UNITÀ

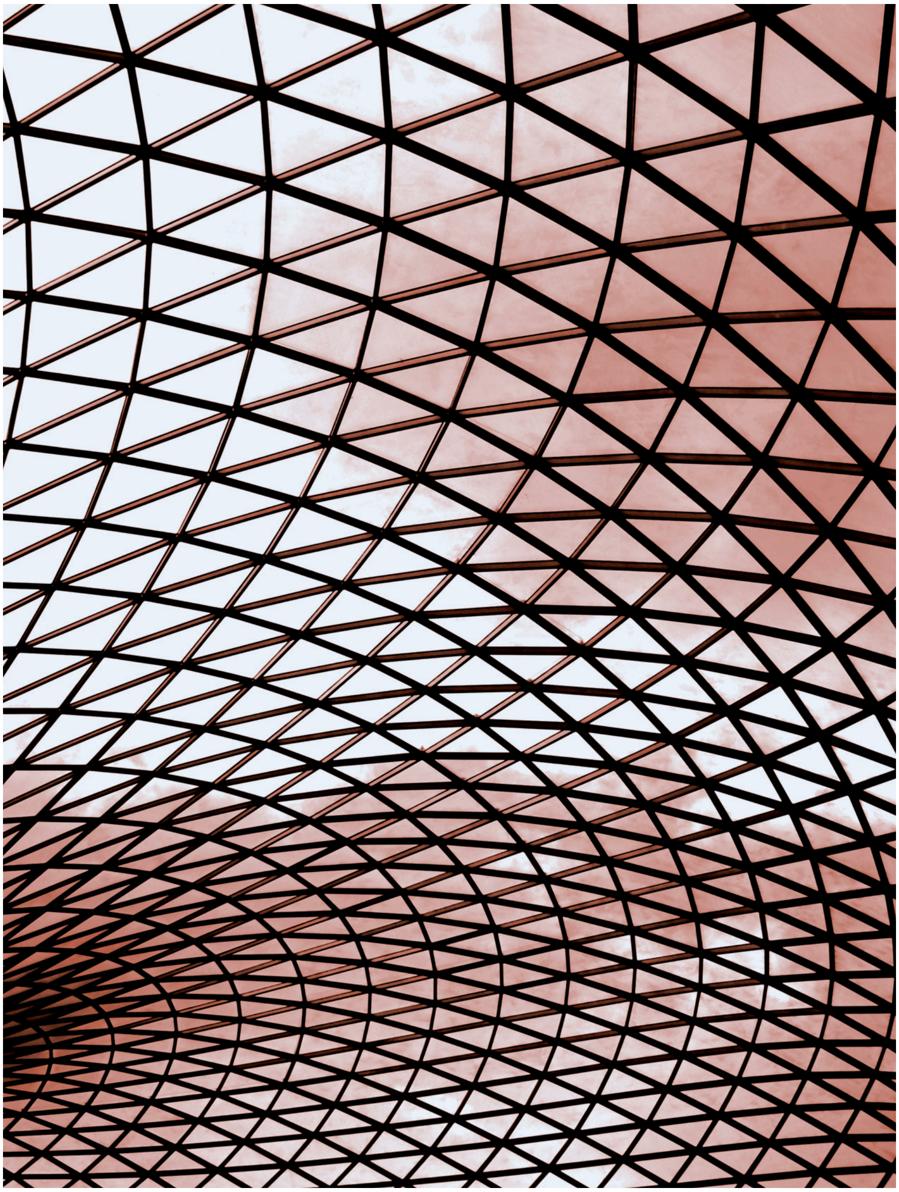
A2

Risoluzione dei triangoli e dei poligoni

TEORIA

LABORATORIO INFORMATICO

AUTOVALUTAZIONE



Alamy Images

È noto che la trigonometria è la scienza matematica che studia le relazioni fra angoli e lati di un triangolo. Questa figura geometrica elementare trova molti riferimenti nell'arte in generale e nell'architettura in particolare, come mostra questa immagine, relativa a un particolare della copertura della Great Hall del British Museum, a Londra.

1. Relazioni tra lati e angoli di un triangolo qualunque (scaleno)

Proprietà dei triangoli

Gli elementi di un triangolo qualunque sono i tre lati e i tre angoli. Per convenzione i **vertici** di un triangolo sono indicati con lettere *maiuscole*, in genere A, B, C, mentre con le lettere *minuscole* corrispondenti, a, b, c, si indicano i **lati** opposti ai rispettivi vertici (▶FIGURA 1). Infine, con le lettere minuscole dell'*alfabeto greco* α, β, γ, vengono indicate le ampiezze degli **angoli** con i vertici rispettivamente in A, B, C.

La geometria ci fornisce le seguenti proprietà fondamentali relative agli elementi di un triangolo qualunque:

1. La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale all'angolo piatto:

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^c$$

2. In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (per esempio, $a < c + b$ e anche $a > c - b$).
3. In ogni triangolo la relazione di uguaglianza o disuguaglianza che intercorre tra due lati vale anche per gli angoli rispettivamente opposti (per esempio, se $a > b$ sarà anche $\alpha > \beta$).

I teoremi per la risoluzione dei triangoli

Obiettivo della **trigonometria** è quello di *calcolare le misure* degli *elementi incogniti* di un triangolo, quando siano dati **tre elementi**, tra i quali almeno uno deve essere **un lato**. Per raggiungere questo obiettivo, si devono stabilire le **relazioni** che legano le misure dei lati del triangolo con i valori delle funzioni goniometriche dei suoi angoli.

Nei paragrafi precedenti queste relazioni sono già state determinate per i triangoli rettangoli. Peraltro, si potrebbero utilizzare tali relazioni anche per risolvere un triangolo qualunque; in effetti, con ciascuna delle tre **altezze** di un triangolo qualunque, si individuano **due triangoli rettangoli** (▶FIGURA 1), i quali, risolti separatamente, permettono di definire gli elementi incogniti del triangolo qualunque.

Tuttavia questo modo di procedere, nel caso dei triangoli qualunque, è poco conveniente. In effetti esistono i seguenti **teoremi fondamentali** con i quali si stabiliscono

FAQ

▶ **Sono sufficienti tre elementi per risolvere un triangolo scaleno?**

Sì, purché almeno uno di essi sia un lato (o altro elemento lineare).

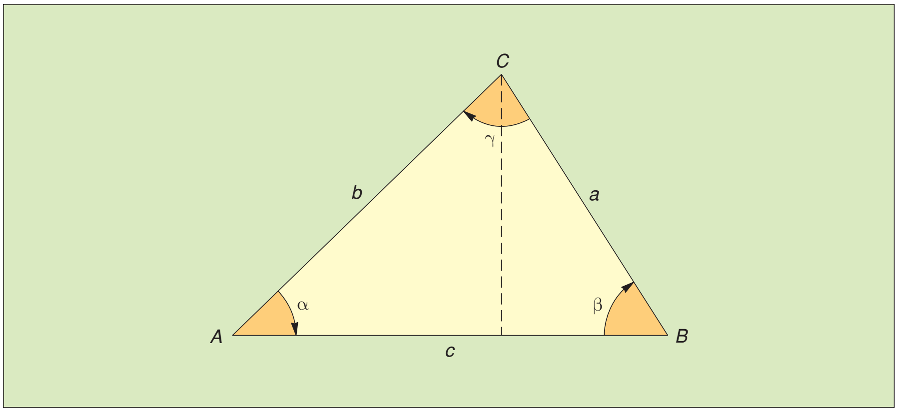


FIGURA 1 Gli elementi fondamentali di un triangolo: vertici (A, B, C), lati (a, b, c) e angoli (α, β, γ). Per convenzione i lati sono indicati con le lettere minuscole corrispondenti a quelle maiuscole dei vertici opposti.

FAQ

► Il teorema dei seni e quello di Carnot, sono i soli che stabiliscono relazioni tra gli elementi di un triangolo?

No, esistono altri teoremi il cui impiego, tuttavia, era congeniale a strumenti di calcolo oggi abbandonati.

le relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo qualunque; con essi si possono risolvere i triangoli in modo più rapido e più semplice:

- teorema dei seni;
- teorema di Carnot;
- teorema di Nepero;
- formule di Briggs.

Precisiamo che la trattazione degli ultimi due argomenti (teorema di Nepero e formule di Briggs) non verrà affrontata. Nella pratica, infatti, essi trovavano impiego in passato quando i calcoli si effettuavano con l'uso delle **tavole logaritmiche**, mentre attualmente l'uso delle **calcolatrici** ha reso tali teoremi non essenziali: a essi si preferiscono i primi due teoremi, con i quali è possibile risolvere qualsiasi problema trigonometrico.

Teorema dei seni

Costruzione del cerchio circoscritto

Consideriamo il triangolo qualunque di vertici ABC. Esso è sempre inscrivibile in un cerchio, che viene chiamato **circoscritto**, il cui centro O è il punto di intersezione degli **assi** dei tre lati (►FIGURA 2*a*). Allora ogni lato può essere considerato come una **corda** della circonferenza circoscritta, e ogni angolo come **angolo alla circonferenza** che insiste sulla corda coincidente con il lato a esso opposto.

Da un vertice qualunque del triangolo, per esempio dal vertice B, tracciamo il **diametro** $2R$ del cerchio circoscritto (►FIGURA 2*b*); indichiamo con A' il punto d'incontro tra questo diametro e la circonferenza. Congiungendo A' con i vertici C e A, si ottengono i due triangoli rettangoli $A'AB$ e $A'CB$ (gli angoli $A'\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}A'$ sono **retti** in quanto angoli alla circonferenza sottesi a un arco pari alla semicirconferenza, il cui *angolo al centro* è piatto). Inoltre l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A'}C$ è uguale a quella dell'angolo α, in quanto entrambi sono angoli alla circonferenza sottesi allo stesso arco $\widehat{BC}$ di corda a; per le stesse ragioni si ha che $A\widehat{A'}B = \gamma$.

Considerando i triangoli rettangoli definiti in precedenza, possiamo esprimere per ciascuno di essi l'ipotenusa $\overline{BA'} = 2R$ che hanno in comune:

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\,\alpha} \qquad \text{e} \qquad 2R = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Se poi, in modo del tutto analogo, tracciamo il diametro $2R$ del cerchio circoscritto, passante per il vertice A (o il vertice C), e ripetiamo le considerazioni geometriche sopra sviluppate, possiamo scrivere:

$$2R = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} \qquad \text{e} \qquad 2R = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

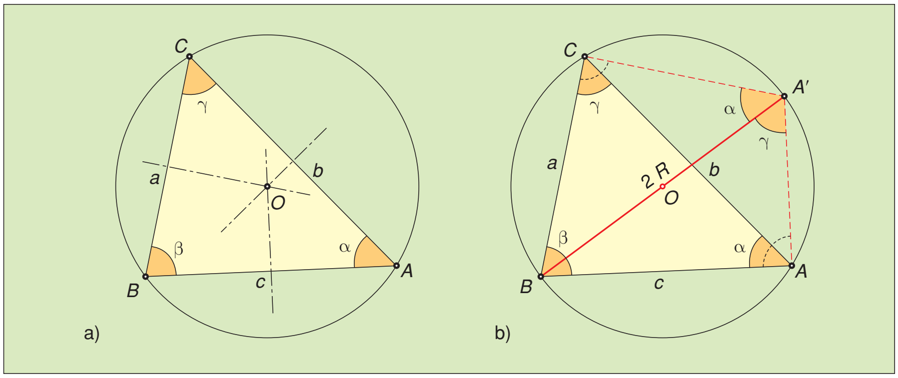


FIGURA 2 Costruzione grafica del cerchio circoscritto al triangolo, connessa al teorema dei seni. Il suo centro è individuato dall'intersezione degli assi dei tre lati del triangolo.

Enunciato del teorema dei seni

Combinando le relazioni precedentemente scritte, si ottengono facilmente le seguenti:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2R \tag{1}$$

Le relazioni (1) sintetizzano il **teorema dei seni**, il cui enunciato può essere così formulato:

> in un triangolo il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è **costante** ed è uguale al diametro del **cerchio circoscritto**.

Il teorema dei seni è stato dimostrato considerando un triangolo *acutangolo* (con centro O interno al triangolo), tuttavia esso rimane perfettamente valido anche per triangoli *ottusangoli* (con centro O esterno al triangolo), per i quali si omette la dimostrazione, del tutto analoga a quella appena illustrata.

Enunciato alternativo del teorema dei seni

Nelle relazioni (1), permutando i medi, si possono scrivere le stesse relazioni in una forma diversa ottenendo:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma} \tag{1'}$$

Quindi il teorema dei seni può anche essere formulato nel seguente modo alternativo:

> in un triangolo il rapporto tra due lati è uguale al rapporto tra i valori del seno degli angoli opposti.

Il teorema dei seni appare la prima volta in applicazioni geometriche di matematici arabi nel X sec., ma solo nel XIV sec. il matematico francese **L.B. Gerson** fornisce la dimostrazione che è stata descritta, basata sul cerchio circoscritto. Nel Settecento, poi, anche il matematico svizzero **Leonardo Eulero**, nella sua straordinaria produzione scientifica, affronta la dimostrazione del teorema dei seni dandone una diversa ulteriore versione.

Teorema di Carnot (o del coseno)

Costruzione geometrica sul triangolo

Con il teorema dei seni, il teorema di Carnot è di fondamentale importanza per la risoluzione trigonometrica dei problemi geometrici. Esso, di fatto, rappresenta l'estensione del teorema di Pitagora per i triangoli qualunque.

Consideriamo il triangolo ABC di ▶FIGURA 3 e tracciamo l'altezza CH relativa al lato c. Essa divide il triangolo ABC nei due triangoli rettangoli BCH e ACH. Applicando il teorema di Pitagora al primo di questi, si ha:

$$a^2 = HC^2 + HB^2$$

Considerando poi il triangolo rettangolo ACH, possiamo scrivere:

$$HC = b\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{e} \qquad HB = c - b\cos\alpha$$

Con ciò la precedente relazione diventa:

$$a^2 = (b\,\text{sen}\,\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2\,\text{sen}^2\,\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = b^2\,(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

FAQ

▶ **L'enunciato del teorema dei seni afferma che il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è una costante. Cosa rappresenta questa costante?**

Il diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

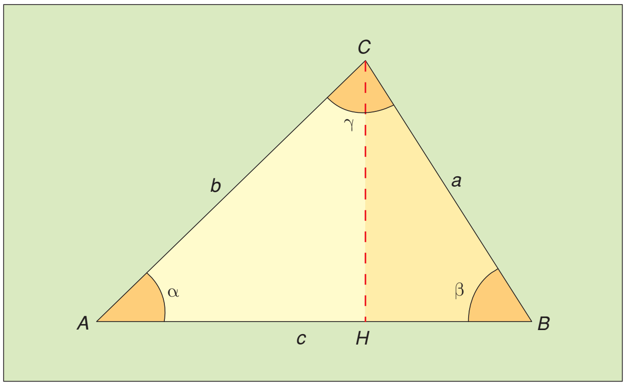


FIGURA 3 L'altezza *CH* divide il triangolo *ABC* nei due triangoli rettangoli *BCH* e *ACH*.

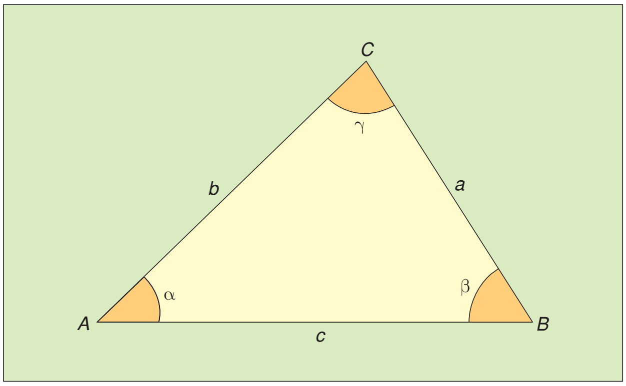


FIGURA 4 Le indicazioni convenzionali utilizzate nel triangolo.

