

2. Baricentro di una superficie poliedrica

Consideriamo una **superficie poliedrica** costituita dalle **facce triangolari** ABD e BCD . Siano G_1 , G_2 e G i baricentri, rispettivamente, dei due triangoli e della superficie poliedrica (► FIGURA 1).

Applicando le (1) si possono calcolare le coordinate dei baricentri $G_1(X_{G1}, Y_{G1}, Q_{G1})$ e $G_2(X_{G2}, Y_{G2}, Q_{G2})$. Indichiamo con G_0, G'_1, G'_2 le proiezioni dei baricentri sul piano orizzontale e siano S_1 e S_2 le aree in proiezione orizzontale dei triangoli ABD e BCD . Le aree S_1 e S_2 si calcolano con le **formule di Gauss**. Osservando la **figura 1** e applicando il noto **teorema di Varignon** si ha:

$$S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2} = (S_1 + S_2) \cdot Y_G$$

da cui:

$$Y_G = \frac{S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2}}{S_1 + S_2}$$

Per analogia possono essere ricavate le espressioni:

$$X_G = \frac{S_1 \cdot X_{G1} + S_2 \cdot X_{G2}}{S_1 + S_2} \quad Q_G = \frac{S_1 \cdot Q_{G1} + S_2 \cdot Q_{G2}}{S_1 + S_2}$$

Estendendo il procedimento a una superficie poliedrica composta da un generico numero n di facce triangolari (falde), si ottiene:

$$X_G = \frac{S_1 \cdot X_{G1} + S_2 \cdot X_{G2} + \dots + S_n \cdot X_{Gn}}{S_1 + S_2 + \dots + S_n}$$

$$Y_G = \frac{S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2} + \dots + S_n \cdot Y_{Gn}}{S_1 + S_2 + \dots + S_n} \quad (1)$$

$$Q_G = \frac{S_1 \cdot Q_{G1} + S_2 \cdot Q_{G2} + \dots + S_n \cdot Q_{Gn}}{S_1 + S_2 + \dots + S_n}$$

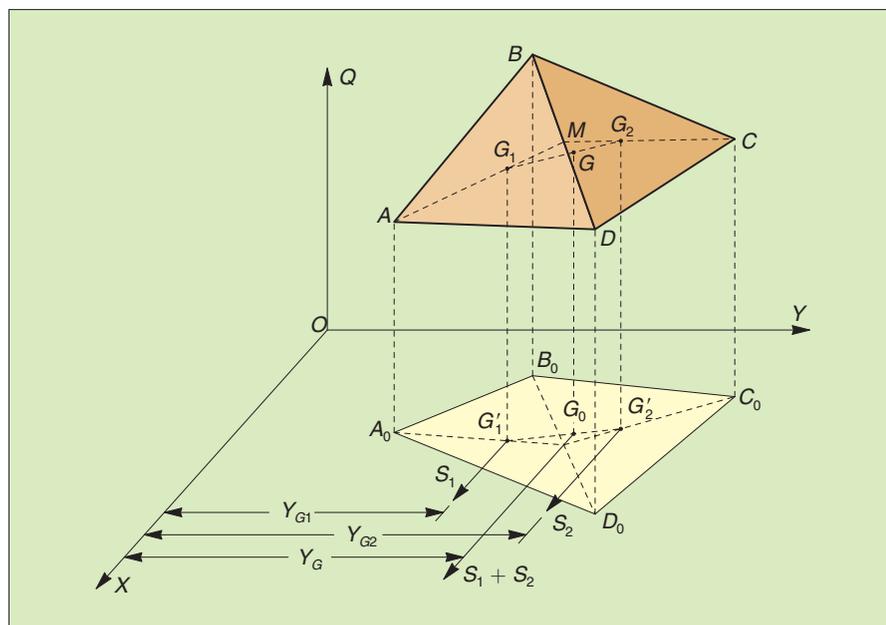


FIGURA 1 Baricentro di una superficie poliedrica di assegnata giacitura spaziale. Le sue coordinate sono fornite dalla media ponderata delle coordinate dei baricentri G_1 e G_2 secondo le aree S_1 e S_2 .

Le (1) consentono di calcolare le **coordinate del baricentro** di una superficie poliedrica a facce triangolari. Le coordinate (X_{Gi}, Y_{Gi}, Q_{Gi}) dei baricentri delle facce triangolari in cui è stato suddiviso il poliedro vengono calcolate mediante le medie delle rispettive coordinate dei vertici. Le aree S_i delle proiezioni orizzontali dei triangoli vengono calcolate applicando le **formule di Gauss** (o altre procedure analoghe).

APPLICAZIONE

Problema Calcolare le coordinate del baricentro della superficie poliedrica rappresentata nella ► FIGURA 1 sapendo che le coordinate dei vertici delle facce triangolari hanno i seguenti valori espressi in metri:

$$\begin{aligned} A &\equiv (72,56; 28,16; 105,78) & B &\equiv (34,35; 58,94; 115,38) \\ C &\equiv (54,28; 93,15; 108,64) & D &\equiv (95,75; 73,24; 103,72) \end{aligned}$$

Soluzione

Con le (1) si calcolano le coordinate dei baricentri G_1 e G_2 dei triangoli ABD e BCD :

$$\begin{aligned} X_{G1} &= (X_A + X_B + X_D)/3 = 67,55 \text{ m} & Y_{G1} &= (Y_A + Y_B + Y_D)/3 = 53,45 \text{ m} \\ Q_{G1} &= (Q_A + Q_B + Q_D)/3 = 108,29 \text{ m} \\ X_{G2} &= (X_B + X_C + X_D)/3 = 61,46 \text{ m} & Y_{G2} &= (Y_B + Y_C + Y_D)/3 = 75,11 \text{ m} \\ Q_{G2} &= (Q_B + Q_C + Q_D)/3 = 109,25 \text{ m} \end{aligned}$$

Per calcolare le aree S_1 e S_2 delle proiezioni orizzontali dei triangoli ABD e BCD si applicano le formule di Gauss:

$$\begin{aligned} S_1 &= Y_A (X_B - X_D) + Y_B (X_D - X_A) + Y_D (X_A - X_B) = \\ &= 28,16 \cdot (-61,40) + 58,94 \cdot 23,19 + 73,24 \cdot 38,21 = 2436,30 \text{ m}^2 \\ S_2 &= Y_B (X_C - X_D) + Y_C (X_D - X_B) + Y_D (X_B - X_C) = \\ &= 58,94 \cdot (-41,47) + 93,15 \cdot 61,40 + 73,24 \cdot (-19,93) = 1815,50 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Con le (2) si calcolano le coordinate del baricentro G della superficie poliedrica $ABCD$:

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{S_1 \cdot X_{G1} + S_2 \cdot X_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{2436,30 \cdot 67,55 + 1815,50 \cdot 61,46}{2436,30 + 1815,50} = 64,95 \text{ m} \\ Y_G &= \frac{S_1 \cdot Y_{G1} + S_2 \cdot Y_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{2436,30 \cdot 53,45 + 1815,50 \cdot 75,11}{2436,30 + 1815,50} = 62,70 \text{ m} \\ Q_G &= \frac{S_1 \cdot Q_{G1} + S_2 \cdot Q_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{2436,30 \cdot 108,29 + 1815,50 \cdot 109,25}{2436,30 + 1815,50} = 108,70 \text{ m} \end{aligned}$$