotesi semplificative:

- i nodi sono cerniere perfette;
- le aste sono scariche: tutte le forze esterne agiscono solo nei nodi.

L'elemento reticolare è così ridotto a un sistema di aste scariche collegate da cerniere, ossia a un **sistema di bielle**.

Le reazioni dei vincoli esterni si calcolano nel modo consueto, imponendo l'equilibrio delle forze esterne.

APPLICAZIONE

Determinare le reazioni esterne della trave reticolare di ► FIGURA 20.

Per calcolare le componenti delle reazioni, si può scrivere il sistema di equilibrio nella forma fondamentale:

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \\ \Sigma Y = 0 \\ \Sigma M(1) = 0 \end{cases} \quad \text{ossia (► FIGURA 21)} \quad \begin{cases} -X_1 + 10 = 0 \\ Y_1 + Y_4 - 10 = 0 \\ 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 - Y_4 \cdot 8 = 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$X_1 = 10 \text{ kN} \quad Y_1 = 3,75 \text{ kN} \quad Y_4 = 6,25 \text{ kN}$$

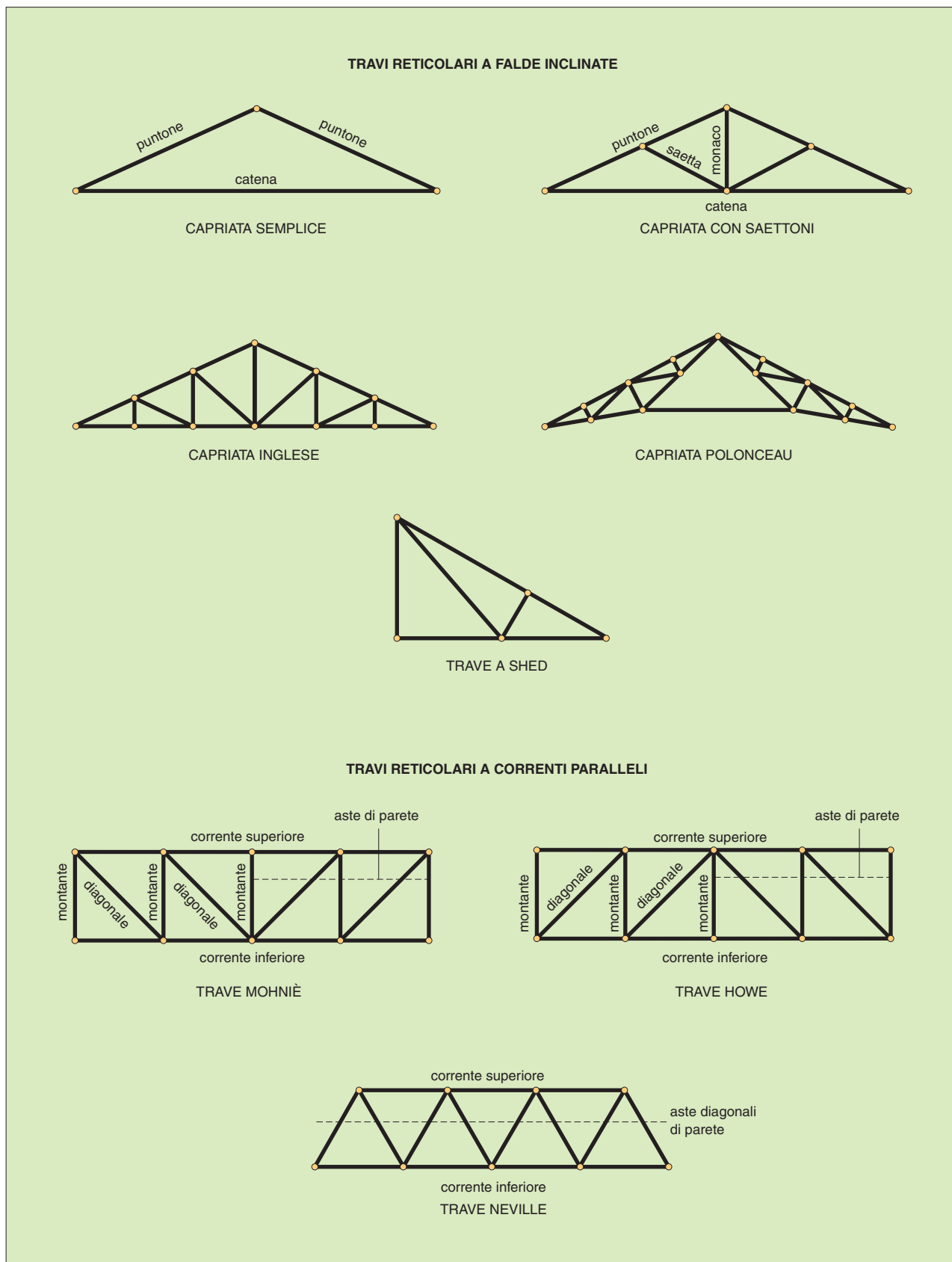


FIGURA 15 Elementi reticolari piani.

16

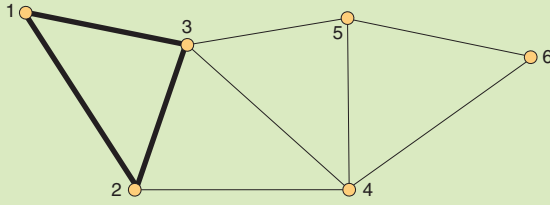
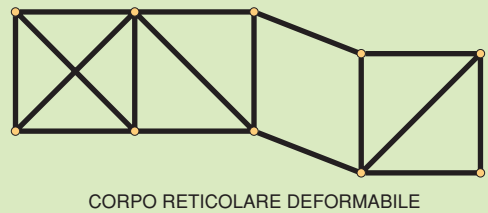
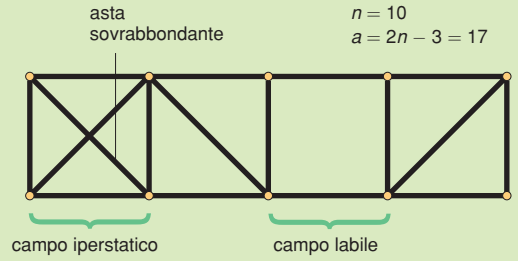
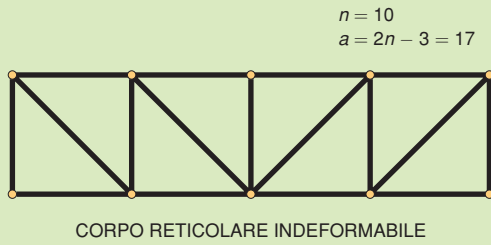


FIGURA 16 Generazione triangolare del corpo reticolare.

FIGURA 17 Le aste, anche se in numero sufficiente, possono essere maldisposte.

FIGURA 18 Elementi reticolari isostatici rigidi.