Ricordando la relazione fondamentale (8) dell'unità A1, si ha:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \tag{2}$$

Ripetendo il ragionamento con le altre altezze del triangolo si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \tag{2′}$$

• Enunciato del teorema di Carnot

Sulla base delle (2) e (2′) possiamo formulare il seguente enunciato del teorema di Carnot:

in un triangolo, il quadrato della lunghezza di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze degli altri due lati, dedotta del doppio prodotto delle lunghezze di questi lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

Il teorema di Carnot può anche venire espresso in un'altra forma, altrettanto importante, ottenuta dalle (2) e (2′) isolando i *coseni*:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{3}$$

Il teorema di Carnot era poco usato fino ad alcuni anni or sono, in quanto non esprimibile in *forma logaritmica* e perciò difficoltoso da utilizzare senza appropriati strumenti di calcolo. Al contrario, con l'avvento delle calcolatrici e con il conseguente superamento di ogni problema connesso allo sviluppo di qualsiasi calcolo, il teorema di Carnot è il più utilizzato per risolvere molti problemi trigonometrici.

Questo teorema viene attribuito al matematico francese **Lazare Carnot** (1753-1823), padre del più noto fisico Sadi Carnot. Tuttavia, in realtà, sembra che questo teorema sia da ascrivere al matematico e uomo politico francese **François Viète** (1545-1603), fondatore del calcolo algebrico letterale.

FAQ

► Il teorema di Carnot in passato veniva poco utilizzato. Perché?

Perché non è adattabile al calcolo logaritmico con cui si sviluppavano i calcoli in ambito topografico prima della disponibilità delle calcolatrici.

2. Criteri per risolvere i triangoli qualunque

I teoremi visti nel paragrafo precedente, opportunamente utilizzati, permettono la *risoluzione dei triangoli*, cioè il calcolo degli **elementi incogniti** di un triangolo, conoscendo **tre** di essi, almeno uno dei quali deve essere un **lato** (o, quantomeno, un **elemento lineare**).

In effetti la conoscenza dei soli angoli **non è sufficiente** per determinare i tre lati incogniti, in quanto esistono infiniti triangoli, **simili** tra loro, che hanno gli stessi angoli.

Prima di procedere alla risoluzione dei triangoli, come peraltro di ogni figura piana, è bene **controllare** che gli elementi assegnati siano compatibili con il problema; allo scopo occorre verificare le proprietà generali enunciate all'inizio del paragrafo 1.

Inoltre è sempre raccomandabile far precedere al calcolo analitico eseguito con la calcolatrice, la **costruzione grafica** della figura assegnata in scala opportuna. Ciò permetterà di valutare meglio il problema, di evitare grossolani errori di interpretazione, e anche un primo rapido controllo dei calcoli effettuati.

In relazione ai dati assegnati, nella risoluzione dei triangoli si riconoscono **quattro casi** fondamentali, che esamineremo nel seguito.

FAQ

► È risolvibile un triangolo del quale siano noti i tre angoli interni?

No, esistono infiniti triangoli che posseggono gli stessi angoli interni. Affinché il triangolo sia risolvibile occorrono sì tre elementi, ma almeno uno di essi deve essere un lato o, comunque, un elemento non angolare.

Caso 1 (noti due angoli e un lato)

Dato il triangolo ABC di ►FIGURA 5, supponiamo di conoscere, per esempio, gli angoli α e β e la misura del lato a. Vogliamo determinare gli elementi incogniti: γ, b e c.

Si ha subito:

$$\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$$

I lati b e c si ricavano applicando due volte il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\text{sen }\alpha} = \frac{b}{\text{sen }\beta} \quad \text{e} \quad \frac{a}{\text{sen }\alpha} = \frac{c}{\text{sen }\gamma}$$

da cui segue:

$$b = \frac{a \text{ sen }\beta}{\text{sen }\alpha} \qquad c = \frac{a \text{ sen }\gamma}{\text{sen }\alpha}$$

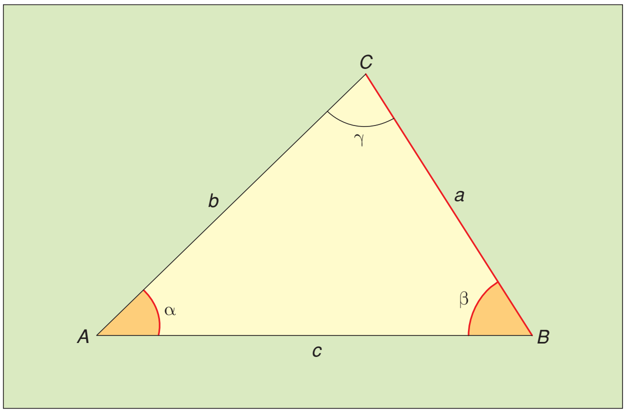


FIGURA 5 Caso 1: triangolo di cui sono noti gli angoli α e β e il lato a.

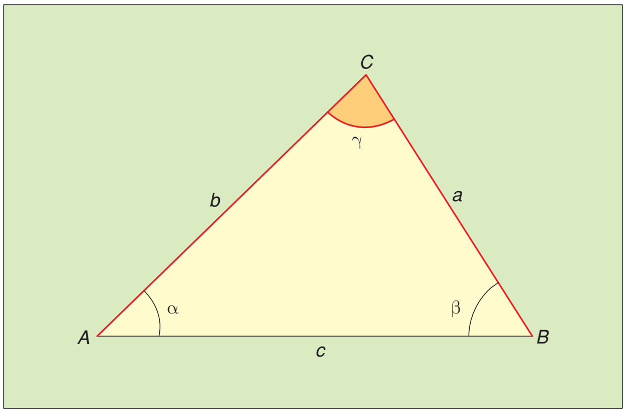


FIGURA 6 Caso 2: triangolo di cui sono noti i lati a e b e l'angolo compreso γ.

FAQ

▶ Nella risoluzione dei triangoli scaleni, per calcolare un angolo è più conveniente utilizzare la funzione arcoseno o la funzione arcocoseno?

Quando è possibile è sicuramente più conveniente usare la funzione arcocoseno (dunque il teorema di Carnot), in quanto evita l'ambiguità implicita nella funzione arcoseno (teorema dei seni).

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conosce la misura del lato* $c = \overline{AB} = 124{,}76$ m*, l'angolo* $\beta = 83^c{,}60$ *e l'angolo* $\alpha = 69^c{,}72$.

Soluzione

$$\gamma = 200^c - (83^c{,}60 + 69^c{,}72) = 46^c{,}68$$

$$b = \frac{124{,}76 \operatorname{sen} 83^c{,}60}{\operatorname{sen} 46^c{,}68} = 180{,}25 \text{ m}$$

$$a = \frac{124{,}76 \operatorname{sen} 69^c{,}72}{\operatorname{sen} 46^c{,}68} = 165{,}72 \text{ m}$$

Caso 2 (noti due lati e l'angolo compreso)

Dato il triangolo ABC di ▶FIGURA 6, supponiamo di conoscere i lati a e b, oltre all'angolo γ. Vogliamo determinare gli elementi incogniti: c, α e β.

I modi per risolvere questo problema sono molteplici, tuttavia, con gli attuali mezzi di calcolo, il più conveniente è sicuramente quello che prevede il calcolo del lato c con il teorema di Carnot. In effetti dalla seconda delle (2′) si ha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

Poi, con il teorema dei seni, si ricava:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c} \operatorname{sen} \gamma \qquad \text{da cui:} \qquad \beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{c} \operatorname{sen} \gamma\right)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \operatorname{sen} \gamma \qquad \text{da cui:} \qquad \alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{c} \operatorname{sen} \gamma\right)$$

Tuttavia, l'uso della funzione inversa **arcoseno**, nell'ambito della risoluzione dei triangoli qualunque, richiede particolari precauzioni.

Infatti il valore dell'arcoseno fornito dalla calcolatrice è un angolo (per esempio β) inferiore a 100^c; tuttavia anche il suo angolo **associato** supplementare $(200^c - \beta)$, oltre a soddisfare la prima delle relazioni precedenti, può essere un angolo del triangolo (in questo caso *ottusangolo*), per cui non lo si può escludere a priori.

Occorrerà allora, in questo caso, controllare quale, fra i due valori β e $200^c - \beta$, soddisfa le proprietà dei triangoli viste all'inizio del paragrafo 1, per poter stabilire quale dei due angoli risolve il problema.

Esiste, però, il modo di evitare tale ambiguità, applicando di nuovo il **teorema di Carnot**, dopo aver calcolato c, anche per determinare gli angoli α e β, questa volta usando la forma vista nelle (3); in effetti si ha:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \text{da cui:} \qquad \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{da cui:} \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

La funzione inversa arcocoseno, infatti, fornisce un valore compreso tra 0^c e 200^c, mentre l'angolo **associato** (che ha lo stesso valore del coseno, anche in segno), si trova nel IV quadrante, per cui **non può essere** l'angolo di un triangolo, eliminando con ciò qualsiasi ambiguità.

Facciamo poi notare che, calcolando entrambi gli angoli α e β con le espressioni precedenti, si può anche eseguire la **verifica del calcolo**, controllando che sia $\alpha + \beta + \gamma = 200^c$.

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conosce la misura del lato c =* $\overline{AB}$ = 76,10 m, *quella del lato b =* $\overline{CA}$ = 121,40 m *e l'angolo* $\alpha = 82^c{,}5770$.

Soluzione

$$a = \sqrt{121{,}40^2 + 76{,}10^2 - 2 \cdot 76{,}10 \cdot 121{,}40 \cdot \cos 82^c{,}5770} = 124{,}64 \text{ m}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{124{,}64^2 + 76{,}10^2 - 121{,}40^2}{2 \cdot 76{,}10 \cdot 124{,}64}\right) = 77^c{,}4196$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{124{,}64^2 + 121{,}40^2 - 76{,}10^2}{2 \cdot 121{,}40 \cdot 124{,}64}\right) = 40^c{,}0038$$

Per controllo si ha:

$$82^c{,}577 + 77^c{,}4196 + 40^c{,}0038 = 200^c{,}0004 \cong 200^c$$

FAQ

Nella risoluzione dei triangoli qualunque, quale configurazione di dati assegnati può dar luogo a diverse soluzioni?

Quando sono noti due lati e un angolo adiacente al lato incognito.

Caso 3 (noti due lati e un angolo adiacente al lato incognito)

In ▶FIGURA 7 viene rappresentato il triangolo ABC del quale immaginiamo noti, per esempio, i lati a e b e l'angolo α opposto al lato a. Dobbiamo determinare gli elementi incogniti c, β e γ.

Possiamo senz'altro supporre $a \neq b$ e $\alpha \neq 100^c$, perché in questo caso il triangolo sarebbe rispettivamente del tipo isoscele o rettangolo, che sappiamo facilmente risolvere. Ciò premesso, applicando il teorema dei seni si ottiene:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{quindi} \qquad \beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha\right) \tag{4}$$

Si ha poi $\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$, quindi, ancora con il teorema dei seni, si ottiene il terzo lato:

$$c = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \text{oppure} \qquad c = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

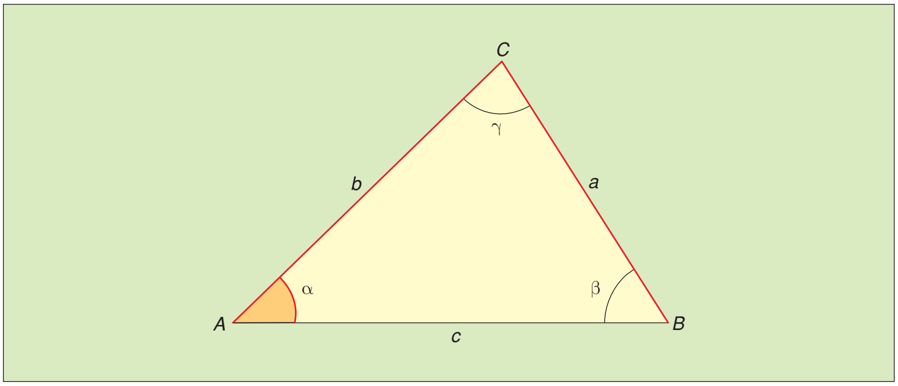


FIGURA 7 Caso 3: triangolo di cui sono noti i lati a e b e l'angolo α adiacente al lato incognito. È il caso più complesso perché può dare luogo a più soluzioni.

La soluzione proposta, peraltro l'unica possibile, richiede alcune riflessioni.

In effetti, nell'applicare la (4) possono verificarsi i seguenti casi:

- $\frac{b}{a}$ sen $\alpha > 1$ Il problema è manifestamente **impossibile** in quanto non esiste l'arcoseno di un numero maggiore di 1.
- $\frac{b}{a}$ sen $\alpha = 1$ L'angolo β è **retto** e quindi si tratta di un triangolo rettangolo.
- $\frac{b}{a}$ sen $\alpha < 1$ Il valore di β **non è univoco** in quanto può trovarsi sia nel I che nel II quadrante, per quanto detto in precedenza.

In quest'ultimo caso, che è poi quello più frequente, possono verificarsi le seguenti condizioni:

- dei due valori di β uno è **incompatibile** con i dati del problema, pertanto il valore che soddisfa il problema è l'altro. Per esempio, si supponga che sia $\alpha = 120^c$ e che β possa assumere i due valori 40^c e $(200^c - 40^c) = 160^c$. Il valore 160^c è incompatibile con il valore di $\alpha = 120^c$ perché la somma $\alpha + \beta$ sarebbe maggiore di 200^c; in questo caso il valore che risolve il problema è $\beta = 40^c$.
- I due valori di β sono entrambi compatibili con il valore di α; in questo caso si avranno **due soluzioni** del problema, che danno luogo a **due triangoli distinti**. È questo un caso di ambiguità che la trigonometria non risolve.

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conoscono le misure dei lati* $a = 695{,}18$ m *e* $b = 453{,}34$ m*, oltre a quella dell'angolo* $\beta = 39^c{,}0815$.

Soluzione

$$\alpha_1 = \text{arcsen}\left(\frac{695{,}18}{453{,}34}\,\text{sen}\,39^c{,}0815\right) = 68^c{,}944$$

e anche:

$$\alpha_2 = 200^c - 68^c{,}9441 = 131^c{,}0559$$

Entrambi i valori calcolati per α sono compatibili con il valore assegnato di β, per cui si hanno **due distinti triangoli** che soddisfano i valori assegnati. Quindi si avrà:

$$\gamma_1 = 200^c - (39^c{,}0815 + 68^c{,}9441) = 91^c{,}9744$$

$$\gamma_2 = 200^c - (39^c{,}0815 + 131^c{,}0559) = 29^c{,}8626$$

$$c_1 = \frac{695{,}18\,\text{sen}\,91^c{,}9744}{\text{sen}\,68^c{,}9441} = 780{,}73 \text{ m}$$

$$c_2 = \frac{695{,}18\,\text{sen}\,29^c{,}8626}{\text{sen}\,68^c{,}9441} = 355{,}76 \text{ m}$$

Caso 4 (noti i tre lati)

In questo caso gli elementi incogniti sono i **tre angoli**; essi possono essere determinati con il teorema di Carnot, espresso nella forma delle relazioni (3). Considerando il triangolo di ▶FIGURA 8, siano note le misure dei lati a, b e c. Applicando il teorema di Carnot, si ha:

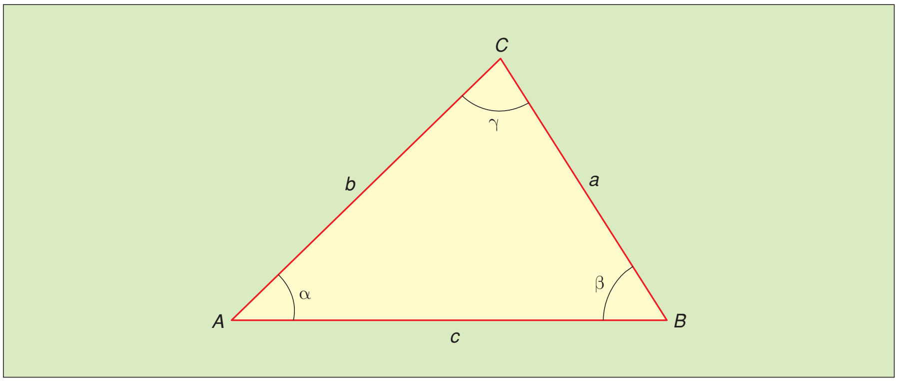


FIGURA 8 Caso 4: triangolo di cui sono noti i tre lati.

