Mediane e bisettrici

UNITÀ A2

Mediane dei triangoli

Consideriamo nella ▶FIGURA 1*a* i diversi triangoli formati dalle tre mediane. Per il teorema di Carnot applicato prima al triangolo *ABM*, poi a quello *ACM*, ricordando che cos $(200^c - \lambda) = -\cos\lambda$, si ha:

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a\cos\lambda \qquad b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + am_a\cos\lambda$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2$$

e in definitiva:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Analogamente si ha:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \qquad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Bisettrici dei triangoli

Con riferimento alla ▶FIGURA 1*b*, l'**area** del triangolo *ABC* può essere espressa come somma delle aree dei triangoli *ABN* e *ANC*: $S_{ABC} = S_{ABN} + S_{ANC}$. Dunque possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}cn_\alpha\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bn_\alpha\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

Applicando la formula di **duplicazione** al primo membro [sen $\alpha = 2$ sen $(\alpha/2)\cdot$ $\cdot$ cos $(\alpha/2)$], si ha:

$$bc\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}cn_\alpha\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bn_\alpha\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

Dividendo per sen $(\alpha/2)$, si ottiene:

$$bc\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}cn_\alpha + \frac{1}{2}bn_\alpha = \frac{1}{2}n_\alpha(c+b)$$

da cui segue l'espressione definitiva della bisettrice n_α relativa all'angolo α:

$$n_\alpha = \frac{2bc}{c+b}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Analogamente, per le altre bisettrici si ha:

$$n_\beta = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2} \qquad n_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$$

FIGURA 1 Parametri geometrici di un triangolo: *a*) mediane; *b*) bisettrici.