17



18

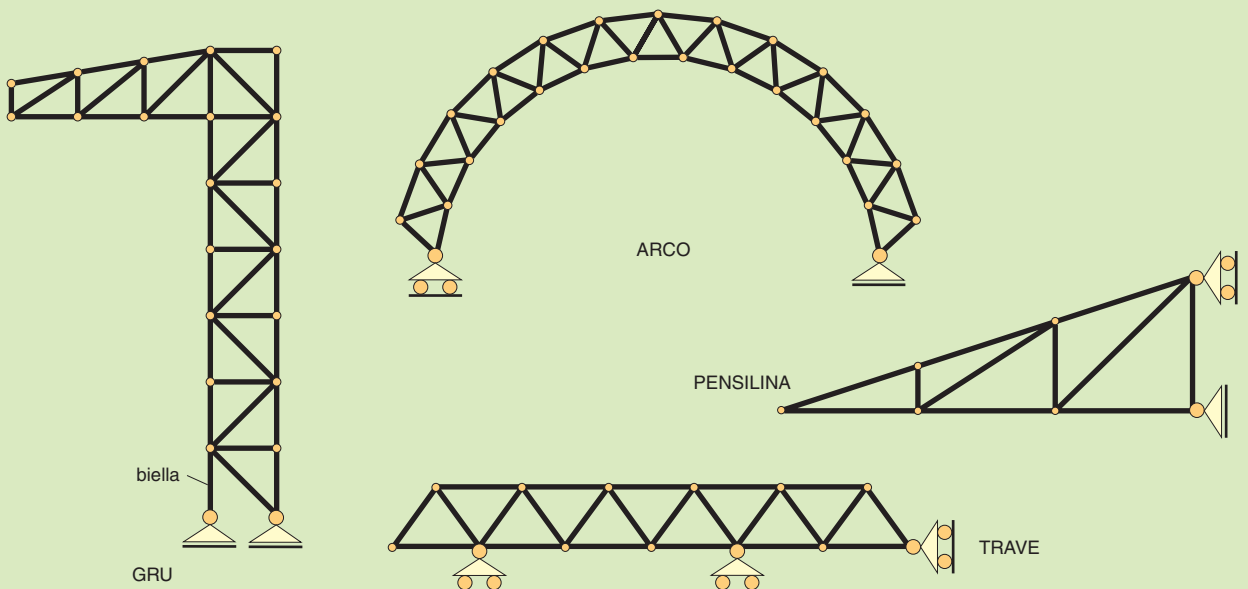
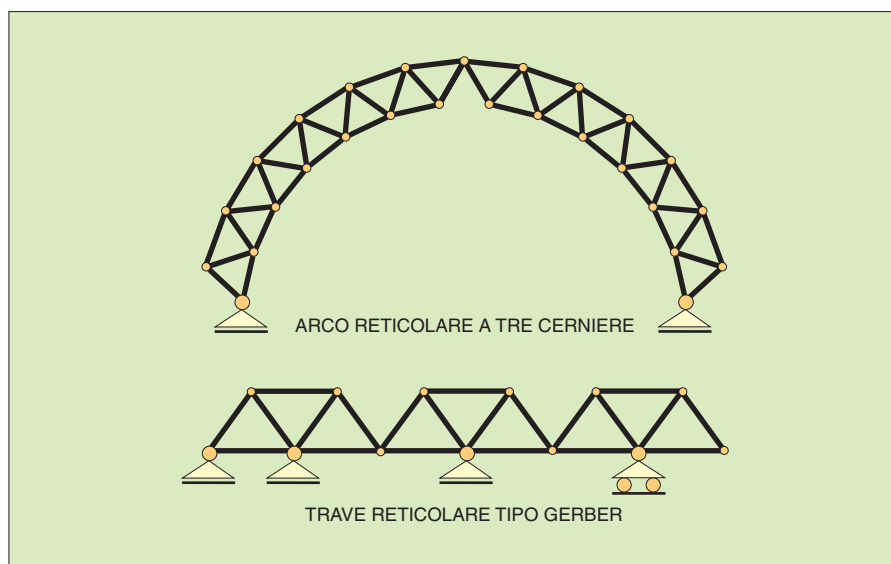
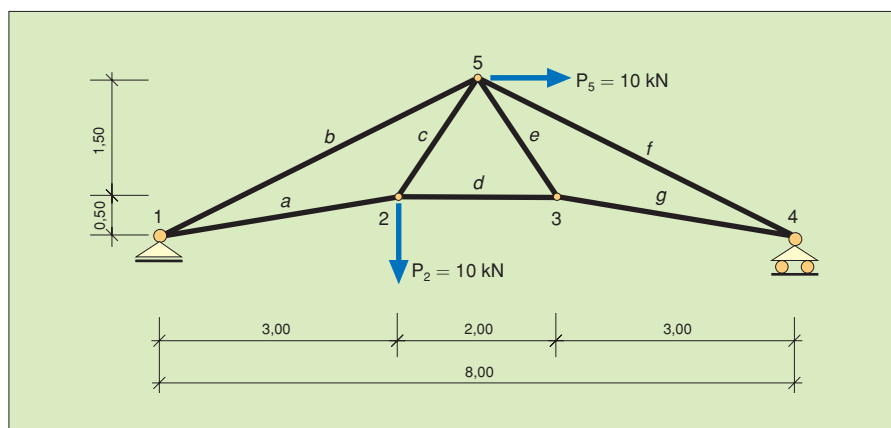
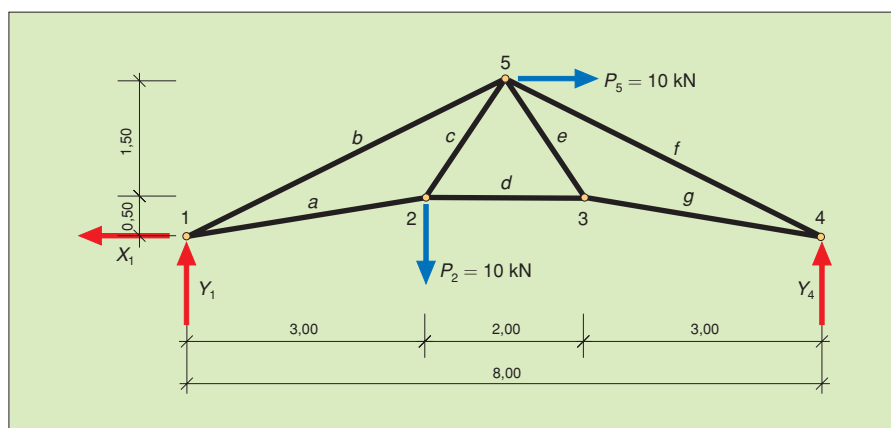


FIGURA 19 Elementi reticolari isostatici articolati.

FIGURA 20 Trave tipo Polonceau.

FIGURA 21 Reazioni dei vincoli esterni.


Per calcolare le reazioni interne, dette **sforzi delle aste**, si deve ricordare (paragrafo 2 dell'unità F1), che la reazione della biella è una forza che ha la stessa direzione della congiungente le due cerniere, ossia la stessa direzione dell'asta.

Con riferimento alla ►FIGURA 20, si supponga di separare dalla trave reticolare le due aste *c* e *d*: compaiono le reazioni interne, cioè forze che le aste stesse e il resto della trave si trasmettono reciprocamente attraverso i nodi.

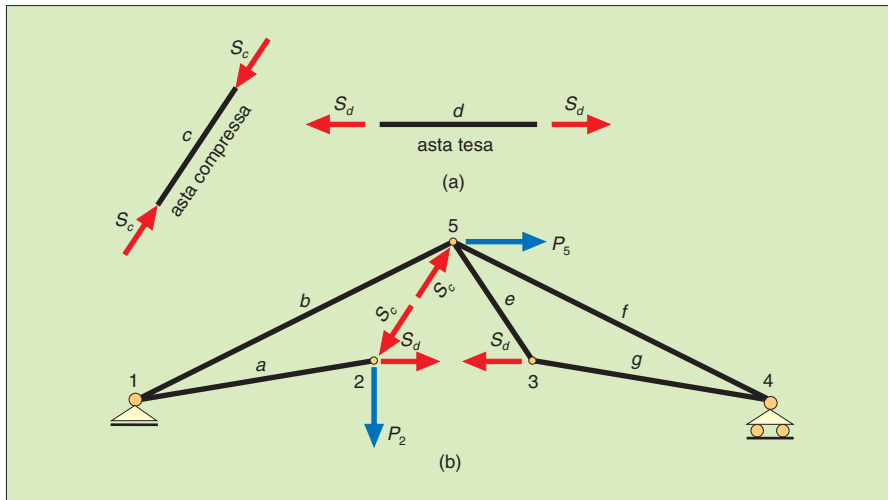


FIGURA 22 Puntoni e tiranti:
(a) sforzi trasmessi dai nodi alle aste;
(b) sforzi trasmessi dalle aste ai nodi.

Le aste separate dalla trave (► FIGURA 22a) sono soggette alle forze S_c e S_d che, equivalendo alla parte soppressa della trave, rappresentano gli **sforzi trasmessi dai nodi alle aste**. Per l'equilibrio dell'asta c , i due sforzi S_c , trasmessi all'asta dai nodi 2 e 5, devono avere intensità uguale e opposta. Intensità uguale e opposta devono avere anche gli sforzi S_d , trasmessi all'asta d dai nodi 2 e 3.

Contemporaneamente, la trave privata delle aste c e d (► FIGURA 22b) è soggetta alle azioni S_c e S_d che, equivalendo alle aste sopresse, rappresentano gli **sforzi trasmessi dalle aste ai nodi**. Gli sforzi S_c comprimono l'asta c ; gli sforzi S_d tendono l'asta d . L'asta c , compressa, si dice **puntone**, l'asta d , tesa, si dice **tirante**.

Facendo riferimento alla trave, si dice che un'asta è compressa quando lo sforzo entra nel nodo; che è tesa, quando lo sforzo esce dal nodo.

Convenzionalmente, si usa attribuire segno positivo agli sforzi di trazione e segno negativo agli sforzi di compressione.

6. Calcolo degli sforzi delle aste

■ Metodo dell'equilibrio dei nodi

Il modo più spontaneo per calcolare gli sforzi nelle aste consiste nell'imporre contemporaneamente l'equilibrio di tutti i nodi, ognuno dei quali è soggetto agli sforzi delle aste in esso concorrenti (che hanno intensità incognita, ma direzione nota, coincidente con quella delle aste) e ad eventuali carichi (noti).

Per ogni nodo il sistema di equilibrio si riduce alle due equazioni di equilibrio alla traslazione.

Infatti, l'equilibrio alla rotazione è automaticamente soddisfatto perché tutte le forze applicate in un nodo sono concorrenti. Se l'elemento è rigido e isostatico, il sistema da risolvere è dunque costituito da $2n$ equazioni in $a + 3$ incognite: gli sforzi nelle a aste e le tre componenti di reazione dei vincoli esterni. Essendo, per la (8):

$$2n = a + 3$$

il sistema ha tante incognite quante sono le equazioni e ammette quindi una e una sola soluzione.

Poiché però il numero delle incognite (e quindi delle equazioni) può essere molto elevato, questo procedimento concettualmente semplice può incontrare notevoli difficoltà operative di risoluzione.

Conviene quindi equilibrare in successione nodi in cui concorrono non più di due sforzi incogniti.

Così procedendo, ogni nodo viene risolto con due sole equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

Il sistema può sempre essere impostato supponendo che tutte le aste siano puntoni e, quindi, che tutti gli sforzi entrino nei nodi. Un risultato positivo confermerà che l'asta è effettivamente compressa; un risultato negativo segnalerà che l'asta è invece un tirante.

APPLICAZIONE

Calcolare gli sforzi nelle aste della trave di ► FIGURA 23.