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Trovato α, si potrebbero calcolare γ e β utilizzando il *teorema dei seni*. Tuttavia, per evitare l'**ambiguità** connessa con la funzione inversa arcoseno, è consigliabile continuare a utilizzare il teorema di Carnot. In effetti si ha:

$$\beta = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \gamma = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un triangolo ABC del quale si conoscono le misure dei lati a* = 131,48 m, *b* = 94,52 m *e c* = 112,40 m.

Soluzione

$$\alpha = \arccos\left(\frac{112{,}40^2 + 94{,}52^2 - 131{,}48^2}{2 \cdot 112{,}40 \cdot 94{,}52}\right) = 87^c{,}0858$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{112{,}40^2 + 113{,}48^2 - 94{,}52^2}{2 \cdot 112{,}40 \cdot 131{,}48}\right) = 49^c{,}7345$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{131{,}48^2 + 94{,}52^2 - 112{,}40^2}{2 \cdot 94{,}52 \cdot 131{,}48}\right) = 63^c{,}1797$$

Per controllo si ha:

$$87^c{,}0858 + 49^c{,}7345 + 63^c{,}1797 = 200^c.$$

Sintesi dei casi di risoluzione dei triangoli qualunque

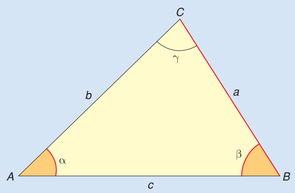
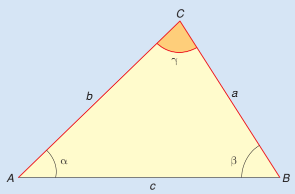
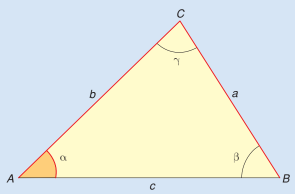
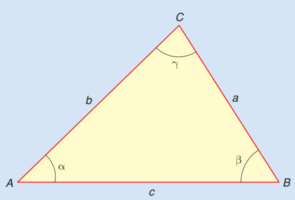
Per sintetizzare i casi connessi alla risoluzione dei triangoli scaleni precedentemente esaminati, proponiamo nella ▶TABELLA 1 i relativi **problemi di riferimento**.

3. Area dei triangoli

Sappiamo dalla geometria che l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di una base per la rispettiva altezza; con riferimento alla ▶FIGURA 9, si ha:

$$S = \frac{1}{2} ch$$

TABELLA 1 **Schemi risolutivi dei triangoli qualunque**

Caso	Schema geometrico	Elementi noti	Soluzione
1		1 lato (a) 2 angoli (α, β)	$\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$ $b = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha}$ $\quad c = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$
2		2 lati (a, b) Angolo compreso (γ)	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ $\alpha = \arccos \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\beta = 200^c - (\alpha + \gamma)$
3		2 lati (a, b) Angolo non compreso (α)	$\beta = \text{arcsen}\left(\dfrac{b}{a}\,\text{sen}\,\alpha\right)$ (*) $\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$ $c = \dfrac{a \cdot \text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$ (*) Richiede la verifica delle due soluzioni β_1 e β_2
4		3 lati (a, b, c)	$\alpha = \arccos \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\beta = \arccos \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\gamma = 200^c - (\alpha + \beta)$

Tuttavia, la trigonometria ci fornisce l'opportunità di calcolare direttamente l'area del triangolo, senza bisogno di conoscere l'altezza, nei tre seguenti casi:

- **noti due lati e l'angolo compreso**;
- **noto un lato e gli angoli adiacenti**;
- **noti i tre lati**.

Questi casi danno luogo a formule largamente usate nella pratica della nostra disciplina, e che pertanto devono essere ricordate.

Caso 1 (noti due lati e l'angolo compreso)

Abbassando dal vertice C l'altezza h (▶FIGURA 9), rimangono definiti due triangoli rettangoli. Dal primo di questi si ha: $h = b\,\text{sen}\,\alpha$. Sostituendo nella formula precedente si ottiene:

$$S = \frac{1}{2} bc\,\text{sen}\,\alpha \qquad (5)$$

L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso fra essi.

FAQ

▶ Perché l'area dei triangoli viene espressa in tre diversi formati?

Perché ciascuno di essi utilizza diversi elementi geometrici, che si adattano meglio in certi ambiti piuttosto che in altri.

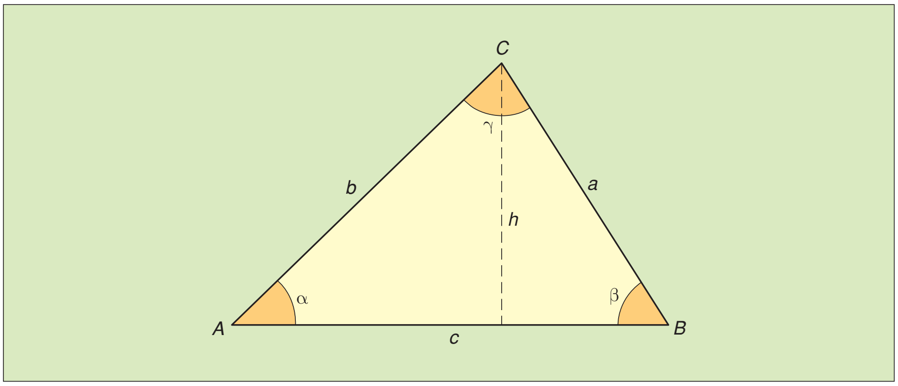


FIGURA 9 Per il calcolo dell'area di un triangolo, la geometria richiede la conoscenza dell'altezza h relativa a una base. La trigonometria ci fornisce formule in grado di calcolare l'area del triangolo senza conoscere direttamente l'altezza.

In modo del tutto analogo si ottiene:

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma \qquad S = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \beta$$

Caso 2 (noto un lato e gli angoli adiacenti)

Ricordando che per il teorema dei seni si ha:

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad c = \frac{a \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}$$

sostituendo nella (5) e ricordando che $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} [200^c - (\beta + \gamma)] = \operatorname{sen} (\beta + \gamma)$ si ottiene:

$$S = \frac{a^2}{2} \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)} = \frac{a^2}{2} \frac{1}{\operatorname{cotg} \gamma + \operatorname{cotg} \beta} \tag{6}$$

Con considerazioni analoghe si ottiene anche:

$$S = \frac{b^2}{2} \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)} \qquad S = \frac{c^2}{2} \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\beta + \alpha)}$$

Formula di Erone

Caso 3 (noti i tre lati)

Conoscendo la lunghezza dei tre lati di un triangolo (a, b, c), è possibile ottenere la sua area con la seguente espressione:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{7}$$

Questa espressione è nota come **formula di Erone** e, come detto, esprime l'area del triangolo in funzione dei suoi lati (p rappresenta il semiperimetro).

FAQ

► Quale caratteristica possiede la formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo?

Richiede la conoscenza dei tre lati, dunque non è necessaria la conoscenza di angoli o altezze.

4. Cerchi notevoli dei triangoli

Dato un triangolo, è sempre possibile costruire i seguenti cerchi: il cerchio **circoscritto**, il cerchio **inscritto** e i tre cerchi **ex-iscritti**. Di seguito illustreremo le modalità per determinarne i loro raggi e, soprattutto, le loro **proprietà**.

Cerchio circoscritto

In un triangolo ABC gli **assi** dei lati si intersecano in un punto, chiamato **circocentro**, che è il centro del cerchio circoscritto, passante per i tre vertici del triangolo.
Le formule che esprimono la misura del **raggio** del cerchio circoscritto a un triangolo sono immediata conseguenza del teorema dei seni; in effetti, dalle formule (1), evidenziando R si ha:

$$R = \frac{a}{2\,\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{2\,\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{2\,\text{sen}\,\gamma} \tag{8}$$

Cerchio inscritto

Cerchio inscritto

Le **bisettrici** dei tre angoli di un triangolo ABC si incontrano in un punto O (▶FIGURA 10), detto **incentro**, che costituisce il centro del **cerchio inscritto**, tangente ai tre lati del triangolo.

Le bisettrici dividono il triangolo ABC nei tre triangoli AOB, AOC, BOC; la somma delle aree di questi triangoli deve essere uguale all'area complessiva del triangolo ABC. Si potrà perciò scrivere:

$$S = \frac{aR}{2} + \frac{bR}{2} + \frac{cR}{2} = \frac{R}{2}(a+b+c) = \frac{R}{2}2p$$

da cui segue:

$$R = \frac{S}{p} \tag{9}$$

Considerando poi i punti di tangenza del cerchio inscritto con i lati dei triangoli, indicati con G, H, L, da semplici considerazioni geometriche si ottiene:

$$\overline{AH} = \overline{AG} = p - a \qquad \overline{BG} = \overline{BL} = p - b \qquad \overline{CH} = \overline{CL} = p - c \tag{10}$$

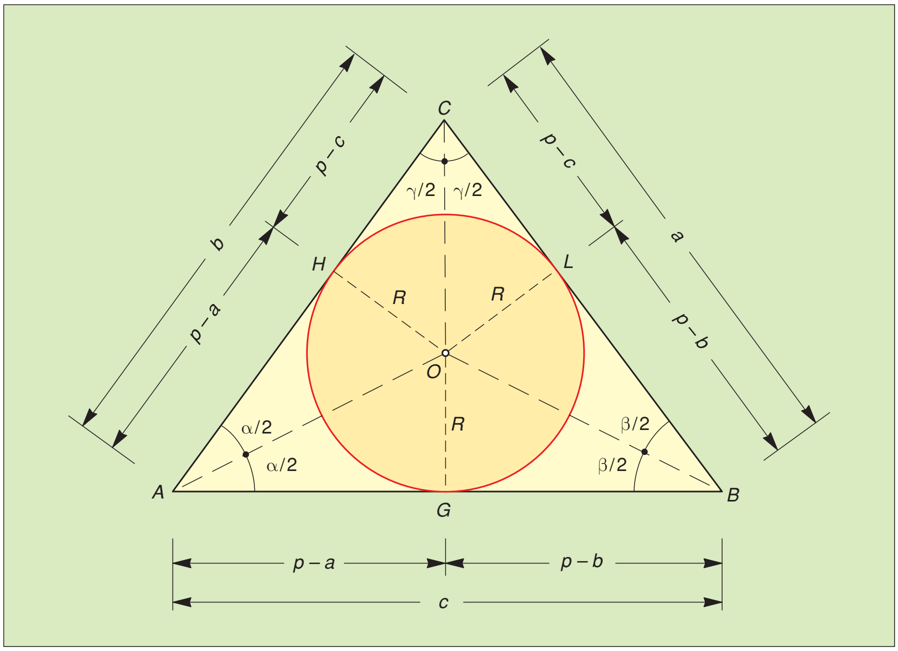


FIGURA 10 Cerchio inscritto in un triangolo. Esso possiede importanti proprietà geometriche, molto utili in ambito topografico.

Di conseguenza possiamo formulare il seguente enunciato.

La distanza tra il punto di tangenza del cerchio inscritto dai vertici del triangolo è uguale al semiperimetro del triangolo, dedotto il lato opposto a quello del vertice a cui è riferita la distanza.

Dai triangoli rettangoli AOG (retto sul punto di tangenza G), BOG e COH, si ha:

$$R = (p - a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad R = (p - b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \qquad R = (p - c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Queste relazioni costituiscono un ulteriore modo di calcolare il raggio del cerchio inscritto dei triangoli.

FAQ

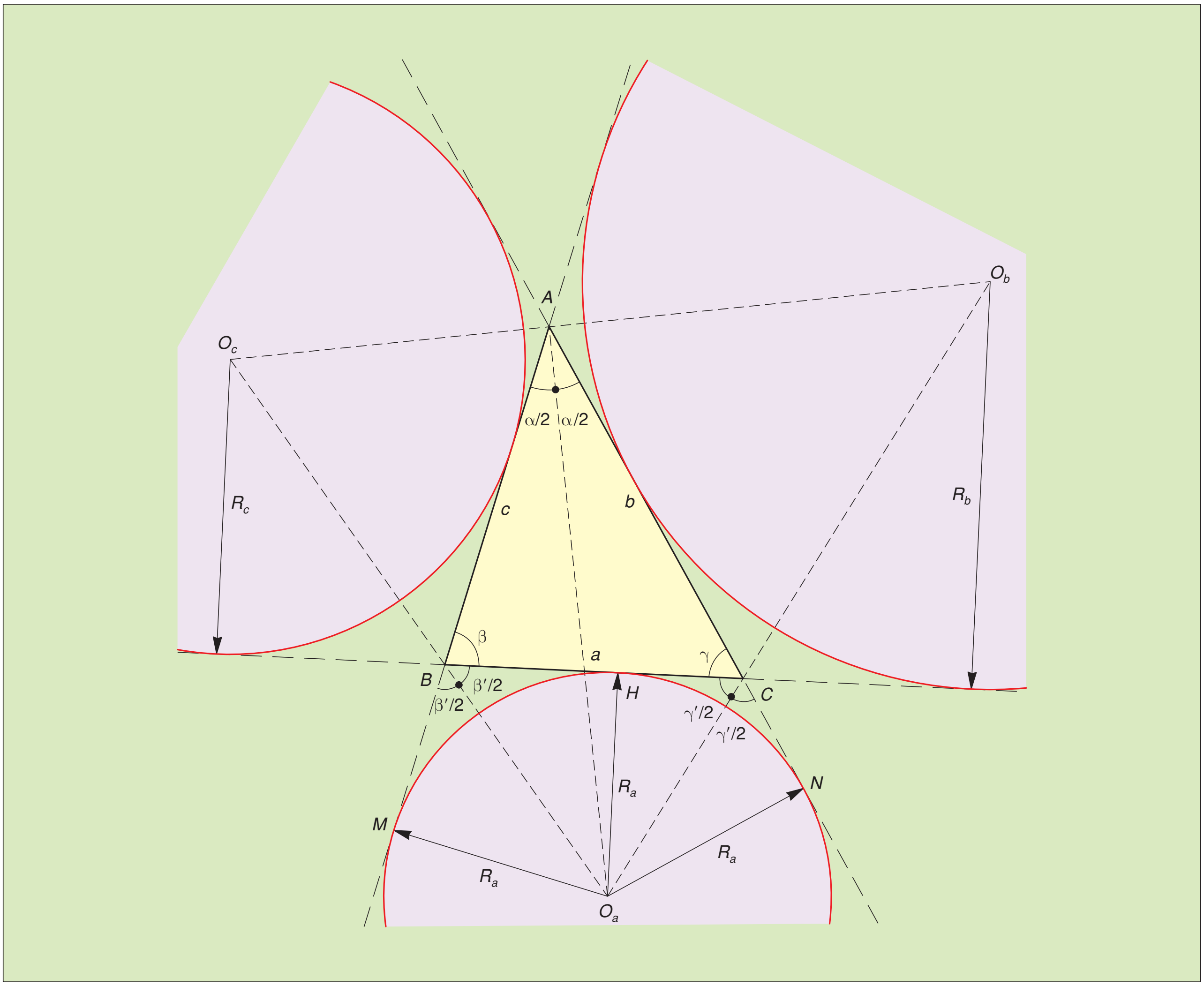
▶ Da che cosa è definito il centro del cerchio inscritto a un triangolo?

Dalla intersezione delle bisettrici dei tre angoli. A esso viene assegnato il nome di incentro.

Cerchi ex-inscritti

I cerchi ex-inscritti a un triangolo (*ex* è la contrazione del vocabolo latino *extra* = esterno) sono **tangenti** a un lato e ai **prolungamenti** degli altri due; si hanno perciò **tre** cerchi **ex-inscritti** (▶FIGURA 11) in ogni triangolo.

FIGURA 11 I tre cerchi ex-inscritti di un triangolo. Come accade nel cerchio inscritto, essi possiedono importanti proprietà geometriche, utili nell'ambito topografico.



FAQ

▶ Le proprietà dei cerchi notevoli di un triangolo sono utili in ambito topografico?

Sì, sono molto utili, per esempio, nello studio delle curve stradali.

Cerchi ex-inscritti

Per esempio, il cerchio ex-inscritto del triangolo ABC **relativo al lato** $BC = a$ sarà tangente al lato BC nel punto H e ai prolungamenti dei lati AB e AC rispettivamente in M e N. Il suo centro O_a è il punto d'incontro della **bisettrice** dell'angolo α con le **bisettrici** degli angoli β' e γ', supplementari di β e γ. Analogamente si costruiscono gli altri due cerchi ex-inscritti.