• **Nodo 1** (► FIGURA 24a):

$$\begin{cases} S_a = 0 \\ Y_1 - S_b = 0 \end{cases}$$

L'asta *a* è scarica; l'asta *b* è un puntone e il suo sforzo vale:

$$S_b = Y_1 = 2P$$

• **Nodo 2** (► FIGURA 24b). Per scrivere le equazioni di equilibrio lo sforzo nell'asta inclinata *c* va scomposto nelle direzioni *x* e *y*. Detto α l'angolo formato dall'asta con l'orizzontale, si ha:

$$S_{cx} = S_c \cdot \cos \alpha \quad S_{cy} = S_c \cdot \sin \alpha$$

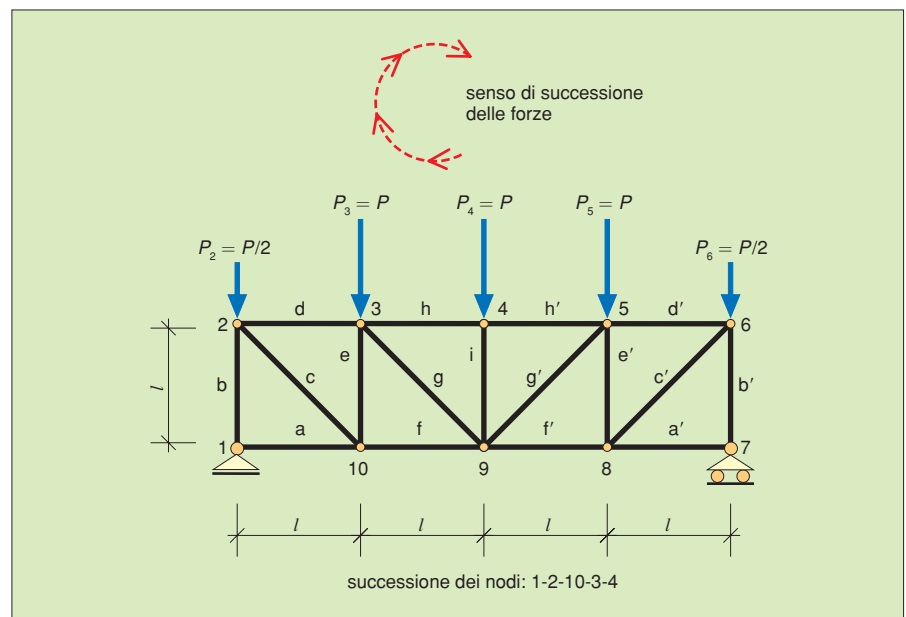
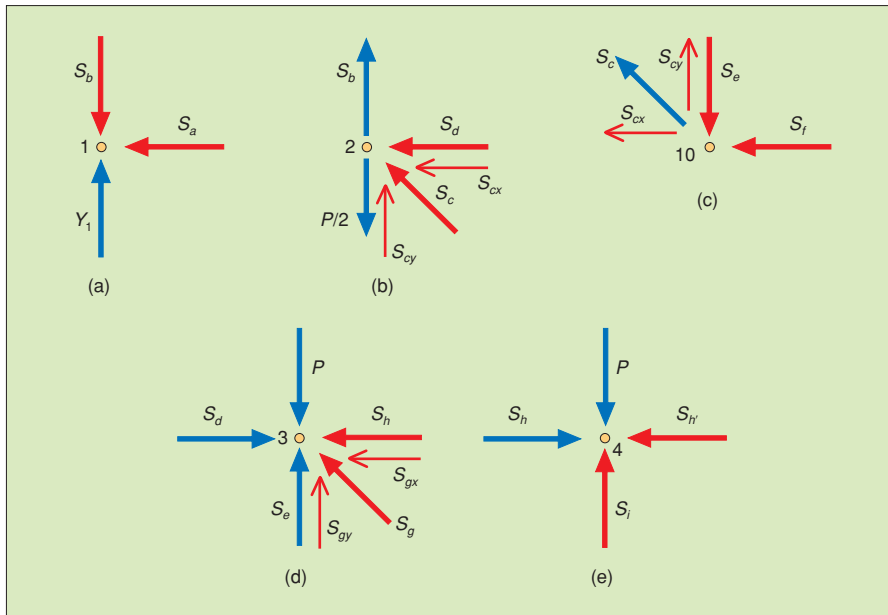


FIGURA 23 Trave tipo Mohniè.


FIGURA 24 Equilibrio dei nodi.

Essendo in questo caso $\alpha = 45^\circ$, risulta:

$$S_{c\alpha} = S_{cy} = S_c \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il sistema di equilibrio diventa:

$$\begin{cases} -S_d - S_{c\alpha} = -S_d - S_c \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ S_{cy} + S_b - \frac{P}{2} = S_c \frac{\sqrt{2}}{2} + 2P - \frac{P}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{da cui segue} \quad \begin{cases} S_c = -\frac{3}{2}P\sqrt{2} \\ S_d = +\frac{3}{2}P \end{cases}$$

Poiché lo sforzo dell'asta c risulta negativo, quell'asta non è, come si era supposto, un puntone, ma un tirante.

- **Nodo 10** (► FIGURA 24c). Si ha:

$$\begin{cases} -S_{c\alpha} - S_f = -\frac{3}{2}P\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_f = 0 \\ S_{cy} - S_e = +\frac{3}{2}P\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_e = 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$S_f = -\frac{3}{2}P \quad (\text{l'asta } f \text{ è un tirante}) \quad S_e = +\frac{3}{2}P \quad (\text{l'asta } e \text{ è un puntone})$$

- **Nodo 3** (► FIGURA 24d). Si ha:

$$\begin{cases} -S_h - S_{gx} + S_d = -S_h - S_g \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}P = 0 \\ S_e - P + S_{gy} = \frac{3}{2}P - P + S_g \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

►2 Un'altra possibile successione può essere:

4 → 3 → 2 → 1 → 5

o anche:

1 → 2 → 4 → 3 → 5

da cui segue:

$$S_g = -P \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (l'asta } g \text{ è un tirante)} \quad S_h = 2P \text{ (l'asta } h \text{ è un puntone)}$$

• **Nodo 4** (►FIGURA 24e). La simmetria del nodo e l'allineamento delle aste orizzontali suggeriscono subito che:

$$S_h = S_{h'} \quad S_i = P \text{ (l'asta } i \text{ è un puntone)}$$

• **Procedimento grafico**

Occorre imporre in ogni nodo l'equilibrio del sistema di forze concorrenti, formato dagli sforzi nelle aste (di cui al massimo due incogniti) e da eventuali forze esterne (carichi o reazioni vincolari).

Poiché si deve imporre il solo equilibrio alla traslazione, è sufficiente imporre che sia chiuso il poligono delle forze.

Per calcolare gli sforzi di tutte le aste di un generico elemento reticolare (per esempio, lo stesso di ►FIGURA 25), è obbligatorio iniziare da un nodo nel quale concorrono non più di due aste e proseguire via via con nodi nei quali non concorrono più di due aste di sforzo incognito. Sostituiti i vincoli esterni con le reazioni, la trave è soggetta al sistema equilibrato delle forze esterne P_2, P_5, R_1, R_4 (►FIGURA 26). Per calcolare le reazioni interne imponendo l'equilibrio dei nodi (►FIGURA 27), si può indifferentemente iniziare dal nodo 1 o dal nodo 4, nei quali concorrono solo due sforzi incogniti. Una possibile successione dei poligoni di equilibrio può essere (►2):

1 → 2 → 3 → 4 → 5

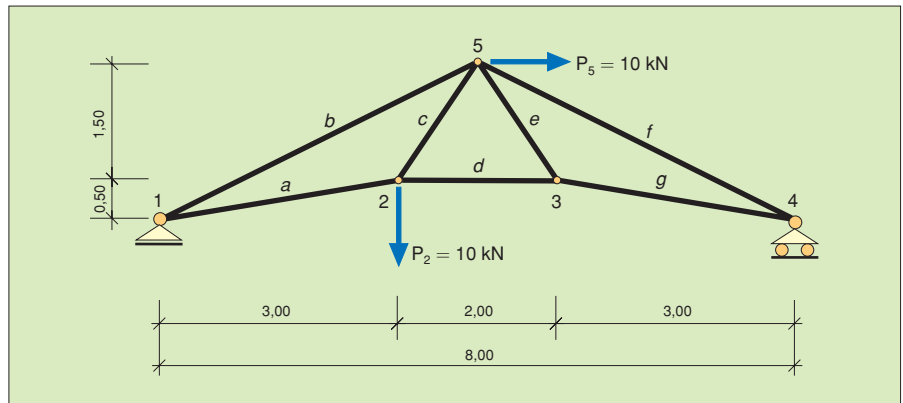


FIGURA 25 Trave tipo Polonceau.

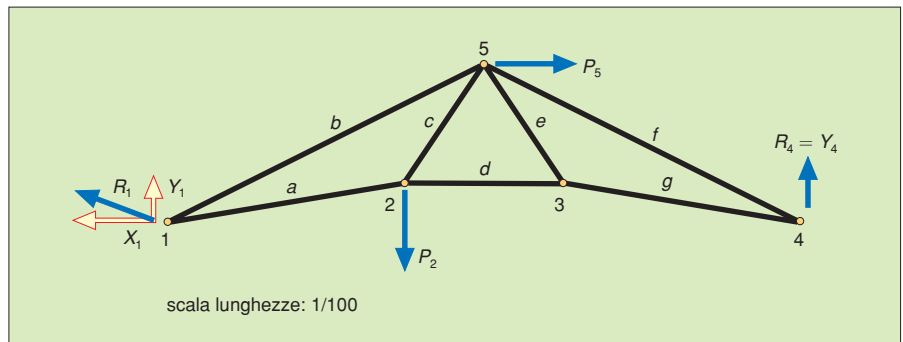


FIGURA 26 Sistema equilibrato delle forze esterne.

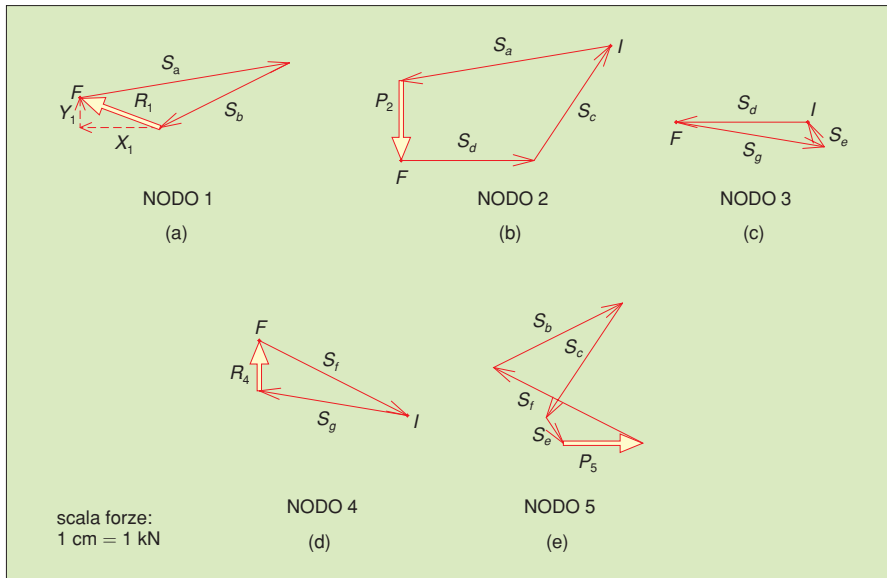


FIGURA 27 Poligoni di equilibrio dei nodi.

Il sistema delle forze concorrenti nel nodo 1 è costituito da:

- la forza nota \mathbf{R}_1 (o le sue componenti $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1$);
- gli sforzi incogniti \mathbf{S}_a e \mathbf{S}_b .

La forza nota \mathbf{R}_1 va scomposta (► FIGURA 27a) nelle direzioni degli sforzi incogniti \mathbf{S}_a e \mathbf{S}_b ossia nelle direzioni delle aste a e b . Dal punto iniziale I del vettore \mathbf{R}_1 va tracciata la parallela all'asta a (o all'asta b) e, dal punto finale F , la parallela all'asta b (o all'asta a). Gli sforzi \mathbf{S}_a e \mathbf{S}_b restano determinati, in quanto:

- i moduli si ottengono moltiplicando per il fattore di scala la lunghezza dei segmenti orientati che li rappresentano;
- i versi sono determinati dal senso di \mathbf{R}_1 , che stabilisce il *senso di percorrenza* del poligono delle forze.

Per stabilire se le aste a e b sono tese o compresse, si procede come segue: immaginando di trasportare il vettore \mathbf{S}_a sull'asta a , si vede che lo sforzo esce dal nodo 1, e quindi l'asta a è un tirante. Eseguendo la stessa operazione con lo sforzo \mathbf{S}_b , si vede che esso entra nel nodo 1, e quindi l'asta b è un puntone.

Si può ora passare a equilibrare il nodo 2 (► FIGURA 27b), in cui concorrono:

- le forze note \mathbf{P}_2 e \mathbf{S}_a ;
- i due sforzi incogniti \mathbf{S}_c e \mathbf{S}_d .

Dal poligono di equilibrio del nodo 1 si sa che lo sforzo \mathbf{S}_a del tirante a esce dal nodo 1; \mathbf{S}_a deve uscire anche dal nodo 2.

Passando da un nodo all'altro, lo sforzo delle aste cambia di verso.

Disposte *testa-coda* le forze note del nodo 2, si manda la parallela all'asta c dall'estremo iniziale I e la parallela all'asta d dall'estremo F del poligono delle forze note (o viceversa). Restano determinati gli sforzi \mathbf{S}_c e \mathbf{S}_d ; sia l'asta c sia l'asta d sono tese, perché i rispettivi sforzi escono dal nodo 2.

Si può ora passare al nodo 3 (► FIGURA 27c), dove concorrono la forza nota \mathbf{S}_d e le forze incognite \mathbf{S}_e e \mathbf{S}_g . Le aste e e g risultano entrambe tese.

Imponendo l'equilibrio del nodo 4 (► FIGURA 27d) si determina lo sforzo incognito \mathbf{S}_f , che risulta di compressione.

Nel nodo 5 (► FIGURA 27e) concorrono cinque forze ormai tutte note: il poligono delle forze, a meno degli inevitabili errori grafici, deve risultare chiuso.

Il quadro riassuntivo delle reazioni della reticolare assegnata è riassunto nella TABELLA 1.

TABELLA 1

Reazioni esterne	Aste	Sforzi nelle aste (kN)	
		Tiranti	Puntoni
	a	26,35	
	b		17,90
$X_1 = 10 \text{ kN} \leftarrow$	c	17,20	
$Y_1 = 3,75 \text{ kN} \uparrow$	d	16,67	
$Y_4 = 6,25 \text{ kN} \uparrow$	e	3,70	
	f	20,70	
	g		18,80

• **Metodo di Cremona**

Il metodo di Cremona (►3) costituisce un'interessante razionalizzazione del metodo grafico dell'equilibrio dei nodi. Quest'ultimo ha, infatti, un evidente svantaggio: lo sforzo di ogni asta, calcolato con il poligono di equilibrio di un nodo, deve essere ridisegnato (cambiato di segno) nel poligono di equilibrio dell'altro nodo cui l'asta è collegata. I risultati sarebbero più precisi e la risoluzione più veloce se si potessero riunire tutti i poligoni di equilibrio in un'unica figura.

Si immagini dunque, una volta disegnati i poligoni di equilibrio di tutti i nodi, di sovrapporre (► FIGURA 28) al poligono delle forze 1 il poligono delle forze 2, facendo coincidere i lati S_b che appaiono in entrambi. Alla figura così ottenuta si sovrapponga il poligono delle forze 3, facendo coincidere i lati S_a che compaiono in entrambi. Procedendo, con lo stesso criterio, alla sovrapposizione di tutti i poligoni di equilibrio si ottiene la ► FIGURA 29, in cui la scala è stata raddoppiata per migliorare la leggibilità.

►3 Dal nome del matematico Luigi Cremona (1830-1903).

La figura che riunisce i poligoni di equilibrio di tutti i nodi di un elemento reticolare è detta **diagramma cremoniano** (o semplicemente **cremoniano**) degli sforzi delle aste.

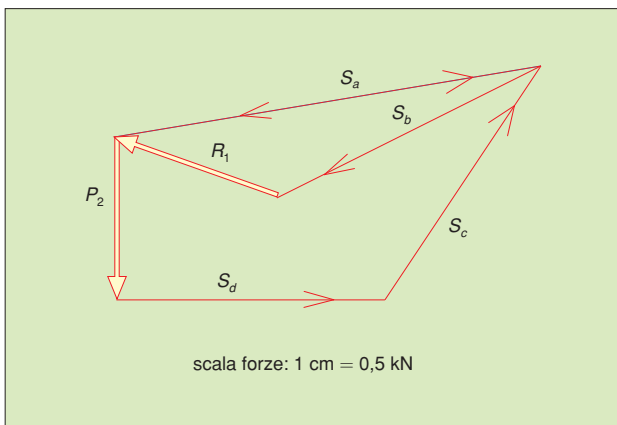


FIGURA 28 Unione dei poligoni di equilibrio dei nodi 1 e 2.

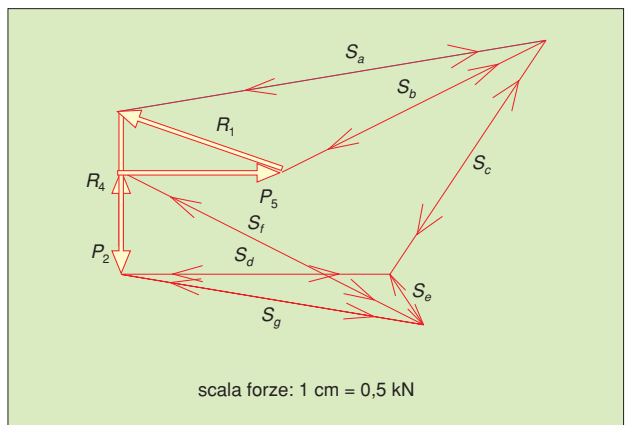
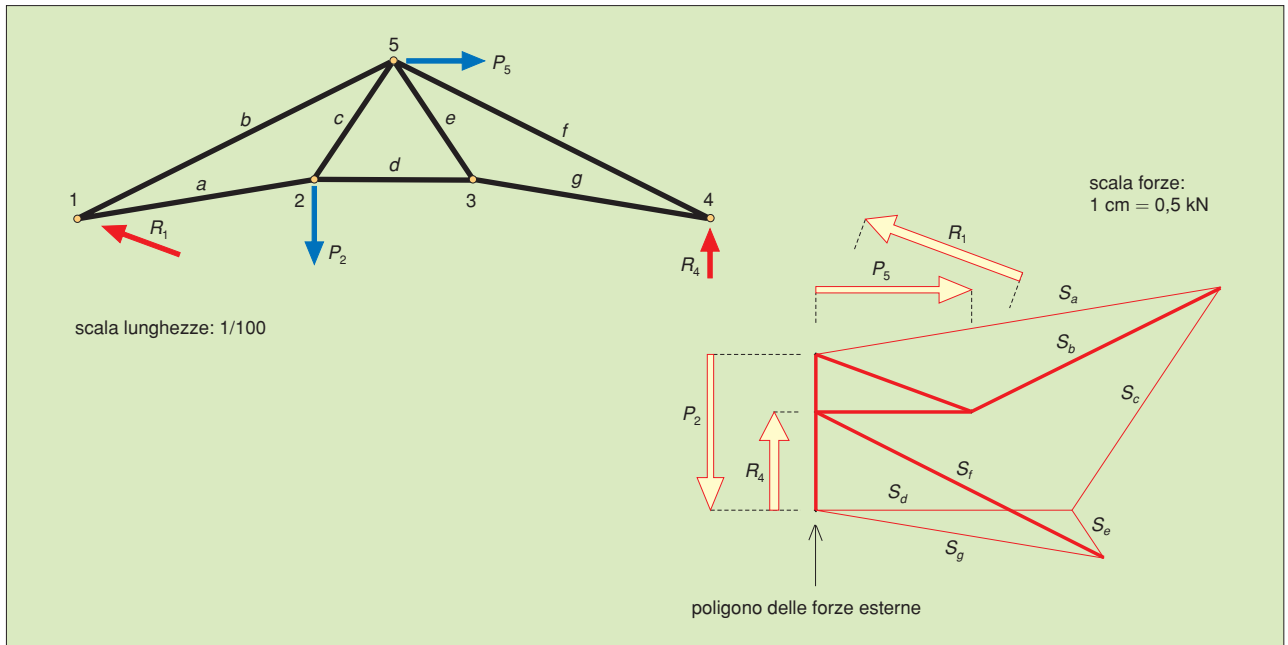


FIGURA 29 Unione di tutti i poligoni di equilibrio.