L'area S del triangolo ABC può essere ottenuta dalle aree dei triangoli ABO_a, ACO_a e BCO_a; in effetti si ha: $S = S_{ABO_a} + S_{ACO_a} - S_{BCO_a}$, e, più precisamente:

$$S = \frac{cR_a}{2} + \frac{bR_a}{2} - \frac{aR_a}{2} = \frac{R_a}{2}(c + b - a)$$

È poi facile verificare che $(c + b - a) = 2\,(p - a)$, quindi dalla relazione precedente si ottiene:

$$R_a = \frac{S}{(p - a)} \qquad (11)$$

Analogamente si possono ricavare i raggi degli altri cerchi ex-inscritti:

$$R_b = \frac{S}{(p - b)} \qquad R_c = \frac{S}{(p - c)} \qquad (11')$$

Consideriamo ora il punto di tangenza H del cerchio ex-inscritto con il lato BC, e i punti M e N, punti di tangenza dello stesso cerchio rispettivamente con i prolungamenti dei lati AB e AC.

A seguito di alcune riflessioni di carattere geometrico e di alcuni passaggi algebrici, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\overline{AM} = p \quad \text{e} \quad \overline{AN} = p \qquad (12)$$

Generalizzando è possibile formulare il seguente enunciato.

La distanza tra un vertice di un triangolo e i punti di tangenza dei prolungamenti dei lati con un cerchio ex-inscritto è uguale al **semiperimetro** del triangolo stesso.

Sfruttando questa **proprietà** dei cerchi ex-inscritti, possiamo calcolare i raggi degli stessi cerchi in un modo più rapido ed elegante. In effetti, possiamo considerare, per esempio, il triangolo rettangolo AMO_a, retto in M. Il raggio R_a è un cateto di questo triangolo, mentre l'altro cateto è uguale al semiperimetro del triangolo ABC; quindi si ha:

$$R_a = p\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{e anche:} \quad R_b = p\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} \qquad R_c = p\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$$

APPLICAZIONE

Problema *Del triangolo ABC (▶FIGURA 12) sono note le misure dei tre lati:* $a = 76{,}844$ m, $b = 78{,}789$ m, $c = 99{,}801$ m. *Determinare la distanza tra i punti* O_1 *e* O_2*, rispettivamente centro del cerchio inscritto al triangolo ABC e centro del cerchio ex-inscritto relativo al lato* $BC = a$.

Soluzione

Osservando che i punti A, O_1, O_2 sono disposti sulla stessa retta, che coincide con la **bisettrice** dell'angolo α, si ha:

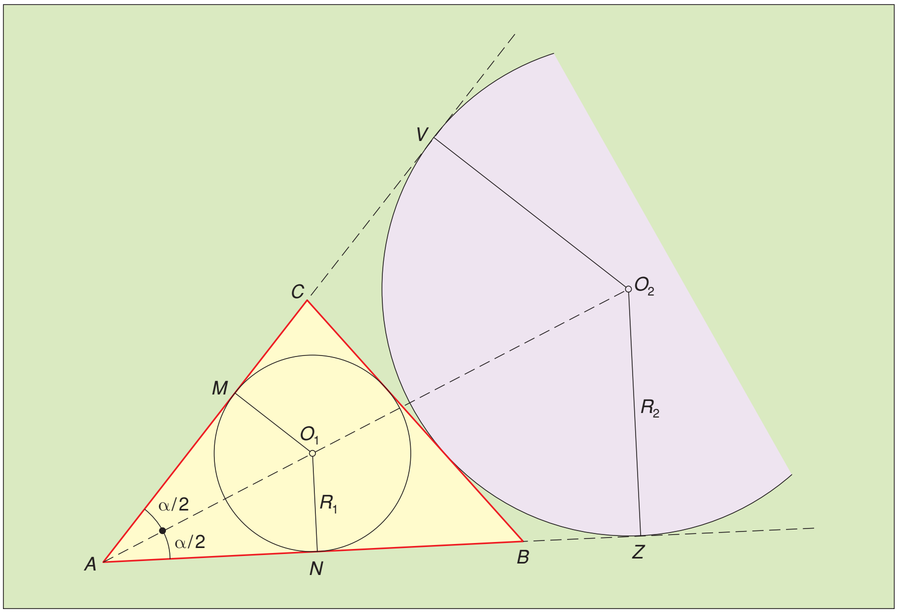


FIGURA 12 Triangolo di cui sono noti i tre lati e per il quale occorre calcolare la distanza tra il centro del cerchio inscritto e il centro del cerchio ex-inscritto relativo al lato *BC*.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{99{,}801^2 + 78{,}789^2 - 76{,}844^2}{2 \cdot 99{,}801 \cdot 78{,}789}\right) = 54^c{,}7364 \qquad \frac{\alpha}{2} = 27^c{,}3682$$

$$p = \frac{99{,}801 + 78{,}789 + 76{,}844}{2} = 127{,}717 \text{ m} = \overline{AZ} \qquad \text{per le (12)}$$

$$\overline{AN} = p - a = 127{,}717 - 76{,}844 = 50{,}873 \text{ m} \qquad \text{per le (10)}$$

Dai triangoli rettangoli AZO_2 e ANO_1:

$$\overline{AO_2} = \frac{127{,}717}{\cos 27^c{,}3682} = 140{,}501 \text{ m}$$

$$\overline{AO_1} = \frac{50{,}873}{\cos 27^c{,}3682} = 55{,}965 \text{ m}$$

$$\overline{O_1O_2} = 140{,}501 - 55{,}965 = 84{,}536 \text{ m}$$

Si osservi come il problema sia stato risolto senza calcolare i raggi dei cerchi, ma solo ricorrendo alle **proprietà** degli stessi.

5. Altezze, mediane e bisettrici

Ogni triangolo possiede tre **altezze**, tre **mediane** e tre **bisettrici**. Queste terne di parametri geometrici, poi, si intersecano in punti notevoli e significativi che in seguito verranno indicati.

Altezze

Le tre altezze di un triangolo (▶FIGURA 13*a*) si intersecano in un punto *T* chiamato **ortocentro**. Ciascuna di esse divide il triangolo *ABC* in due triangoli rettangoli, considerando i quali è possibile esprimere le altezze nel seguente modo:

$$h_a = b \text{ sen } \gamma = c \text{ sen } \beta$$
$$h_b = c \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \gamma$$
$$h_c = b \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \beta$$

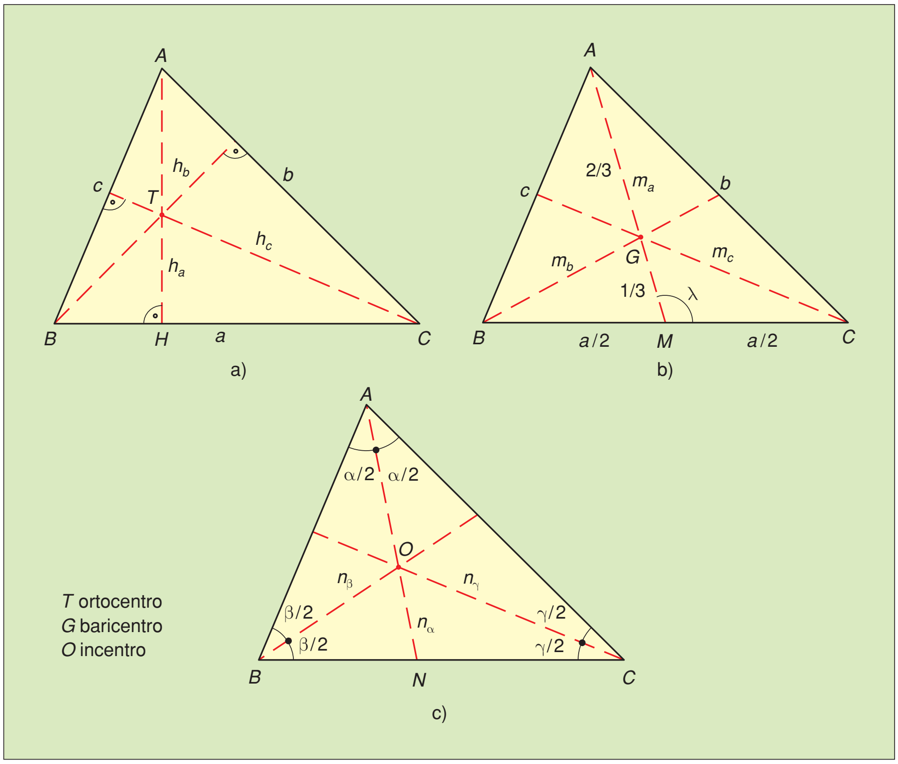


FIGURA 13 Parametri geometrici di un triangolo: *a*) altezze; *b*) mediane; *c*) bisettrici.

Mediane e bisettrici

Mediane

Le mediane di un triangolo (▶FIGURA 13*b*) sono quei segmenti che collegano ciascun vertice con il *punto medio* del lato opposto. Esse si intersecano in un punto G che è il **baricentro** del triangolo.

Indicando con m_a la misura della mediana AM relativa al lato BC, essa può venire calcolata semplicemente risolvendo il triangolo ABM o quello ACM. Tuttavia, possiamo facilmente trovare un'espressione che ci fornisca il valore della misura della mediana in **funzione dei soli lati** del triangolo con la seguente espressione:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Analogamente si ha:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \qquad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

È poi importante ricordare che il punto G di intersezione delle tre mediane (il **baricentro** del triangolo) divide ciascuna mediana in due segmenti lunghi rispettivamente $2/3$ e $1/3$ della misura delle mediane stesse; per esempio si ha: $\overline{AG} = (2/3)\, m_a$ e $\overline{GM} = (1/3)\, m_a$.

Segnaliamo, infine, che non solo le tre mediane si incontrano nel **baricentro** del triangolo, che le tre altezze si incontrano nell'**ortocentro** e che i tre assi si incontrano nel **circocentro**, ma questi tre punti risultano anche allineati, e la retta che li congiunge viene detta **retta di Eulero**.

La dimostrazione dell'allineamento di tali punti notevoli è dovuta a Lazare Carnot (1803).

FAQ

▶ **Da che cosa è definito il baricentro di un triangolo?**

Dalla intersezione delle mediane dei tre lati. Esso, inoltre, si trova, su ciascuna mediana, a una distanza dal rispettivo vertice pari ai 2/3 della lunghezza di ogni mediana.

Bisettrici

Le bisettrici di un triangolo (▶FIGURA 13*c*) sono individuate dai **segmenti** che giacciono sulla *bisettrice geometrica* di ciascun angolo del triangolo, e che hanno per estremi i vertici e i punti d'intersezione delle bisettrici geometriche con i lati opposti. Se indichiamo con n_α la misura della bisettrice del triangolo ABC relativa all'angolo α, essa è la lunghezza del segmento $\overline{AN}$ ($n_\alpha = \overline{AN}$); analogamente si possono definire le misure delle altre due bisettrici n_β e n_γ.

Occorre poi fare attenzione a non confondere la **bisettrice di un triangolo**, relativa a un certo angolo, che viene definita come un **segmento**, con la bisettrice geometrica dello stesso angolo che, come noto, è una **semiretta**.

La misura della bisettrice n_a può venire calcolata semplicemente risolvendo il **triangolo** ABN o quello ACN. Possiamo, tuttavia, ricorrere alla seguente espressione che fornisce il valore della misura della bisettrice del triangolo in funzione dell'angolo a cui essa si riferisce e dei lati che lo formano:

$$n_\alpha = \frac{2bc}{c+b}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Analogamente, per le altre bisettrici si ha:

$$n_\beta = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2} \qquad n_\gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$$

6. Proprietà geometriche dei poligoni

La risoluzione di un **poligono** può sempre essere ricondotta alla risoluzione dei triangoli, scaleni o rettangoli, con i quali può essere scomposto lo stesso poligono; tale procedura, dunque, costituisce un'applicazione diretta della trigonometria.

Prima di analizzare le modalità con cui avviene tale scomposizione in figure elementari, occorre ricordare alcune note proprietà geometriche dei poligoni, e fissare le convenzioni utilizzate nell'indicazione dei loro elementi.

In effetti, i vertici di un poligono vengono convenzionalmente indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino: A, B, C, D ecc. Conviene poi che esse siano disposte percorrendo il perimetro in **senso antiorario**, per far sì che il corrispondente **angolo interno** (angolo orientato) segua la rotazione positiva oraria. Gli **angoli** vengono poi indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto greco: α, β, γ, δ ecc.; mentre i **lati** vengono individuati dalle lettere minuscole dell'alfabeto latino: a, b, c, d ecc. Si noti, tuttavia, che nei poligoni **non vi può essere** la stessa corrispondenza tra le lettere minuscole che indicano i lati, e quelle che indicano gli angoli interni, vista in precedenza nell'ambito dei triangoli.

La proprietà dei poligoni che è necessario considerare nella loro risoluzione, riguarda il valore della somma dei suoi angoli interni; tale proprietà può essere sintetizzata dal seguente enunciato.

La somma degli **angoli interni** di un poligono di n lati è uguale a tanti **angoli piatti** quanti sono i lati del poligono meno due

$$\Sigma\alpha = (n-2)\cdot 200^c$$

Nel caso di un poligono di 6 lati la somma degli angoli interni sarà di $(6-2)\cdot 200^c = 800^c$, mentre nel caso di un quadrilatero (poligono di 4 lati) la stessa somma sarà: $(4-2)\cdot 200^c = 400^c$ (o 360° sessagesimali).

FAQ

► Da cosa è definita la retta di Eulero?

È definita dalla congiungente del baricentro, del circocentro e dell'ortocentro di ciascun triangolo.

FAQ

► Come vengono disposte, convenzionalmente, le lettere maiuscole dei vertici di un poligono?

In senso antiorario, in questo modo, infatti, la notazione letterale degli angoli interni si riferisce ad angoli orientati positivi.

FAQ

▶ Nella risoluzione dei quadrilateri quanti elementi è necessario conoscere?

Cinque elementi, di cui almeno due devono essere lineari.

Occorre poi valutare se i dati che si posseggono sono in numero sufficiente alla risoluzione del poligono in oggetto. A questo proposito è necessario ricordare questa semplice regola:

> affinché un poligono di n lati (quindi costituito da $2n$ elementi: n lati e n angoli) **possa essere risolto**, è necessario conoscere inizialmente almeno $(2n - 3)$ elementi, dei quali almeno $(n - 2)$ dovranno essere lati (o comunque elementi lineari).

Dunque, nel caso di un quadrilatero occorrerà conoscere almeno $(2 \cdot 4 - 3) = 5$ elementi complessivi, di cui almeno $(4 - 2) = 2$ dovranno essere lati o altri elementi lineari.

Tra i poligoni, particolare importanza hanno proprio i **quadrilateri**, le cui strategie risolutive, in relazione agli elementi disponibili inizialmente, verranno esposte nel paragrafo che segue.

7. Casi di risoluzione dei quadrilateri

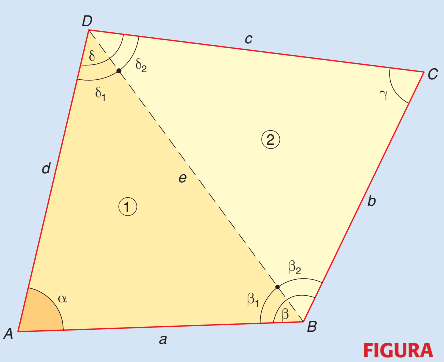
> I quadrilateri si risolvono **scomponendoli in triangoli** con diverse modalità, quindi sviluppando questi ultimi con i criteri studiati in precedenza. Per tale operazione, spesso ci si serve opportunamente di una delle **due diagonali** del quadrilatero. In effetti occorre scegliere quella diagonale che individua due triangoli, uno dei quali sia *immediatamente determinabile*, mentre l'altro può essere eventualmente risolto sfruttando gli elementi ricavati nel primo triangolo.

Si possono presentare svariate situazioni in relazione alla tipologia dei dati noti, ma essenzialmente si possono riconoscere i casi fondamentali che di seguito verranno illustrati. Per alcuni di essi verrà esposto l'intero processo risolutivo, in altri verrà proposta solo la traccia della soluzione.