Si noti che:

- si è automaticamente formato il poligono (chiuso) delle forze esterne;
- ogni sforzo risulta contrassegnato da una doppia freccia, che rende la figura assai poco chiara.

Per leggere con chiarezza un cremoniano è indispensabile cambiare la rappresentazione vettoriale degli sforzi, convenendo di disegnare, per esempio:

- in linea fine i segmenti rappresentativi degli sforzi di trazione;
- in linea spessa i segmenti rappresentativi degli sforzi di compressione.

Nella ►FIGURA 30 sono rappresentati la trave reticolare assegnata e il relativo cremoniano. Il poligono delle forze esterne è disegnato in linea in colore e, per maggiore chiarezza, le forze che lo compongono sono riportate all'esterno.

FIGURA 30 Trave reticolare e cremoniano delle forze.

APPLICAZIONE

Tracciare il cremoniano relativo alla trave di ►FIGURA 31.

Trovate le reazioni dei vincoli esterni (►4), si disegna il poligono delle forze esterne e si inizia la costruzione del cremoniano. Per evitare che questa *si blocchi*, è importante passare da un nodo all'altro percorrendo il contorno della reticolare in un senso prefissato. Sia nel poligono delle forze esterne sia nei poligoni di equilibrio dei nodi, le forze dovranno susseguirsi nello stesso ordine. Si può scegliere, per esempio, il senso destrogiro per la successione dei nodi e delle forze. Nel nodo 1 si devono equilibrare nell'ordine i vettori concorrenti \mathbf{Y}_1 , \mathbf{S}_b , \mathbf{S}_c . \mathbf{S}_a è chiaramente nullo, perché nessun altro vettore orizzontale concorre nel nodo; \mathbf{Y}_1 e \mathbf{S}_b , avendo la stessa retta d'azione, devono avere intensità uguali e opposte. Poiché \mathbf{S}_b entra nel nodo 1, è uno sforzo di compressione e va disegnato in linea spessa.

Percorrendo la struttura in senso destrogiro, si incontra per primo il nodo 2, dove concorrono nell'ordine i vettori \mathbf{S}_b , \mathbf{P}_2 , \mathbf{S}_d , \mathbf{S}_c . Si considerano dapprima le forze note, che si trovano già disegnate nel giusto ordine destrogiro: per prima \mathbf{S}_b , entrante nel nodo 2; poi \mathbf{P}_2 sul poligono delle forze. Dal punto finale di \mathbf{P}_2 si manda la parallela all'asta d ; dal punto iniziale di \mathbf{S}_b si manda la parallela all'asta c . L'intersezione tra le due rette determina gli sforzi nelle aste c e d a esse parallele. \mathbf{S}_c , che esce dal nodo 2, è uno sforzo di trazione e va disegnato in linea fine; \mathbf{S}_d , che entra nel nodo 2, è uno sforzo di compressione e va disegnato in linea spessa.

►4 Per simmetria si ha subito:

$$X_1 = 0$$

$$Y_1 = Y_7 = 2P$$

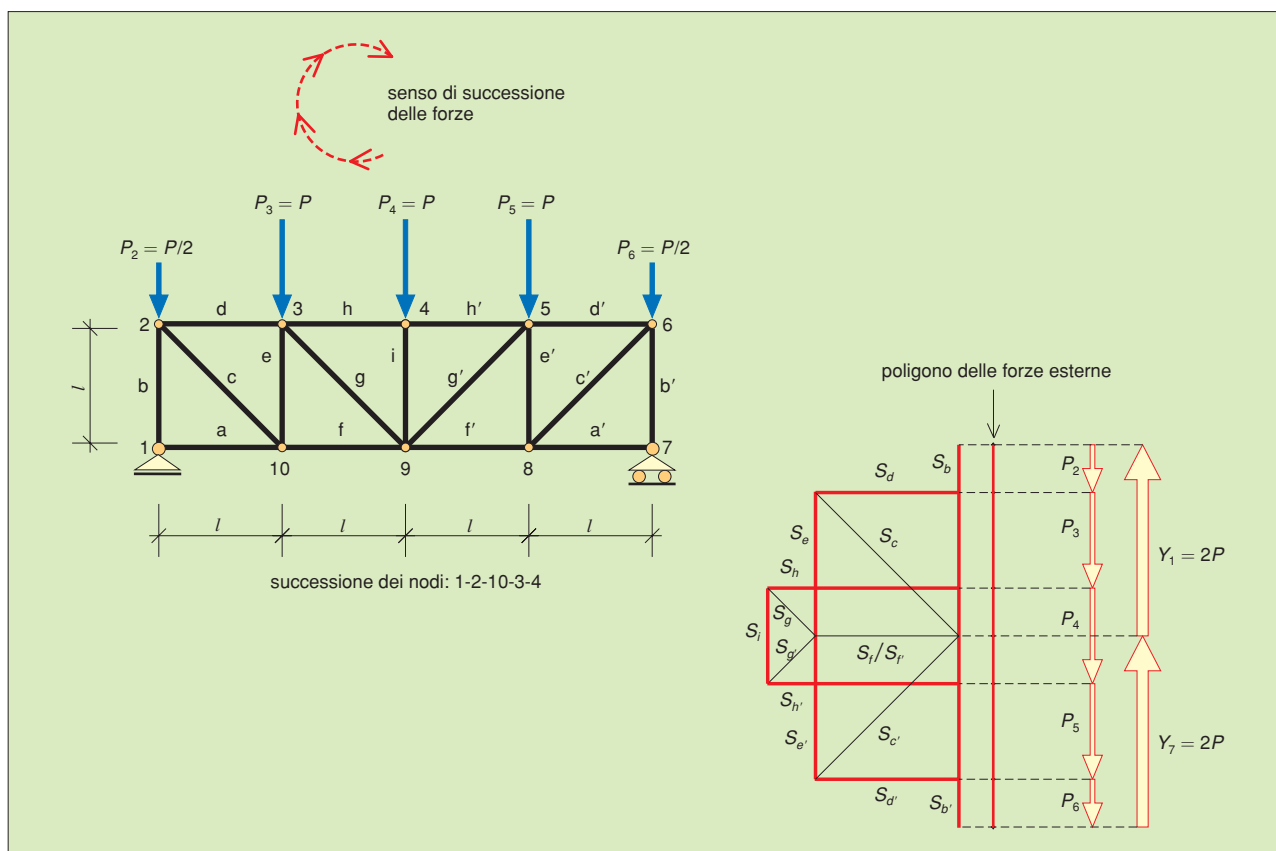


FIGURA 31 Trave tipo Mohniè e cremoniano delle forze.

TABELLA 2

Reazioni dei vincoli esterni	Aste	Sforzi nelle aste	
		Tiranti	Puntoni
	a, a'	Asta scarica	
	b, b'		$2P$
$X_1 = 0$	c, c'	$\frac{3}{2}P\sqrt{2}$	
$Y_1 = 2P \uparrow$	d, d'		$\frac{3}{2}P$
$Y_7 = 2P \uparrow$	e, e'		$\frac{3}{2}P$
	f, f'	$\frac{3}{2}P$	
	g, g'	$\frac{P}{2}\sqrt{2}$	
	h, h'		$2P$
	i		P

Sempre procedendo in senso destrogiro si incontra il nodo 3, dove però concorrono due forze note (S_d e P_3) e ben tre incognite (S_{hr} , S_{gr} , S_e). Si è costretti, quindi, a passare al nodo 10 e successivamente ai nodi 3 e 4.

Equilibrato il nodo 4, non è necessario procedere, perché gli sforzi delle rimanenti aste sono noti per la simmetria della trave.

Il quadro riassuntivo delle reazioni della reticolare assegnata è riportato nella

► TABELLA 2.

► 5 Wilhelm Ritter, matematico svizzero (1847-1882).

■ Metodo dell'equilibrio delle aste

Questo procedimento, sempre basato sull'equilibrio, deriva dalla possibilità di sezionare, con particolari criteri, l'elemento reticolare in due parti e di imporre l'equilibrio delle singole parti.

Con questo metodo si può calcolare, di volta in volta, lo sforzo in una sola asta.

Si supponga per esempio di volere determinare lo sforzo nell'asta f della trave reticolare del paragrafo precedente (► FIGURA 32). Dopo avere calcolato le reazioni dei vincoli esterni, si tagli la trave secondo una particolare sezione S , detta *sezione di Ritter* (► 5).

Si dice **sezione di Ritter** una sezione che taglia contemporaneamente l'asta oggetto di calcolo e altre due aste. Le tre aste tagliate non devono essere concorrenti.

Soppresse le tre aste tagliate (in questo caso f , g , h) la trave resta divisa in due parti ognuna delle quali deve restare in equilibrio se alle aste soppresse si sostituiscono gli sforzi trasmessi da queste ai nodi (► FIGURA 33). È possibile imporre separatamente l'equilibrio alla rotazione e l'equilibrio alla traslazione.

● Equilibrio alla rotazione

L'equilibrio alla rotazione deve sussistere rispetto a qualsiasi punto del piano; se però il punto è scelto con accortezza, lo sforzo di una delle tre aste tagliate dalla sezione di Ritter viene immediatamente determinato.

Imponendo l'equilibrio alla rotazione di uno dei due tronchi di trave rispetto al *polo* di un'asta, resta determinato lo sforzo dell'asta stessa.

Si definisce **polo** di un'asta il punto intersezione tra le altre due aste tagliate dalla sezione di Ritter.

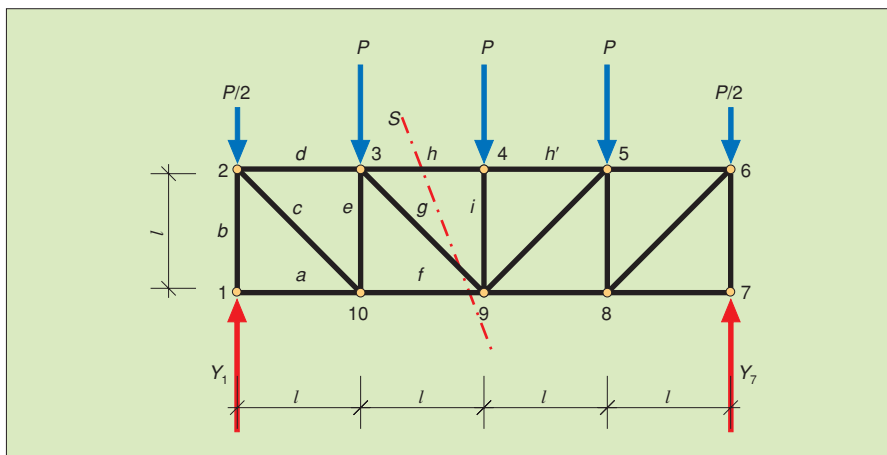
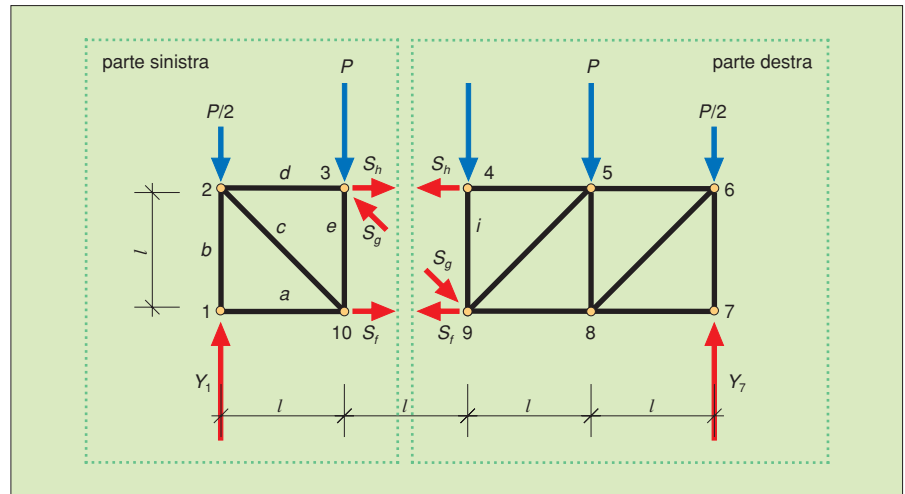


FIGURA 32 Sezione di Ritter.

FIGURA 33 Le due parti della trave devono essere in equilibrio.



Per esempio, il polo dell'asta f coincide con il nodo 3. Scrivendo l'equazione:

$$\sum M(3) = 0$$

per la parte destra o sinistra della trave, si determina lo sforzo S_f . L'equazione, infatti, contiene la sola incognita S_f perché gli sforzi delle aste g e h , passando entrambi per il punto 3, hanno momento nullo.

Per la parte sinistra della struttura, si ha:

$$Y_1 \cdot l - \frac{P}{2} \cdot l - S_f \cdot l = 0$$

da cui segue:

$$S_f = \frac{3}{2} P$$

Per la parte destra (►6):

$$P \cdot l + P \cdot 2l + \frac{P}{2} \cdot 3l - Y_7 \cdot 3l + S_f \cdot l = 0$$

da cui ancora:

$$S_f = \frac{3}{2} P$$

Il segno positivo dello sforzo conferma che il verso, assegnato in modo casuale allo sforzo S_f , è quello giusto. Visto, inoltre, che tale sforzo esce dal nodo (dal nodo 10 se si lavora con la parte sinistra della trave, dal nodo 9 se si lavora con la parte destra), S_f è uno sforzo di trazione e l'asta f è un tirante.

Si consideri, nella stessa sezione di Ritter, l'asta h e il suo polo 9. Lo sforzo S_h si può calcolare imponendo, per esempio, l'equilibrio alla rotazione della parte sinistra della reticolare:

$$\sum M(9) = 0$$

Sostituendo, si ha:

$$Y_1 \cdot 2l - \frac{P}{2} \cdot 2l - P \cdot l + S_h \cdot l = 0 \quad \text{da cui segue:} \quad S_h = -2P$$

►6 Conviene chiaramente imporre l'equilibrio della parte di reticolare che contiene meno forze.

Il segno negativo fa capire che il verso scelto per S_h è sbagliato; entrando nel nodo 3, S_h è uno sforzo di compressione e l'asta h è un puntone.

• Equilibrio alla traslazione

Il metodo dell'equilibrio alla rotazione cade in difetto quando il polo dell'asta è all'infinito.

Volendo, per esempio, calcolare lo sforzo nell'asta g , si vede che il suo polo si trova all'infinito, perché le altre due aste tagliate dalla sezione di Ritter (h e f) sono parallele tra loro. In questi casi si è costretti a imporre l'equilibrio alla traslazione.

Scomposto lo sforzo S_g nelle direzioni x e y (► FIGURA 34), si può imporre l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$\sum Y = 0$$

Considerando la parte sinistra della trave, si ha:

$$2P - \frac{P}{2} - P + S_g \cdot \sin \alpha = 0 \quad \text{e quindi} \quad \frac{P}{2} + S_g \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

da cui segue:

$$S_g = -\frac{P}{2}\sqrt{2} \quad (\text{l'asta } g \text{ è un tirante})$$

Imporre l'equilibrio alla traslazione è conveniente anche quando il polo, pur non trovandosi all'infinito, cade fuori dal foglio (► FIGURA 35) o quando è comunque laborioso determinare analiticamente la distanza tra un'asta e il suo polo (► FIGURA 36).

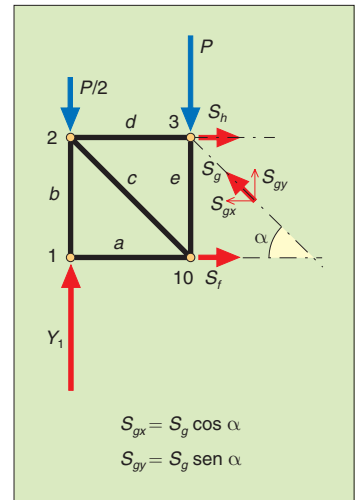


FIGURA 34 Lo sforzo S_g va scomposto secondo gli assi cartesiani.

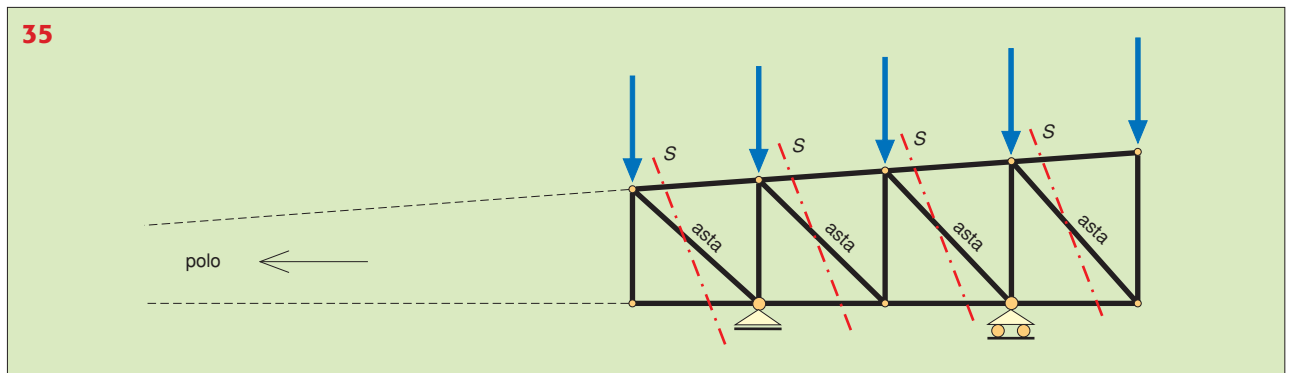


FIGURA 35 Il polo delle aste diagonali cade fuori dal foglio.

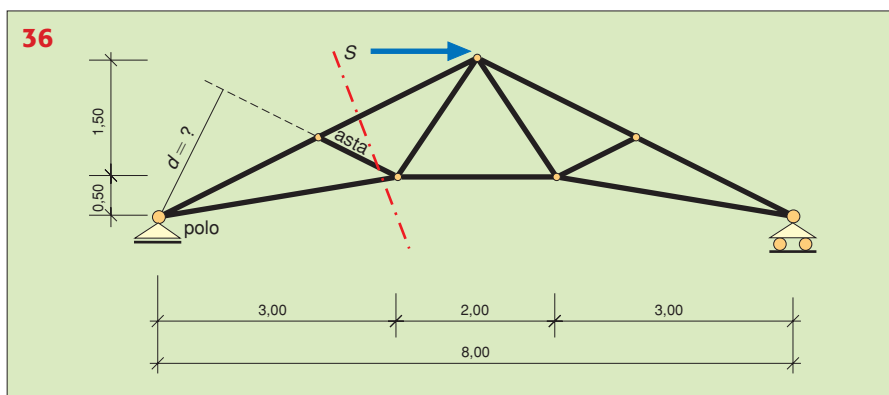


FIGURA 36 La distanza dell'asta dal suo polo è di laboriosa determinazione.