Caso 1 (noti quattro lati e un angolo)

Del quadrilatero $ABCD$ di ▶FIGURA 14 siano noti, per esempio, i quattro lati a, b, c, d e l'angolo $D\widehat{A}B = \alpha$; restano quindi incogniti i tre angoli β, γ, δ.

TABELLA 2 Caso 1: sintesi della procedura

Noti 4 lati e 1 angolo	Soluzione	
	Triangolo 1	Triangolo 2
 FIGURA 14	$e = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha}$ $\beta_1 = \arccos\dfrac{a^2 + e^2 - d^2}{2ae}$ $\delta_1 = \arccos\dfrac{d^2 + e^2 - a^2}{2de}$	$\beta_2 = \arccos\dfrac{b^2 + e^2 - c^2}{2be}$ $\delta_2 = \arccos\dfrac{c^2 + e^2 - b^2}{2ce}$ $\gamma = \arccos\dfrac{c^2 + b^2 - e^2}{2cb}$ $\beta = \beta_1 + \beta_2$ $\delta = \delta_1 + \delta_2$

Tracciando la **diagonale** $BD = e$ (l'altra diagonale AC non risolve il problema), rimangono individuati i due triangoli ABD e BCD. Il primo di questi è immediatamente risolvibile, in quanto si conoscono **due lati** e l'**angolo compreso** (a, d, α); il secondo lo diviene subito dopo. La procedura è sintetizzata nella ▶TABELLA 2.

■ Caso 2 (noti tre lati e due angoli)

In relazione alla **posizione dei due angoli** noti si possono presentare **tre sottocasi**:

- **i due angoli noti sono compresi tra i lati assegnati (a)**;
- **i due angoli noti sono diagonalmente opposti (b)**;
- **i due angoli noti sono entrambi adiacenti al lato incognito (c)**.

a) Il primo sottocaso è schematizzato dal quadrilatero di ▶FIGURA 15, del quale ipotizziamo noti i tre lati a, b, c e gli angoli β e γ **compresi tra i lati noti**. Sono allora incogniti il lato d e gli angoli α e δ.

In questo caso **ambedue le diagonali** possono servire alla risoluzione del problema, in quanto entrambe danno luogo a due triangoli, uno dei quali è immediatamente risolvibile, mentre l'altro triangolo è risolvibile subito dopo.

Osservazione. Il problema potrebbe anche essere risolto prolungando i lati AB e CD fino a individuare il loro punto O di intersezione. Può allora essere risolto prima il triangolo BOC, poi il triangolo AOD ricavando gli elementi incogniti. In seguito verrà proposta un'applicazione numerica proprio con questo schema risolutivo.

b) Il secondo sottocaso fa riferimento alla ▶FIGURA 16. In essa del quadrilatero $ABCD$ si ritengono noti i tre lati a, b, c e i due angoli **diagonalmente opposti** β e δ. Sono allora incogniti il lato d e gli angoli α e γ. È necessario considerare la **diagonale AC** con la quale si individuano i due triangoli ABC e ACD. Il primo risulta subito risolvibile, il secondo lo diventa successivamente.

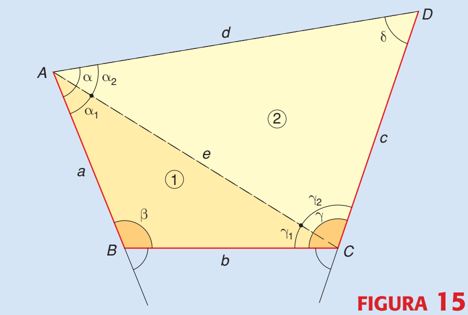
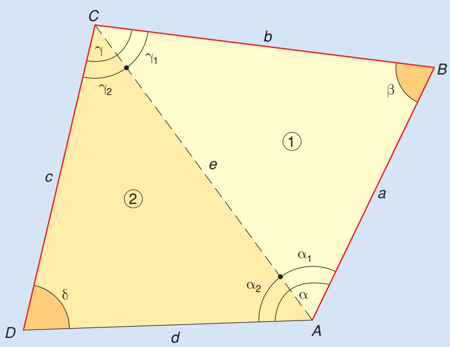
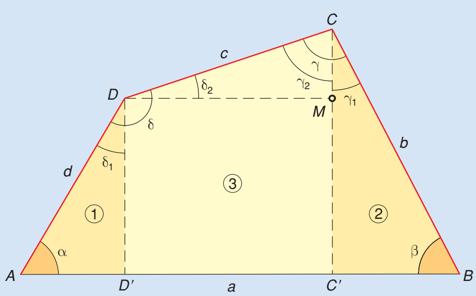
Osservazione. La soluzione precedente è concettualmente applicabile anche al caso in cui uno dei due angoli noti sia **adiacente** al lato incognito, mentre l'altro è **compreso** tra due lati noti (per esempio, sono noti a, b, c, α e β). Occorre poi fare attenzione alla configurazione del secondo triangolo, per il quale potrebbero essere possibili una, nessuna, oppure **due soluzioni distinte**, per le ragioni enunciate nella discussione del **caso 3** di risoluzione dei triangoli.

c) Il terzo sottocaso fa riferimento al quadrilatero di ▶FIGURA 17, per il quale sono noti i tre lati b, c, d e i due angoli α e β **adiacenti al lato incognito a**. Saranno allora incogniti, oltre al lato a, gli angoli γ e δ. Per la risoluzione di questo caso **non è possibile usare le diagonali**, ma occorre inevitabilmente far ricorso ai **triangoli rettangoli**. In effetti, se tracciamo da D e da C le **perpendicolari al lato incognito** AB, il quadrilatero rimane diviso in due **triangoli retti** e in un **trapezio**, anch'esso retto. I triangoli retti ADD' e BCC' sono subito risolvibili, mentre il trapezio retto $DD'C'C$ lo diventa successivamente, dopo che sono state determinate le due basi DD' e CC' (dai triangoli retti precedenti), che si aggiungono al lato noto $CD = c$. L'**altezza** del trapezio $DM = D'C'$ viene utilizzata per determinare il lato incognito a del quadrilatero; in effetti si ha: $a = AB = AD' + D'C' + C'B$.

Osservazione. Nel quadrilatero che abbiamo esaminato, gli angoli noti α e β sono entrambi **acuti**, tuttavia la procedura non cambia se uno, o entrambi questi angoli, sono **ottusi**. In questo caso occorre solo ricordare di calcolare il lato a nel seguente modo: $a = D'C' - AD' - BC'$.

La ▶TABELLA 3 raccoglie e sintetizza le procedure necessarie a risolvere i quadrilateri che presentano i dati noti configurati come nel **caso 2**.

TABELLA 3 Caso 2: sintesi delle procedure

	Noti 3 lati e 2 angoli	Soluzione	
		Triangolo 1	**Triangolo 2**
a	 **FIGURA 15**	$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}$ $\alpha_1 = \arccos\dfrac{a^2 + e^2 - b^2}{2ae}$ $\gamma_1 = \arccos\dfrac{b^2 + e^2 - a^2}{2be}$	$\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$ $d = \sqrt{e^2 + c^2 - 2ec\cos\gamma_2}$ $\alpha_2 = \arccos\dfrac{d^2 + e^2 - c^2}{2de}$ $\delta = \arccos\dfrac{c^2 + d^2 - e^2}{2cd}$ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
b	 **FIGURA 16**	$e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}$ $\alpha_1 = \arccos\dfrac{a^2 + e^2 - b^2}{2ae}$ $\gamma_1 = \arccos\dfrac{b^2 + e^2 - a^2}{2be}$	$\alpha_2 = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{c}{e}\,\mathrm{sen}\,\delta\right)$ (*) $\gamma_2 = 200^c - (\alpha_2 + \delta)$ $d = \dfrac{e}{\mathrm{sen}\,\delta}\,\mathrm{sen}\,\gamma_2$ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (*) Occorre verificare se esistono due soluzioni
c	 **FIGURA 17**	$AD' = d\cos\alpha$ $DD' = d\,\mathrm{sen}\,\alpha$ $\delta_1 = 100^c - \alpha$	$BC' = b\cos\beta$ $CC' = b\,\mathrm{sen}\,\beta$ $\gamma_1 = 100^c - \beta$
		Trapezio 3 $CM = CC' - DD' \Rightarrow \delta_2 = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{CM}{c}\right)$ $\gamma_2 = 100^c - \delta_2$ $\quad DM = D'C' = c\,\mathrm{sen}\,\gamma_2$ $a = AD' + D'C' + C'B$ $\quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ $\quad \delta = \delta_1 + 100^c + \delta_2$	

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un quadrilatero ABCD del quale si conoscono le misure dei lati* $a = 110{,}48$ m, $b = 95{,}56$ m, $c = 123{,}75$ m *e degli angoli* $\beta = 119^c{,}7778$ *e* $\gamma = 113^c{,}8980$.

Soluzione

Indichiamo con *O* il punto di intersezione dei lati *AB* e *CD* (▶FIGURA 18). Sviluppo del triangolo *BOC* (caso 2, sottocaso *a*):

$$\beta_1 = 200^c - 199^c{,}7778 = 80^c{,}2222$$
$$\gamma_1 = 200^c - 113^c{,}8980 = 86^c{,}1020$$
$$\omega = 200^c - (80^c{,}2222 + 86^c{,}1020) = 33^c{,}6758$$

$$\overline{BO} = \frac{95{,}56 \operatorname{sen} 86^c{,}1020}{\operatorname{sen} 33^c{,}6758} = 184{,}864 \text{ m} \qquad \overline{CO} = \frac{95{,}56 \operatorname{sen} 80^c{,}2222}{\operatorname{sen} 33^c{,}6758} = 180{,}296 \text{ m}$$

Sviluppo del triangolo *AOD*:

$$\overline{AO} = 184{,}864 + 110{,}48 = 295{,}344 \text{ m}$$
$$\overline{DO} = 180{,}296 + 123{,}75 = 304{,}046 \text{ m}$$

$$d = \sqrt{295{,}344^2 + 304{,}046^2 - 2 \cdot 295{,}344 \cdot 304{,}046 \cdot \cos 33^c{,}6758} = 156{,}915 \text{ m}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{295{,}344^2 + 156{,}915^2 - 304{,}046^2}{2 \cdot 295{,}344 \cdot 156{,}915}\right) = 86^c{,}5715$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{304{,}046^2 + 156{,}915^2 - 295{,}344^2}{2 \cdot 304{,}046 \cdot 156{,}915}\right) = 79^c{,}7528$$

per controllo si ha: $(119^c{,}7778 + 113^c{,}8980 + 86^c{,}5715 + 79^c{,}7528) = 400^c{,}0001$.

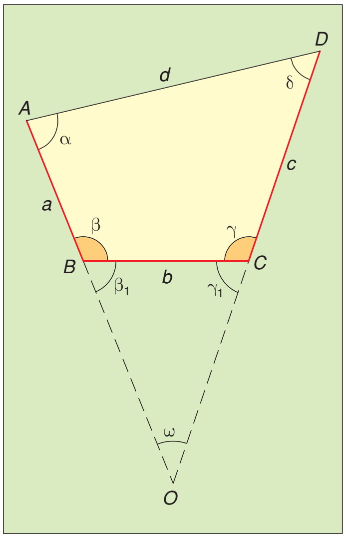


FIGURA 18 Quadrilatero relativo all'applicazione numerica.

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un quadrilatero ABCD del quale si conoscono le misure dei lati* $a = 170{,}20$ m, $b = 285{,}10$ m, $c = 300{,}40$ m *e degli angoli* $\alpha = 77^c{,}4960$ e $\delta = 88^c{,}1900$ *(caso 2, sottocaso c).*

Lasciamo allo studente come esercizio la costruzione di una figura compatibile con i dati assegnati.

Soluzione

Sviluppo del triangolo retto *ABB′*:

$$\overline{BB'} = 170{,}20 \operatorname{sen} 77^c{,}4960 = 159{,}676 \text{ m}$$
$$\overline{AB'} = 170{,}20 \cos 77^c{,}4960 = 58{,}92 \text{ m}$$
$$\beta_1 = 100^c - 77^c{,}4960 = 22^c{,}5040$$

Sviluppo del triangolo retto *DCC′*:

$$\overline{CC'} = 300{,}40 \operatorname{sen} 88^c{,}1900 = 295{,}246 \text{ m}$$
$$\overline{DC'} = 300{,}40 \cos 88^c{,}1900 = 55{,}41 \text{ m}$$
$$\gamma_1 = 100^c - 88^c{,}1900 = 11^c{,}8100$$

Sviluppo del triangolo retto *CBM*:

$$\overline{CM} = 295{,}246 - 159{,}676 = 135{,}57 \text{ m}$$
$$\beta_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{135{,}57}{285{,}10}\right) = 31^c{,}5478 \qquad \gamma_2 = \arccos\left(\frac{135{,}57}{285{,}10}\right) = 68^c{,}4522$$
$$\overline{BM} = 285{,}10 \operatorname{sen} 68^c{,}4522 = 250{,}804 \text{ m}$$
$$\overline{AD} = d = 58{,}92 + 55{,}41 + 250{,}804 = 365{,}134 \text{ m}$$
$$\beta = 100^c + 22^c{,}540 + 31^c{,}5478 = 154^c{,}0518$$
$$\gamma = 11^c{,}8100 + 68^c{,}4522 = 80^c{,}2622$$

Per controllo dei calcoli: $77^c{,}4960 + 88^c{,}1900 + 154^c{,}0518 + 80^c{,}2622 = 400^c$.

Caso 3 (noti due lati e tre angoli)

Si osservi, anzitutto, che essendo noti tre angoli, il **quarto** è già definito; quindi possiamo ritenere che tutti gli angoli siano noti. Questa configurazione può presentare i **due sottocasi** seguenti:

FAQ

▶ Nella risoluzione dei quadrilateri quando diventa indispensabile ricorrere alla scomposizione della figura in triangoli rettangoli?

Quando sono noti tre lati e i due angoli adiacenti al lato incognito.

- **i due lati noti sono consecutivi (adiacenti) (a)**;
- **i due lati noti sono opposti (non consecutivi) (b)**.

a) Il primo sottocaso è schematizzato dal quadrilatero *ABCD* di ▶FIGURA 19. Di esso supponiamo noti i **lati consecutivi** a e d, oltre agli angoli β, γ e δ. L'angolo α può essere facilmente calcolato ricordando che la somma degli angoli interni del quadrilatero è 400^c.

Tracciando la **diagonale** $BD = e$ (l'altra diagonale AC non consente la soluzione del problema), rimangono individuati i due triangoli *ABD* e *BCD*. Il primo è subito risolvibile, in quanto si conoscono **due lati** e l'**angolo compreso** (a, d, α); il secondo lo diventa subito dopo.

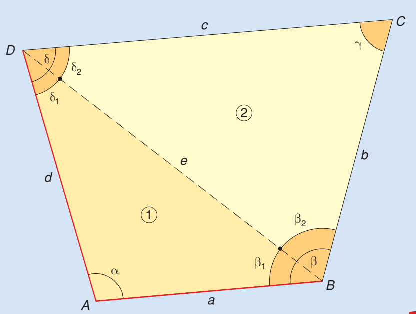
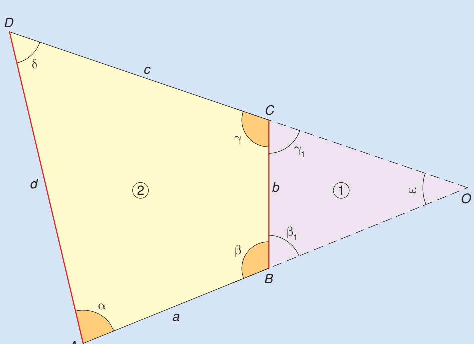
b) Il secondo sottocaso fa riferimento alla ▶FIGURA 20. In essa si osserva il quadrilatero *ABCD* di cui supponiamo noti i **lati opposti** b e d, oltre agli angoli α, β e γ (quindi è noto anche l'angolo δ).

La soluzione richiede il **prolungamento** dei due lati incogniti *AB* e *DC*. Essi si incontrano in un punto *O*, formando i due triangoli *OBC* e *OAD*, entrambi risolvibili indipendentemente l'uno dall'altro. I due lati incogniti sono poi facilmente calcolabili con le seguenti differenze: $a = OA - OB$; $c = OD - OC$.