Autovalutazione

A. Verifica delle conoscenze

QUESITI VERO/FALSO

- | | V | F |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1 Una cerniera interna toglie sempre 2 gradi di libertà | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2 Il sistema di equilibrio è valido per gli elementi rigidi e per gli elementi articolati | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3 La reazione di una cerniera interna ha componenti X e Y | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4 Le equazioni ausiliarie aiutano il sistema dell'equilibrio esterno a risolvere gli elementi articolati | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5 Un arco a tre cerniere è iperstatico | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6 Una trave Gerber può essere isostatica o iperstatica | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7 La trave <i>a shed</i> è a correnti paralleli | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8 Una reticolare a generazione triangolare è un sistema articolato, ma indeformabile | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9 Un puntone è un'asta tesa | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 10 I puntoni sono sempre verticali | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

QUESITI A RISPOSTA SINGOLA

(Una sola risposta è giusta)

- 11** Una sezione di Ritter
- a) taglia due aste concorrenti
 - b) taglia due aste non concorrenti
 - c) taglia tre aste concorrenti
 - d) taglia tre aste non concorrenti
- 12** Per determinare le reazioni vincolari di una trave Gerber
- a) basta considerare che le reazioni interne sono nulle
 - b) basta imporre l'equilibrio delle forze esterne
 - c) basta scrivere le equazioni ausiliarie
 - d) si deve imporre l'equilibrio delle forze esterne e scrivere le equazioni ausiliarie
- 13** Nelle cerniere interne è consentito il movimento relativo di
- a) traslazione verticale
 - b) traslazione orizzontale
 - c) rotazione
 - d) nessun movimento relativo è consentito

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

(Più di una risposta può essere giusta)

- 14** Una capriata semplice
- a) è simmetrica
 - b) è indeformabile
 - c) ha le aste inclinate (puntoni) compresse
 - d) ha l'asta orizzontale (catena) tesa
- 15** Nelle cerniere esterne sono impediti i movimenti di
- a) traslazione verticale
 - b) traslazione orizzontale
 - c) rotazione
 - d) sono impediti tutti i movimenti
- 16** In un arco a tre cerniere caricato simmetricamente le reazioni orizzontali delle cerniere esterne
- a) sono uguali
 - b) sono simmetriche
 - c) aumentano al diminuire della freccia
 - d) aumentano all'aumentare della freccia

QUESITI A RISPOSTA APERTA

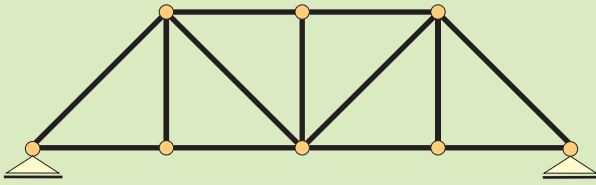
- 17** Descrivi almeno due tipi di arco a tre cerniere, indicando luce, freccia, sezioni di imposta e sezioni di chiave (► par. 3).
- 18** Descrivi tre tipi di trave reticolare *a capriata* e tre tipi di trave reticolare *a correnti paralleli* (► par. 5).
- 19** Descrivi, per una stessa trave Gerber, il metodo della risoluzione in serie e il metodo delle equazioni ausiliarie; decidi quale dei due metodi è più appropriato per la tua trave (► par. 2).

B. Verifica delle competenze

● Esercizi e problemi

- 20** Stabilire se gli elementi articolati assegnati sono isostatici o iperstatici. In quest'ultimo caso si calcoli il grado di iperstaticità.
- 21**
- 22** ► **29** Determinare le reazioni vincolari degli elementi assegnati.
- 30** Determinare lo sforzo dell'asta d della trave Polonceau.
- 31** Determinare gli sforzi in tutte le aste della trave *a shed* assegnata.

20



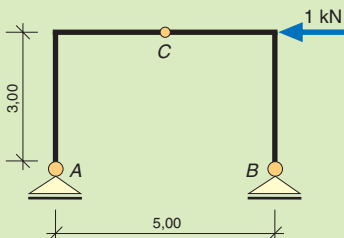
Trave reticolare

21



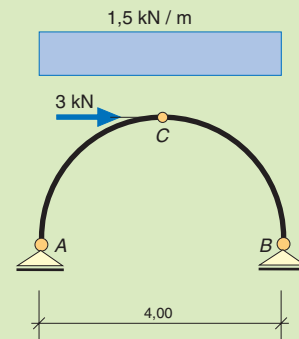
Trave articolata

22

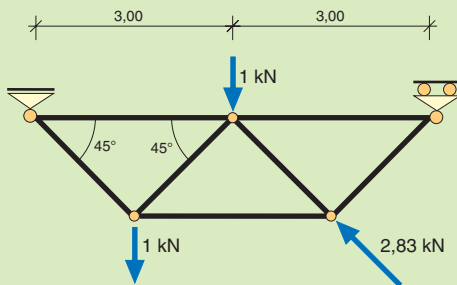


Si noti che l'elemento AC è una biella

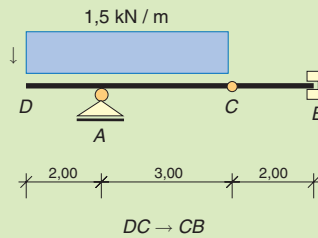
23



24

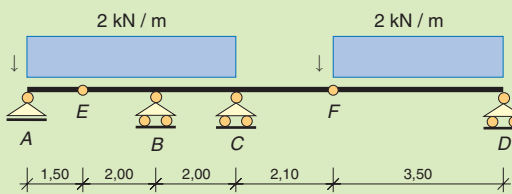


25



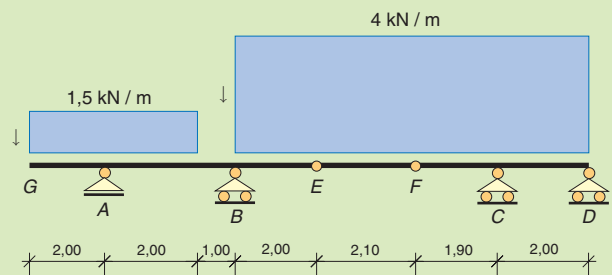
DC → CB

26

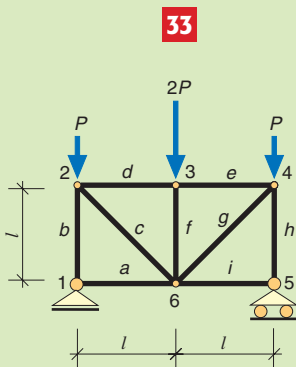
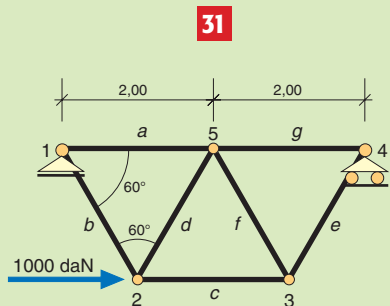
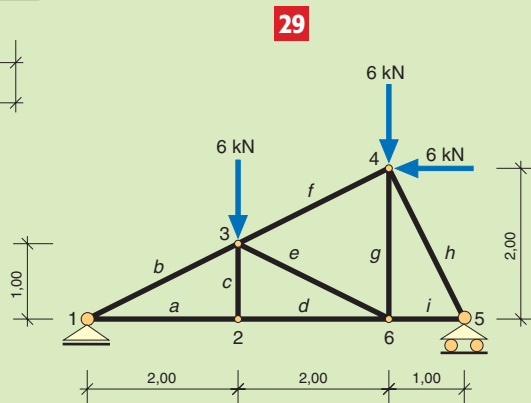
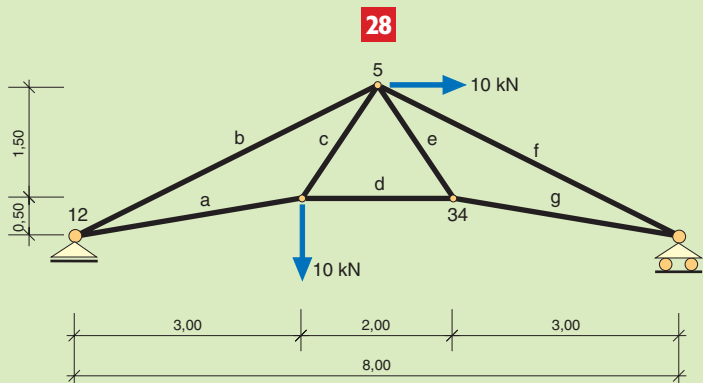


AE (SIMM), FD (SIMM) → EF

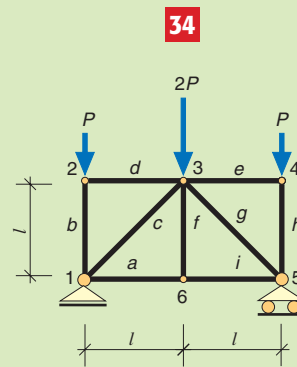
27



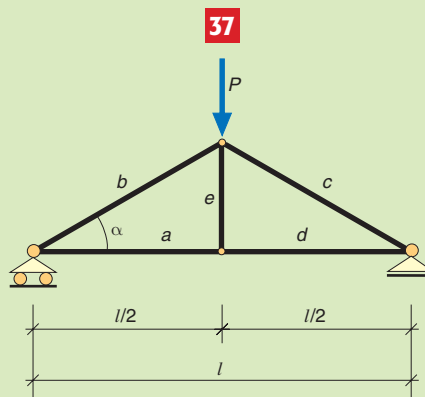
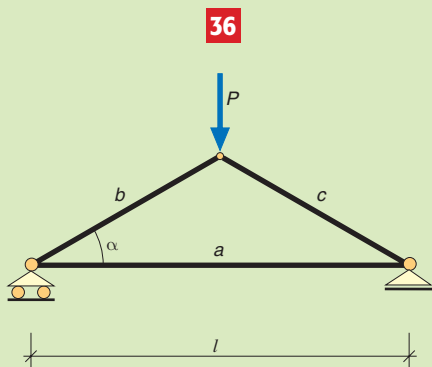
EF (SIMM) → GE, FD



trave Mohniè



trave Howe



- 32** Controllare, imponendo l'equilibrio delle aste, gli sforzi nelle aste c, e, d, g della trave dell'esercizio 10.
- 33** Determinare gli sforzi in tutte le aste della trave Neville assegnata.
- 34** Controllare, imponendo l'equilibrio attraverso una sezione di Ritter, che gli sforzi nelle aste c, d, f della trave dell'esercizio 12 corrispondano alla soluzione precedente.
- 35** Determinare gli sforzi in tutte le aste della trave Mohniè assegnata.
- 36** Determinare gli sforzi in tutte le aste della trave Howe assegnata. Si noti la differenza di segno tra gli sforzi nelle aste diagonali della trave Mohniè e della trave Howe.
- 37** Si ricavano gli sforzi nelle aste a, d, e con il metodo dell'equilibrio delle aste.
- 38** Determinare gli sforzi delle aste della capriata semplice.
- 39** Determinare gli sforzi delle aste della capriata assegnata.

Laboratorio informatico

TT • Modulo 3D

Sforzi nelle aste delle travi reticolari modellate come sistemi di bielle

Per il calcolo degli sforzi nelle aste di travi piane reticolari è necessario servirsi del modulo 3D. Il programma, destinato all'analisi e alle verifiche di strutture tridimensionali, è in questo caso decisamente sottoutilizzato; molti dei dati richiesti, di conseguenza, possono essere ignorati in questa fase, assegnando alle aste una sezione qualsiasi e un qualsiasi materiale omogeneo.

Sono disponibili due menu: il primo (DISEGNO) contiene i comandi per la modellazione della struttura; il secondo (CALCOLO E VERIFICHE) contenente i comandi per l'analisi, la lettura e la stampa dei risultati.

Inserimento dei dati

Il comandi del menu DISEGNO, tipici della modellazione agli elementi finiti (v. *Prontuario*), sono i seguenti.

NODI, per definire i punti che costituiscono gli estremi delle aste.

ASTE, per disegnare puntoni e tiranti. È anche possibile, in alternativa, impostare direttamente tra due nodi vari modelli reticolari, utilizzando l'apposita icona del menu.

VINCOLI, per impedire o liberare possibilità di movimento dei nodi o delle aste. Si distinguono:

- *vincoli esterni*, che fanno riferimento a rotazioni e spostamenti del nodo;
- *vincoli interni*, che fanno riferimento a rotazioni e spostamenti degli estremi delle aste.

In entrambi i casi le rotazioni e gli spostamenti sono riferiti alle direzioni x, y, z della *terna globale di riferimento*, sempre indicata a video.

• **VINCOLI ESTERNI.** Quando si *vincola a terra*, si crea automaticamente un incastro perfetto tra il nodo e l'esterno (tutte le caselle sono spuntate). Per definire un vincolo diverso si deve togliere il segno di spunta del movimento che si vuole consentire. Per esempio, per ottenere l'appoggio fisso nel piano $x-z$ si deve liberare la *rotazione attorno a y*; per ottenere l'appoggio scorrevole, si deve liberare la *rotazione attorno a y* e la *traslazione x*. Per non risultare labile nello spazio, una struttura piana con 6 gradi di libertà deve possedere almeno 6 gradi di vincolo opportunamente disposti.

• **VINCOLI INTERNI.** Quando vengono disegnate due o più aste convergenti in un nodo, automaticamente si crea un incastro interno. Per modellare una cerniera interna che collega n aste senza creare labilità, si devono svincolare gli estremi di $n - 1$ aste, procedendo come nel caso dei vincoli esterni.

Concettualmente equivalente al vincolo interno è il comando **SVINCOLO INTERNO**, che costituisce il modo più semplice di creare un modello reticolare di aste *truss* (bielle). In questo caso, però, i movimenti sono riferiti alla *terna locale*: la direzione x coincide con l'asse dell'asta, mentre y e z , perpendicolari a x , sono diretti secondo gli assi principali d'inerzia della sezione; la terna locale può essere visualizzata cliccando sull'asta con il tasto sinistro del mouse. La configurazione di incastro perfetto tra le aste ha tutte le caselle vuote; per passare da un'asta *beam* a un'asta *truss* è sufficiente liberare la rotazione attorno all'asse z di entrambi gli estremi dell'asta, spuntando la casella M_z .

CARICHI. Il modo più semplice per introdurre un carico nodale è quello di seguire la seguente sequenza:

clic sul nodo selezionato → imposta carichi → nodi →
→ aggiungi → carico nodale → valore [] →
→ direzione ($-z$).

Calcolo e lettura dei risultati

Con i comandi del menu CALCOLO E VERIFICHE si richiede il calcolo della struttura, che può essere eseguito con varie modalità (volume 2). Ignorando qualsiasi altra richiesta, si procede secondo la sequenza:

calcola → analisi statica → ok → calcola

Nel pannello di destra, dopo avere scelto METODO DI COMBINAZIONE DEI CARICHI → TA, si possono visualizzare gli sforzi nelle aste (diagrammi delle aste → azione assiale N). Valori negativi indicano sforzi di compressione, rappresentati in blu (le aste sono puntoni); valori positivi indicano sforzi di trazione, rappresentati in rosso (le aste sono tiranti).

Risultati dei quesiti vero/falso

1F, 2V, 3V, 4V, 5F, 6F, 7F, 8V, 9F, 10F.

Risultati dei quesiti a risposta singola

11d, 12d, 13c.

Risultati dei quesiti a risposta multipla

14abcd, 15ab, 16bc.

Risultati della verifica delle competenze

20 L'elemento è una volta iperstatico

21 L'elemento è isostatico

22 $X_A = X_B = 0,5 \text{ kN} \rightarrow$; $Y_A = 0,6 \text{ kN} \uparrow$; $Y_B = 0,6 \text{ kN} \downarrow$

23 $X_A = 0$; $Y_A = 1,5 \text{ kN} \uparrow$; $X_B = 3 \text{ kN} \leftarrow$; $Y_B = 4,5 \text{ kN} \uparrow$

24 $X_A = 2 \text{ kN} \rightarrow$; $Y_A = 0,25 \text{ kN} \uparrow$; $Y_B = 0,25 \text{ kN} \downarrow$

25 $Y_A = 6,25 \text{ kN} \uparrow$; $X_B = 0$; $Y_B = 1,25 \text{ kN} \uparrow$;

$M_B = 2,5 \text{ kN} \cdot \text{m orario}$

26 $X_A = 0$; $Y_A = 1,5 \text{ kN} \uparrow$; $Y_B = 7,325 \text{ kN} \uparrow$; $Y_C = 5,675 \text{ kN} \uparrow$;

$Y_D = 3,5 \text{ kN} \uparrow$

27 $X_A = 0$; $Y_A = 0,53 \text{ kN} \uparrow$; $Y_B = 17,67 \text{ kN} \uparrow$; $Y_C = 23,4 \text{ kN} \uparrow$;

$Y_D = 3,6 \text{ kN} \downarrow$

28 $S_d = 16,67 \text{ kN}$ (di trazione)

29-30 Reazioni dei vincoli esterni:

$Y_1 = 7,2 \text{ kN} \uparrow$; $X_5 = 6,0 \text{ kN} \rightarrow$; $Y_5 = 4,8 \text{ kN} \uparrow$

Aste: tiranti (t), puntoni (p) e valori degli sforzi in kN:

$a = t, 14,40$; $b = p, 16,10$; $c = \text{asta scarica}$;

$d = t, 14,40$; $e = p, 6,71$; $f = p, 9,40$;

$g = p, 3,00$; $h = p, 5,37$; $i = t, 8,40$

31-32 Reazioni dei vincoli esterni:

$Y_1 = 432 \text{ daN} \uparrow$; $X_1 = 1000 \text{ daN} \leftarrow$;

$Y_4 = 432 \text{ daN} \downarrow$

Aste: tiranti (t), puntoni (p) e valori degli sforzi in daN:

$a = t, 750$; $b = t, 500$;

$c = p, 500$; $d = p, 500$;

$e = p, 500$; $f = t, 500$;

$g = t, 250$

33 Reazioni dei vincoli esterni:

$Y_1 = 2P \uparrow$; $Y_5 = 2P \uparrow$

Aste: tiranti (t), puntoni (p) e valori degli sforzi:

$a, i = \text{aste scariche}$ $b, h = p, 2P$; $c, g = t, \sqrt{2} P$;

$d, e = p, P$; $f = p, 2P$

34-35 Reazioni dei vincoli esterni:

$Y_1 = 2P \uparrow$; $Y_5 = 2P \uparrow$

Aste: tiranti (t), puntoni (p) e valori degli sforzi:

$a, i = t, P$; $b, h = p, P$; $c, g = p, \sqrt{2} P$;

$d, e = \text{aste scariche}$ $f = \text{asta scarica}$

36 Reazioni dei vincoli esterni:

$Y_1 = P/2 \uparrow$; $Y_3 = P/2 \uparrow$

Aste: tiranti (t), puntoni (p) e valori degli sforzi:

$a = t, P/2 \cdot \text{tg } \alpha$; $b, c = p, P/2 \cdot \text{sen } \alpha$

37 Reazioni dei vincoli esterni:

$Y_1 = P/2 \uparrow$; $Y_5 = P/2 \uparrow$

Aste: tiranti (t), puntoni (p) e valori degli sforzi:

$a, d = t, P/2 \cdot \text{tg } \alpha$; $b, c = p, P/2 \cdot \text{sen } \alpha$;

$e = \text{asta scarica}$