Osservazione. Questo sottocaso può anche essere risolto **proiettando i lati noti** su uno, quale che sia, dei **lati incogniti**. Si vengono così a formare **due triangoli retti**, immediatamente risolvibili, e un **trapezio**, anch'esso retto, che diverrà risolvibile successivamente. Dalla soluzione di queste figure si ottengono i due lati incogniti.

La ▶TABELLA 4 sintetizza le procedure necessarie a risolvere i quadrilateri che presentano i dati noti come nel **caso 3**.

TABELLA 4 **Caso 3: sintesi delle procedure**

	Noti 2 lati e 3 angoli	Soluzione – Triangolo 1	Soluzione – Triangolo 2
a	 FIGURA 19	$\alpha = 400^c - (\beta + \gamma + \delta)$ $e = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha}$ $\beta_1 = \arccos\frac{a^2 + e^2 - d^2}{2ae}$ $\delta_1 = \arccos\frac{d^2 + e^2 - a^2}{2de}$	$\delta_2 = \delta - \delta_1$ $\beta_2 = \beta - \beta_1$ $c = \frac{e}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\beta_2$ $b = \frac{e}{\operatorname{sen}\gamma}\operatorname{sen}\delta_2$
b	 FIGURA 20	$\omega = (\beta + \gamma) - 200^c$ (*) $OC = \frac{b}{\operatorname{sen}\omega}\operatorname{sen}\beta$ $OB = \frac{b}{\operatorname{sen}\omega}\operatorname{sen}\gamma$ (*) Rinunciando al calcolo non essenziale di β_1 e γ_1.	$\delta = 400^c - (\beta + \gamma + \alpha)$ $OD = \frac{d}{\operatorname{sen}\omega}\operatorname{sen}\alpha$ $OA = \frac{d}{\operatorname{sen}\omega}\operatorname{sen}\delta$ $a = OA - OB$ $c = OD - OC$

APPLICAZIONE

Problema *Determinare gli elementi incogniti di un quadrilatero ABCD del quale si conoscono le misure dei lati* $b = 719{,}30$ m*,* $d = 394{,}28$ m *e degli angoli* $\alpha = 121°30'$, $\beta = 81°36'$ *e* $\gamma = 68°20'$.

Soluzione

Sviluppo del triangolo *OBC*:

$$\delta = 360° - (121°30' + 81°36' + 68°20') = 88°34'$$

$$\omega = 180° - (81°36' + 68°20') = 30°04'$$

$$\overline{BO} = \frac{719{,}30 \operatorname{sen} 68°20'}{\operatorname{sen} 30°04'} = 1334{,}27 \text{ m} \qquad \overline{CO} = \frac{719{,}30 \operatorname{sen} 81°36'}{\operatorname{sen} 30°04'} = 1420{,}31 \text{ m}$$

Sviluppo del triangolo *OAD*:

$$\overline{AO} = \frac{394{,}28 \operatorname{sen} 88°34'}{\operatorname{sen} 30°04'} = 786{,}73 \text{ m} \qquad \overline{DO} = \frac{394{,}28 \operatorname{sen} 121°30'}{\operatorname{sen} 30°04'} = 671{,}01 \text{ m}$$

In definitiva:

$$AB = a = 1334{,}27 - 786{,}73 = 547{,}54 \text{ m}$$

$$DC = c = 1420{,}31 - 671{,}01 = 749{,}30 \text{ m}$$

8. Risoluzione dei poligoni

Affinché un poligono sia risolvibile, come visto in precedenza, è necessario conoscere inizialmente almeno $(2n - 3)$ elementi, dei quali almeno $(n - 2)$ dovranno essere lati.

La casistica che si può presentare nella risoluzione dei poligoni è talmente vasta da non poter essere schematizzata in **casi tipologici** di riferimento come è avvenuto per i quadrilateri. Tuttavia, la strategia risolutiva è concettualmente la stessa vista per i quadrilateri, e consiste nello **scomporre** il poligono in **triangoli** (per esempio utilizzando le diagonali), tenendo conto degli elementi inizialmente noti, che verranno via via risolti fino a fornire il valore degli elementi incogniti del poligono.

Ci limitiamo, pertanto, a illustrare i passaggi necessari alla risoluzione del poligono $ABCDE$ di 5 lati (▶FIGURA 21) di cui ipotizziamo noti i quattro lati a, b, c, d e i tre angoli interni β, γ e δ (dunque 7 elementi come è necessario).

FAQ

▶ Quanti elementi occorre conoscere per risolvere un poligono di 5 lati?

Sette elementi, dei quali almeno tre devono essere lati o elementi lineari.

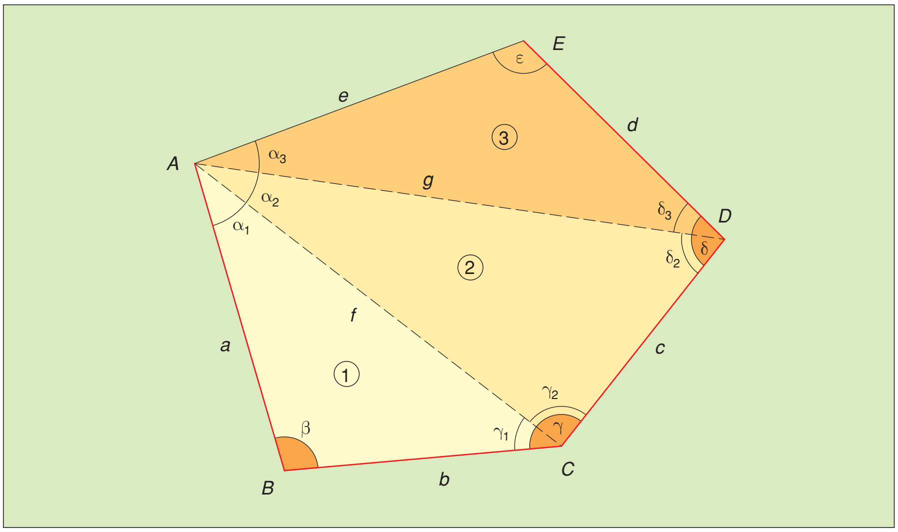


FIGURA 21 Scomposizione di un poligono in triangoli per mezzo delle diagonali.

Una delle possibili strategie da seguire per ottenere gli elementi incogniti del poligono (il lato e e gli angoli α e ε), è quella di tracciare le due diagonali AC ed AD; esse scompongono il poligono nei tre triangoli ABC, ACD, ADE (numerati, in figura, da 1 a 3).

Il primo di essi è immediatamente risolvibile, e da esso si ottengono la lunghezza della diagonale $f = AC$ e gli angoli α_1 e γ_1. Con f e con $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$ diviene risolvibile anche il triangolo 2, ACD, dal quale si ottengono la diagonale $g = AD$, e gli angoli α_2 e δ_2. Infine è possibile determinare $\delta_3 = \delta - \delta_2$ e quindi risolvere il triangolo 3, EAD, calcolando il lato e e l'angolo ε che costituiscono due delle tre incognite del poligono. Dallo stesso triangolo si può ricavare α_3, che consente di determinare il terzo elemento incognito del poligono: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

9. Area dei poligoni

L'area di un poligono può sempre essere calcolata come **somma delle aree** delle figure elementari (in genere triangoli) evidenziate scomponendo il poligono. Esiste, tuttavia, la possibilità di utilizzare, per lo stesso scopo, formule che forniscono **direttamente** l'area del poligono; le più utili sono:

- formule di Gauss;
- formula di camminamento.

Le **formule di Gauss** richiedono la conoscenza delle coordinate cartesiane dei vertici del poligono; esse, pertanto, verranno esaminate nella prossima unità.

La **formula di camminamento** fornice l'area del poligono utilizzando le **lunghezze dei lati meno uno**, e gli **angoli tra essi compresi**, misurati percorrendo il perimetro del poligono (da cui il termine *camminamento*).

Considerando il poligono di 5 lati di ▶FIGURA **21**, per applicare la formula di camminamento, è necessario conoscere la lunghezza di $(5 - 1) = 4$ lati (nell'esempio a, b, c, d) e l'ampiezza dei tre angoli interni β, γ e δ tra essi compresi.

La formula di camminamento per calcolare l'area dei poligoni viene ricavata dal seguente enunciato.

L'area dei poligoni è fornita dalla semisomma algebrica di **tutti i possibili prodotti** dei lati presi a **due a due** (combinazioni), per il **seno della somma degli angoli** che si incontrano per andare dall'uno all'altro lato del prodotto, presi con il segno **positivo** o **negativo** a seconda che il numero di questi angoli incontrati sia **dispari** o **pari**.

Traducendo questo enunciato per il poligono di ▶FIGURA **21**, si ottiene:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}[&ab \operatorname{sen}\beta - ac \operatorname{sen}(\beta+\gamma) + ad \operatorname{sen}(\beta+\gamma+\delta) + \\ &+ bc \operatorname{sen}\gamma - bd \operatorname{sen}(\gamma+\delta) + cd \operatorname{sen}\delta] \end{aligned} \tag{13}$$

Nel caso di un **quadrilatero** (poligono di 4 lati) dovranno essere noti $(4 - 1) = 3$ lati e i due angoli interni tra essi compresi. Con riferimento alla ▶FIGURA **22**, la formula di **camminamento** diventa:

$$S = \frac{1}{2}[ab \operatorname{sen}\beta - ac \operatorname{sen}(\beta+\gamma) + bc \operatorname{sen}\gamma] \tag{13'}$$

FAQ

▶ È possibile ottenere l'area di un poligono in modo diretto, senza scomporlo in figure elementari?

Sì, utilizzando la formula di camminamento o una delle formule di Gauss.

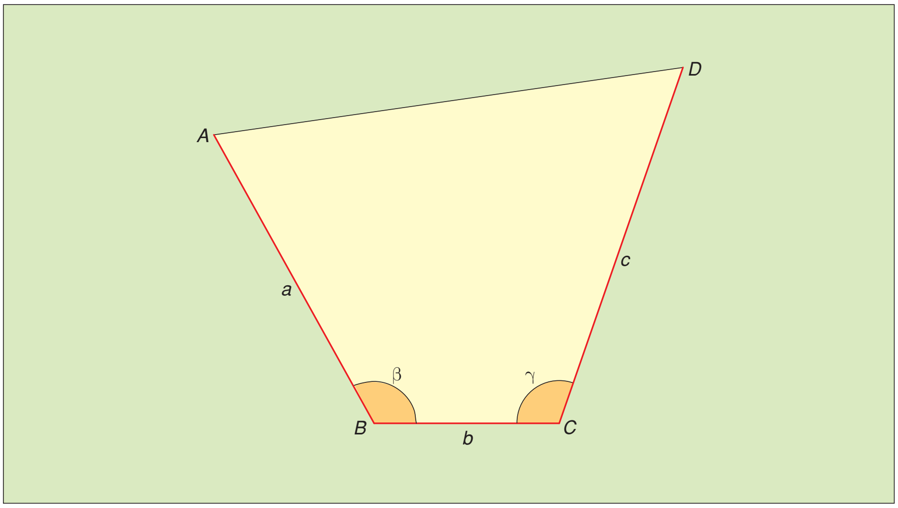


FIGURA 22 Elementi necessari al calcolo dell'area di un quadrilatero con la formula di camminamento.

10. Problema della distanza inaccessibile

Si tratta di un problema pratico assai noto nell'ambito topografico; con esso ci si pone l'obiettivo di determinare la **distanza** tra due punti A e B, entrambi **inaccessibili** ma visibili da una coppia di punti M e N scelti arbitrariamente.

Questa situazione si può presentare quando i due punti A e B sono, per esempio, dalla parte opposta di un corso d'acqua, o di una strada a grande traffico, rispetto alla zona dalla quale si opera (▶FIGURA 23).

Per risolvere questo problema si fissano sul terreno due punti arbitrari M ed N dai quali si vedano i punti A e B. Si misurano poi direttamente la lunghezza del segmento $\overline{MN} = b$, chiamato **base**, e i quattro angoli $A\widehat{M}N = \alpha$, $B\widehat{M}N = \beta$, $M\widehat{N}A = \gamma$, $M\widehat{N}B = \delta$.

Dei triangoli AMN e BMN si conoscono un lato (la base b) e due angoli; potremo quindi applicare il teorema dei seni per calcolare i segmenti $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$:

$$\overline{AM} = \frac{b \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)} \qquad \overline{BM} = \frac{b \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}(\beta + \delta)}$$

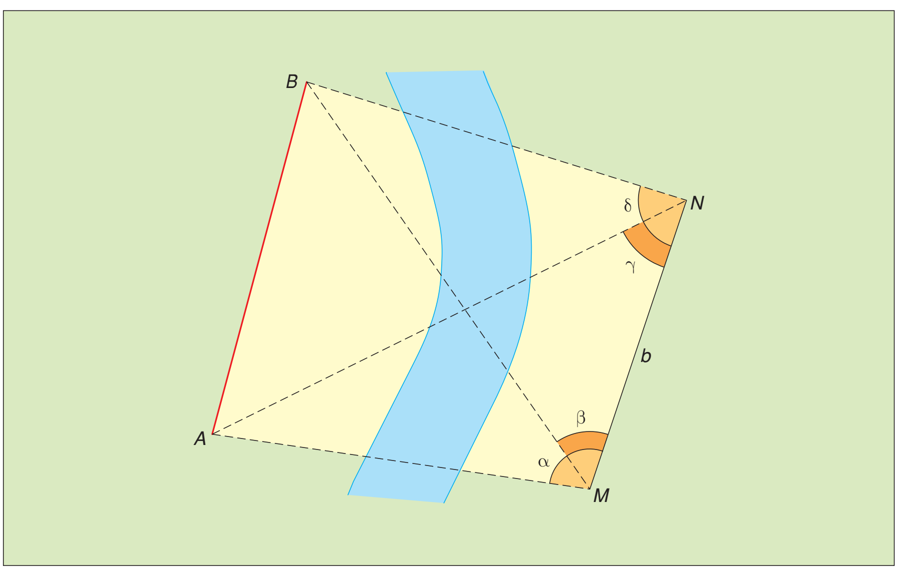


FIGURA 23 I punti A e B sono inaccessibili, ma entrambi visibili da M e da N. Esiste, tuttavia, una procedura per determinare comunque la loro distanza.

A questo punto del triangolo ABM sono noti i due lati $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$ e l'angolo $A\widehat{M}B = (\alpha - \beta)$, quindi si può determinare la distanza incognita $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BM} \cos(\alpha - \beta)}$$

APPLICAZIONE

Problema *Per determinare la distanza tra due punti E ed F, completamente inaccessibili, si sono misurati la base $\overline{MN} = b = 300$ m e gli angoli $E\widehat{M}N = 76^c,6697$, $M\widehat{N}E = 19^c,1583$, $F\widehat{M}N = 60^c,1870$, $M\widehat{N}F = 60^c,0920$.*

Lasciamo allo studente l'esercizio di costruire la figura in scala opportuna.

Soluzione

Sviluppo dei triangoli *EMN* e *FMN*:

$$\overline{ME} = \frac{300 \operatorname{sen} 19^c,1583}{\operatorname{sen}(76^c,6697 + 19^c,1583)} = 89,116 \text{ m}$$

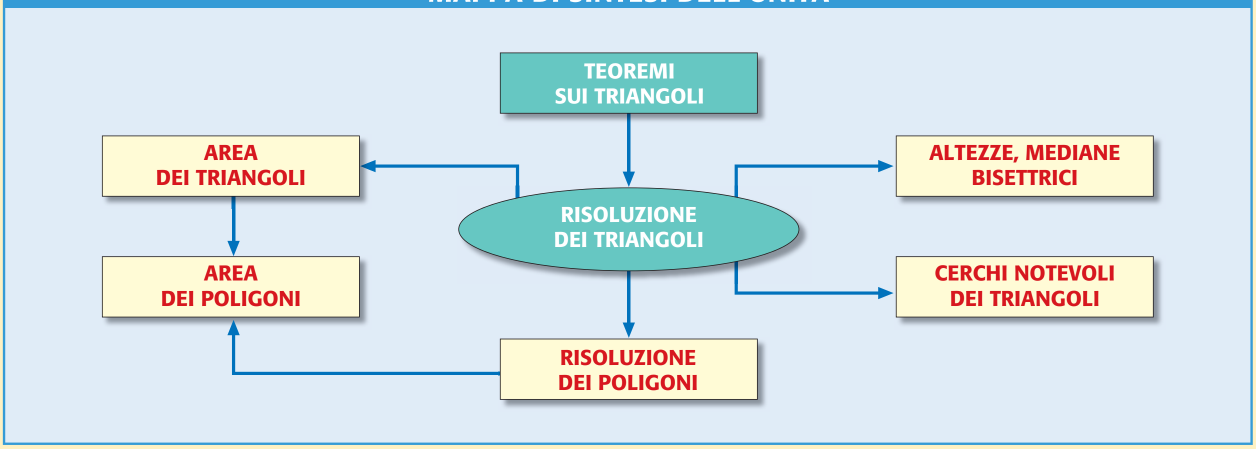
$$\overline{MF} = \frac{300 \operatorname{sen} 60^c,0920}{\operatorname{sen}(60^c,1870 + 60^c,0920)} = 255,83 \text{ m}$$

Sviluppo del triangolo *EFM*:

$$\overline{EF} = \sqrt{89,116^2 + 255,83^2 - 2 \cdot 89,116 \cdot 255,83 \cos(76^c,6697 - 60^c,1870)} = 171,21 \text{ m}$$

Riassumendo

MAPPA DI SINTESI DELL'UNITÀ



Relazioni fondamentali tra gli elementi di un triangolo: la geometria ci fornisce le seguenti relazioni generali tra gli elementi di un triangolo scaleno (qualunque):

- La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale all'angolo piatto: $\alpha + \beta + \gamma = 200^c$.
- In ogni triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (per esempio $c < a + b$ e anche $c > a - b$).
- In ogni triangolo la relazione di uguaglianza o disuguaglianza che intercorre tra due lati vale anche per gli angoli rispettivamente opposti (per esempio, se $a > b$, sarà anche $\alpha > \beta$).

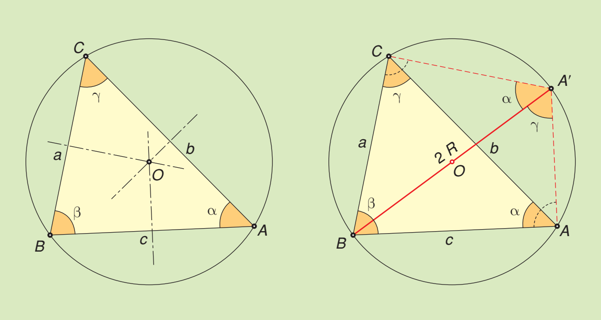
I teoremi della trigonometria: oltre alle relazioni precedenti, i lati e gli angoli dei triangoli sono legati da altre importanti relazioni che prevedono la presenza di funzioni goniometriche; esse prendono il nome di *teoremi*. In passato l'esigenza del calcolo logaritmico richiedeva la conoscenza di numerosi teoremi. Oggi la diffusione delle *calcolatrici tascabili* rende essenziale la conoscenza di soli due teoremi: il *teorema dei seni* e il *teorema di Carnot*.

Enunciato del teorema dei seni: *in un triangolo il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è costante, ed è uguale al diametro del cerchio circoscritto*. In forma compatta possiamo scrivere:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

equivalenti alle relazioni:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$$



Enunciato del teorema di Carnot: *in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, dedotta del doppio prodotto di questi lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso*. In forma compatta possiamo scrivere:

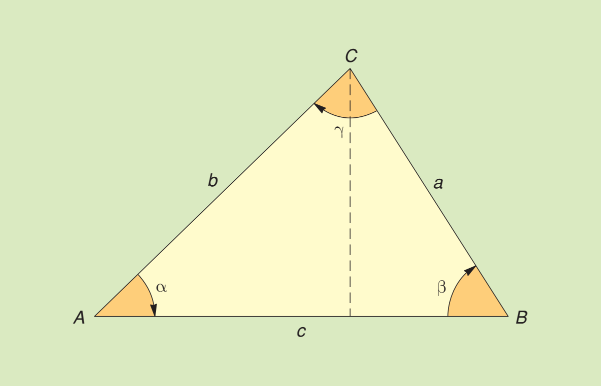
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

espressioni che possono assumere le seguenti forme, altrettanto importanti:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Le relazioni tra gli elementi dei triangoli permettono di *risolvere* i triangoli stessi, vale a dire permettono di ricavare gli elementi incogniti quando siano noti alcuni degli elementi geometrici del triangolo. Affinché il calcolo sia possibile è necessario che siano noti almeno *tre elementi*, di cui almeno *uno* deve essere lineare (lato).

Quattro sono i casi a cui ricondurre la risoluzione dei triangoli. Essi possono essere sintetizzati nella seguente tabella a doppia entrata che illustra quali sono le *relazioni* e i *teoremi* da applicare (seguendo l'ordine indicato dal numero in ogni casella) per risolvere il triangolo in ciascuno dei quattro casi.



Elementi noti	Teoremi e relazioni da applicare		
	T. Carnot	T. seni	$\alpha + \beta + \gamma = 200^c$
Caso 1 1 lato e 2 angoli	–	**2ª e 3ª incognita**: i restanti due lati	**1ª incognita**: il 3° angolo
Caso 2 2 lati e l'angolo compreso	**1ª incognita**: il 3° lato	**2ª incognita**: uno degli angoli non assegnati	**3ª incognita**: l'ultimo angolo non assegnato
Caso 3 2 lati e uno degli angoli opposti	**3ª incognita**: il terzo lato	**1ª incognita**: l'angolo opposto all'altro lato noto	**2ª incognita**: ultimo angolo non assegnato
Caso 4 3 lati	**1ª, 2ª e 3ª incognita**: i tre angoli	–	–

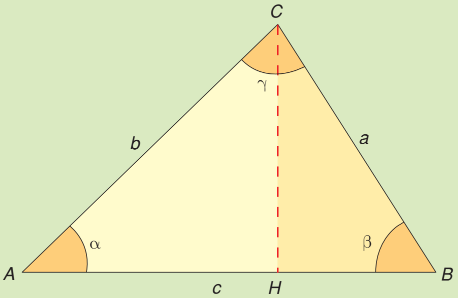
Durante la risoluzione del 3° caso occorre di volta in volta riflettere sui risultati ottenuti, in quanto possono verificarsi le seguenti situazioni:

- il problema è determinato e ha un'*unica soluzione*;
- il problema è determinato e ha due soluzioni;
- il problema è impossibile.

Quest'ultima eventualità si verifica quando non viene rispettata una delle relazioni fondamentali che legano gli elementi di un triangolo.

L'area dei triangoli: in trigonometria, l'area dei triangoli può essere espressa in numerose forme, tutte significative, legate agli elementi assegnati che sono richiesti nel calcolo. Ciascuna di queste forme può adattarsi meglio delle altre a determinati contesti di calcolo.

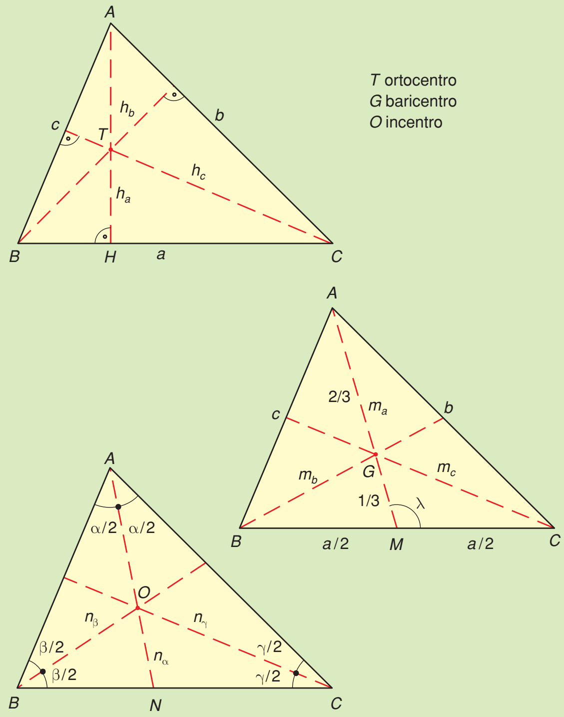
Le diverse formule che forniscono l'area dei triangoli vengono ricavate utilizzando la nota formula geometrica: $S = b \cdot h/2$; esse sono sintetizzate nella seguente tabella.



Elementi noti	Area dei triangoli: formule da applicare
Caso 1 Due lati e l'angolo compreso (es.: b, c, α)	$S = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} \alpha$
Caso 2 (a) Due angoli e il lato compreso (es.: α, β, c)	$S = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$
Caso 2 (b) Due angoli e il lato compreso (es.: α, β, c)	$S = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$
Caso 3 Tre lati (a, b, c)	$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$

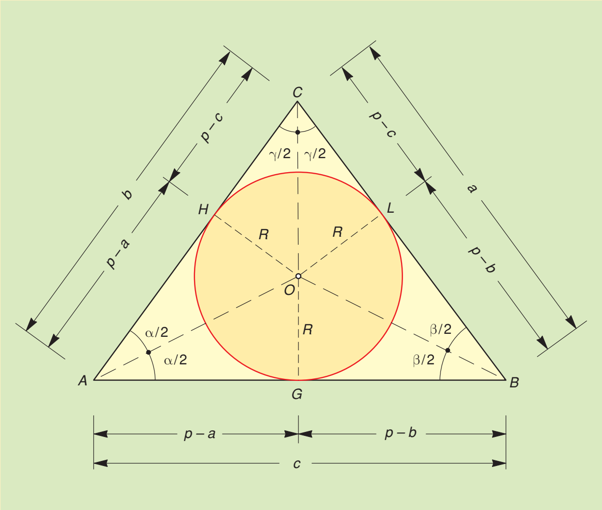
Cerchi notevoli: per ciascun triangolo si possono definire tre tipologie di cerchi, detti notevoli per sottolineare la loro importanza. Essi sono: cerchio *circoscritto*, cerchio *inscritto* e cerchi (3) *ex-inscritti*. I modi di definire il centro e il raggio di questi cerchi vengono sintetizzati nella tabella in basso a destra.

Punti notevoli: per ciascun triangolo si possono definire alcuni punti che godono di determinate proprietà che occorre saper riconoscere. In parte sono già stati presentati, in parte sono proposti nella seguente tabella.



Punti notevoli	Definizione del punto
Baricentro	Intersezione delle tre mediane
Ortocentro	Intersezione delle tre altezze
Circocentro	Intersezione degli assi dei tre lati
Incentro	Intersezione delle tre bisettrici
Ex-incentri	Intersezione delle bisettrici di 2 angoli esterni e della bisettrice dell'angolo interno opposto

Tipi di cerchi ed elementi noti	Elementi dei cerchi notevoli	
	Raggio	Centro del cerchio
Circoscritto un lato e l'angolo opposto	$R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \alpha}$	**Circocentro**: intersezione degli assi dei lati
Inscritto tre lati a, b, c	$R = \frac{S}{p}$	**Incentro**: intersezione delle bisettrici degli angoli
Ex-inscritti (es. relativo al lato a) tre lati a, b, c	$R_a = \frac{S}{(p-a)}$	**Ex-incentri**: intersezione delle bisettrici di 2 angoli esterni e della bisettrice dell'angolo interno opposto



Retta di Eulero: in un triangolo, il *baricentro*, l'*ortocentro* e il *circocentro* sono allineati lungo un'unica retta detta di Eulero.

Elementi necessari per risolvere un quadrilatero: per risolvere un quadrilatero sono necessari 5 elementi, dei quali almeno 2 devono essere lati.

- Più in generale, per risolvere una figura piana di n lati, sono necessari $(2n - 3)$ elementi, di cui almeno $(n - 2)$ devono essere lati.

Relazione tra gli angoli interni ed esterni di un quadrilatero: la somma degli angoli interni di un quadrilatero è di 400^c (angolo giro), dunque è possibile scrivere la relazione:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 400^c$$

- Più in generale, in una figura piana di n lati la somma degli angoli interni e di quelli esterni è ricavabile dalle seguenti relazioni:

$$\Sigma \text{ angoli interni} = (n - 2) \cdot 200^c$$

$$\Sigma \text{ angoli esterni} = (n + 2) \cdot 200^c$$

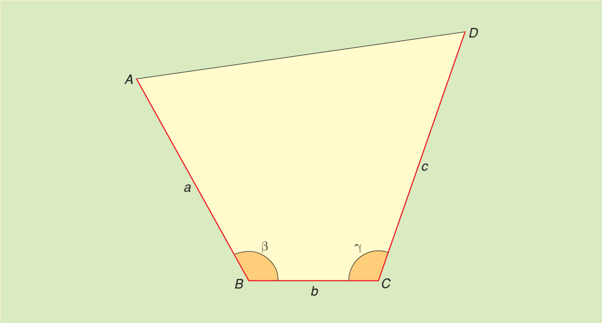
Scomposizione del quadrilatero in triangoli: per risolvere un quadrilatero è necessario scomporlo in triangoli. In genere si tratta di **triangoli qualunque** individuati da una delle due diagonali o dal prolungamento di due lati contrapposti. Tuttavia, nel caso siano noti 3 lati e i 2 angoli adiacenti al lato incognito, è necessario scomporre il quadrilatero in **triangoli rettangoli**.

- In quest'ultimo caso i triangoli rettangoli vengono individuati proiettando i lati noti sul lato incognito.

Il calcolo dell'area del quadrilatero può avvenire come somma delle aree dei triangoli in cui può essere scomposto. Tuttavia è possibile calcolare direttamente l'area del quadrilatero applicando la seguente formula:

$$S = \frac{1}{2}[ab \operatorname{sen}\beta - ac \operatorname{sen}(\beta + \gamma) + bc \operatorname{sen}\gamma]$$

dove a, b e c sono le lunghezze di tre lati del quadrilatero; β e γ sono gli angoli compresi tra i lati stessi. Questa relazione è nota come *formula di camminamento*.

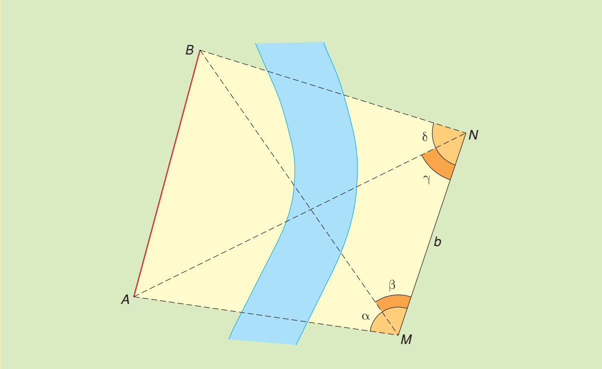


Problemi topografici sulla misura delle distanze: la trigonometria permette di risolvere alcuni elementari problemi topografici connessi alla misura della distanza tra due punti A e B, in determinate situazioni restrittive che impediscono la misura diretta. Tra i più noti di questi problemi e quello della distanza inaccessibile, che si propone di determinare la distanza tra due punti A e B entrambi inaccessibili. Per risolvere questo problema si scelgono allora due punti M e N da cui siano visibili sia A che B, e si misura la distanza $\overline{MN} = b$, detta *base*. Si misurano poi gli angoli $A\widehat{M}N = \alpha$, $B\widehat{M}N = \beta$, $M\widehat{N}A = \gamma$, $M\widehat{N}B = \delta$. Si risolvono prima i triangoli AMN e BMN determinando $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$:

$$\overline{AM} = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\alpha + \gamma)} \qquad \overline{BM} = \frac{b \operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\delta + \beta)}$$

quindi dal triangolo ABM segue:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BM} \cos(\alpha - \beta)}$$



LABORATORIO INFORMATICO

AutoCAD

Risoluzione di un triangolo assegnati i tre lati

DI COSA CI OCCUPIAMO

Con questa esercitazione ci proponiamo di risolvere un triangolo qualunque utilizzando AutoCAD in sostituzione della calcolatrice. Si tratta, in effetti, prima di disegnare in ambiente AutoCAD il triangolo proposto per lo sviluppo, quindi di estrarre da esso tutte quelle informazioni geometriche che sono ritenute utili e necessarie.

I sistemi CAD possono essere utilizzati efficacemente anche nell'ambito della risoluzione delle figure piane. In questo contesto ci proponiamo di risolvere il seguente:

Problema

Nel triangolo qualunque ABC sono noti i tre lati, che possiedono le seguenti lunghezze:

$$a = 132{,}60 \text{ m} \qquad b = 123{,}40 \text{ m} \qquad c = 160{,}75 \text{ m}$$

Determinare:

- gli angoli interni;
- il perimetro e l'area;
- i raggi dei cerchi circoscritto e inscritto.

La tecnica da adottare è quella di **disegnare** il triangolo in ambiente AutoCAD e successivamente **interrogare** il sistema per ottenere quelle informazioni che sono richieste dal problema.

Nello sviluppo dell'esercitazione viene impiegato il sistema AutoCAD; i comandi, poi, verranno spesso introdotti da **tastiera**, un po' per opportunità espositiva, un po' perché talvolta sono i più rapidi da evocare, ma soprattutto perché gli strumenti più intuitivi e immediati, come le **icone** presenti nelle *barre degli strumenti* o nella *barra multifunzione*, sono mobili e facilmente personalizzabili, dunque non costituiscono un riferimento sicuro per l'esposizione dell'esercitazione.

1. Preparazione del foglio virtuale bidimensionale

Quando si disegna a mano si ha a disposizione un **foglio** di carta ben definito nelle sue dimensioni, i cui limiti possono essere percepiti immediatamente dal disegnatore e di cui egli deve tenere conto fin dall'inizio del disegno. In AutoCAD, invece, si ha a disposizione un **foglio vituale** praticamente illimitato, tuttavia è conveniente che questo spazio virtuale, prima di iniziare a disegnare, venga circoscritto dall'utente stabilendo dei limiti all'interno dei quali AutoCAD genererà gli elementi grafici. Naturalmente è possibile in ogni momento **ridimensionare** questo spazio virtuale senza che in nessun modo venga compromesso quanto già disegnato.

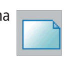
Questa prima sezione dell'esercitazione descrive i primi passi da compiere per la creazione di un **nuovo foglio** e per il suo adeguamento al disegno da eseguire. Le fasi descritte in questo contesto sono da considerare preliminari e **preparatorie** al disegno vero e proprio. Esse riguardano le seguenti operazioni:

- creazione di un nuovo foglio per il disegno
- dimensionamento del foglio virtuale (limiti del foglio)
- visualizzazione (sullo schermo) dell'intero foglio
- personalizzazione delle unità di misura

Creazione di un nuovo disegno: comando nuovo (new)

Per creare un **nuovo foglio** per il disegno, dopo essere entrati nell'ambiente AutoCAD, sono disponibili quattro possibilità:

Icona



- l'**icona** corrispondente della barra degli strumenti (▶FIGURA A);
- il comando **Nuovo** del menu a tendina **File**;
- la sequenza di **scelta rapida** premendo contemporaneamente i tasti **Ctrl+N**;
- digitando il comando **nuovo** dalla finestra di comando.

Qualunque sia la via scelta, dopo aver lanciato il comando, compare una finestra di dialogo nella quale occorre selezionare un **disegno modello**; nel nostro caso basterà scegliere quello predefinito **acad.dwt** (▶FIGURA A). Subito dopo comparirà un foglio di lavoro completamente vuoto, che corrisponde all'equivalente di un foglio di carta bianca, contenente anche alcune **impostazioni predefinite** *(dimensioni del foglio*, *unità di misura* ecc.) che successivamente modificheremo adattandole alle esigenze di un contesto topografico.

Dimensionamento del foglio virtuale: comando limiti (limits)

Questo comando serve a impostare le dimensioni rettangolari dello *spazio* (foglio virtuale) sul quale verranno poi creati gli elementi del disegno. Queste dimensioni vengono assegnate attraverso le coordinate dell'angolo in basso a sinistra e le coordinate dell'angolo in alto a destra. A differenza del tradizionale *foglio cartaceo*, tuttavia, le dimensioni del *foglio virtuale* possono essere modificate (sempre col comando **limiti**) in ogni momento della sessione di lavoro, senza che nulla di quanto già disegnato vada perduto. Dunque per dimensionare inizialmente il nostro spazio conviene **valutare approssimativamente** lo spazio necessario in entrambe le direzioni, quindi lanciare da tastiera il comando **limiti** (oppure utilizzando **Limiti disegno** del menu

LABORATORIO INFORMATICO

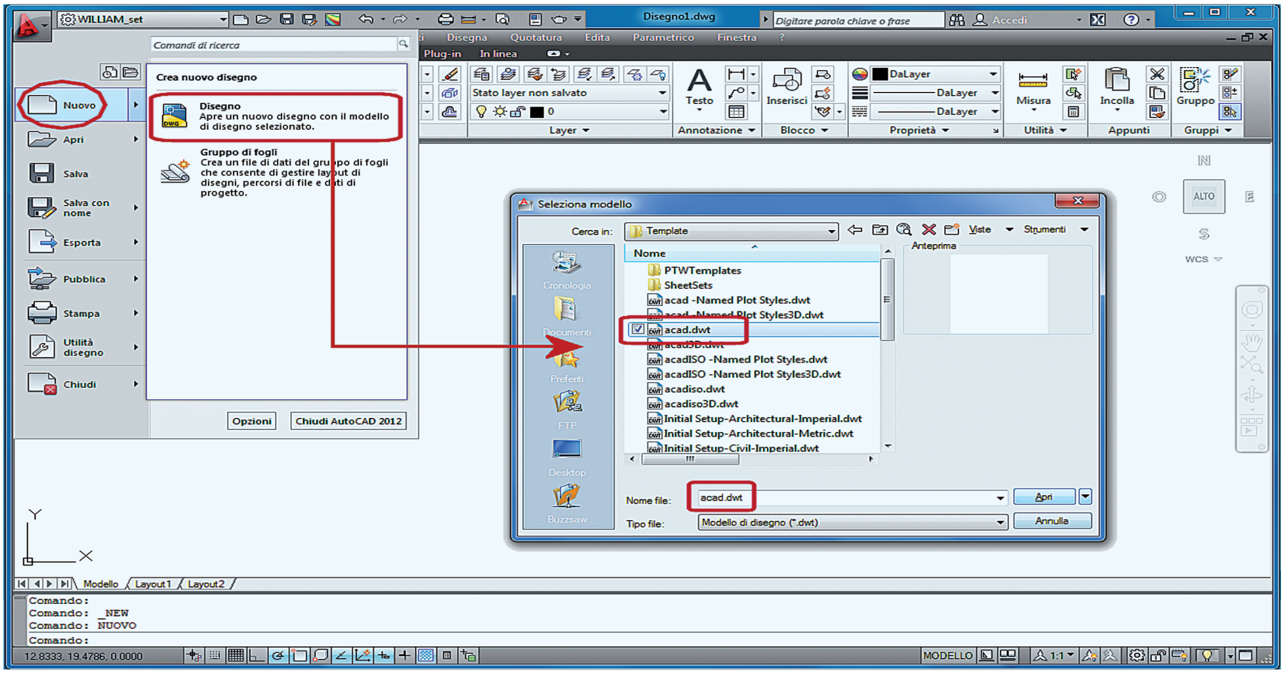


FIGURA A La creazione di un *nuovo foglio* per il disegno richiede la selezione di un *disegno modello* caratterizzato dalla estensione DWT.

a tendina **Formato**). Nella **finestra di comando** collocata nella parte inferiore dello schermo (o nel **riquadro di dialogo** prossimo al cursore se è attivata la modalità **DIN**, *inserimento dinamico*) scorreranno le seguenti informazioni:

```
Comando: limiti (limits)↲
Ripristino dell'impostazione dei limiti
dello Spazio modello:
Specificare angolo inferiore sinistro
o [ON/OFF] <0.0000,0.0000>: ↲
Specificare angolo superiore destro
<420.0000,297.0000>: 250,200 ↲
```

Ricordiamo che tra parentesi angolari (<...>) AutoCAD propone i **valori attuali** che possono essere accettati premendo il **tasto invio** (rappresentato dal simbolo ↲), oppure sostituiti da nuovi valori immessi, che nel nostro caso sono indicati in grassetto.

Dunque, dopo aver digitato il comando **limiti**, compare una nuova linea con le *opzioni* connesse al comando. Premendo nuovamente il **tasto invio** (↲) si accetta che le coordinate dell'angolo inferiore sinistro siano quelle proposte dal programma (0.000 , 0.000). Ricordiamo che la **virgola** viene assunta come **separatore tra le coordinate** del vertice (x , y), mentre il **punto** è assunto come **separatore dei decimali** nei numeri reali.

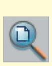
Dopo aver definito l'angolo inferiore sinistro, compare una nuova riga che richiede l'immissione delle coordinate dell'angolo superiore destro. Se digitiamo 250,200 (che significa X = 250 e Y = 200) si avrà un foglio virtuale di lavoro le cui dimensioni sono 250 unità di disegno in orizzontale e 200 unità di disegno in verticale.

Tali numeri, tuttavia, non indicano una unità di misura predefinita, ma solo i rapporti di misura esistenti tra le varie entità che saranno disegnate; sarà poi in fase di formazione dei **layout di stampa** che occorrerà ricordare con precisione a cosa corrisponde l'unità di disegno utilizzata.

Il comando **limiti**, però, non modifica la porzione di foglio virtuale visualizzata sullo schermo. Per fare in modo che tutto lo spazio appena impostato sia completamente visibile occorre utilizzare il comando **zoom**.

• Visualizzazione di tutto il foglio virtuale: comando zoom (zoom)

Questo comando viene usato con grande frequenza in qualsiasi sessione di lavoro in AutoCAD, perché accade spesso di disegnare oggetti più grandi dello schermo, oppure oggetti complessi di cui occorre ingrandire i particolari. Nel nostro caso il comando **zoom** permette la visualizzazione sullo schermo di tutto lo spazio definito in precedenza con il comando **limiti**. Nella **finestra di comando** scorreranno le seguenti righe:

Icona 

```
Comando: zoom (zoom) ↲
Specificare un angolo della finestra,
digitare un fattore di scala(nX o nXP)
o [Tutto/Centrato/Dinamico/Estensioni/
Precedente/scAla/Finestra/Oggetto]
<tempo reale>: T ↲
Rigenerazione modello in corso
```

LABORATORIO INFORMATICO

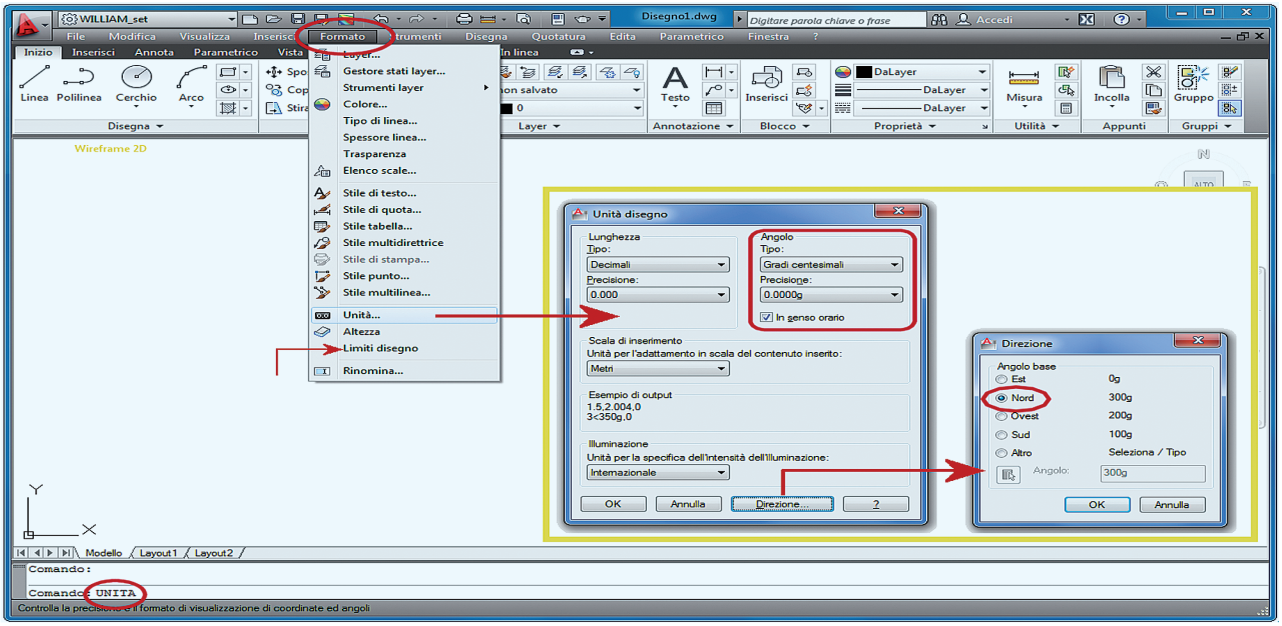


FIGURA B Finestre di dialogo per la personalizzazione delle unità di misura utilizzate nel disegno. In ambito topografico tale operazione è importante, in particolare per le unità di misura *angolari*.

L'opzione **T** del comando **zoom** serve appunto a visualizzare tutto lo spazio del disegno sullo schermo (allo stato attuale del disegno, questo comando non produrrà effetti direttamente visibili).

• Personalizzazione delle unità di misura: comando unita (units)

Prima di iniziare il disegno vero e proprio, è necessario specificare sia il **sistema di misura** che si intende usare nella creazione degli elementi grafici del disegno, per gli **angoli** e per le **distanze**, sia le **approssimazioni** di tali grandezze.

In particolare nella nostra disciplina si fa riferimento a una modalità di trattare gli **angoli** che differisce da quella usata in matematica ed adottata come predefinita da AutoCAD. In effetti, in topografia, è opportuno che l'*origine degli angoli* sia coincidente con l'asse delle **ordinate** e il senso positivo quello **orario** (in matematica l'origine della misura degli angoli si trova sull'asse delle *ascisse* e il senso positivo è quello *antiorario*). Inoltre il sistema di misura più frequentemente usato è il sistema **centesimale** e non quello *decimale*.

Tutte queste informazioni, oltre a quelle relative al **numero di cifre** decimali da utilizzare, vengono fornite al sistema dal comando **unita** (senza accento) digitato da tastiera nella **finestra di comando**, oppure dallo stesso comando selezionato dal menu a tendina **Formato** (▶FIGURA B). Esso prevede due finestre di dialogo nelle quali stabilire le caratteristiche del **sistema di misura** che si vuole adottare. Nel nostro caso le indicazioni dovranno essere quelle visualizzate e evidenziate nella ▶FIGURA B.

• Creazione di un modello

All'inizio del paragrafo 1 si è visto che all'atto della creazione di un nuovo disegno è necessario scegliere un **disegno modello** che contiene determinate **impostazioni** iniziali. Nel nostro caso si è scelto il modello predefinito **acad.dwt**; tuttavia è stato poi necessario **modificare** alcune delle sue impostazioni. Per evitare di **ripetere** queste operazioni di impostazione iniziale a ogni creazione di un **nuovo disegno**, conviene creare un nuovo **disegno modello** che, nel nostro caso, non conterrà elementi grafici, ma solo le impostazioni formulate in precedenza.

Per creare un disegno **modello** basta selezionare la voce **Salva con nome** dal menu a tendina **File**. Nella finestra di dialogo che appare occorre assegnare un nome al modello (per esempio **topografia**) e, soprattutto, selezionare **modello di disegno di AutoCAD (*.dwt)** nella tendina **Tipo file** collocata nella parte bassa della finestra di dialogo.

Alla successiva creazione di un **nuovo disegno**, basterà selezionare il modello **topografia.dwt**, al posto di quello predefinito e generico **acad.dwt**, per evitare di modificare le impostazioni.

2. Disegno del triangolo assegnato dal problema

Possiamo ora procedere al disegno del triangolo utilizzando gli elementi geometrici assegnati, vale a dire i **tre lati**. Trattandosi di un triangolo *non orientato*, non ha alcuna importanza la sua collocazione e la sua rotazione, ma è solo indispensabile che vengano rispettate le lunghezze dei tre lati assegnati.

LABORATORIO INFORMATICO

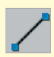
Tracciamento del segmento *AB*

Iniziamo disegnando il primo lato $AB = c = 160{,}75$ m del triangolo. A tal fine occorre procedere in questo modo:

- evocare il comando **linea**;
- posizionare il puntatore in un **punto a piacere** dell'area di lavoro per individuare arbitrariamente il punto A;
- dirigere la **linea elastica**, che si viene a creare tra questo e il puntatore, in una **direzione a piacere** (noi, per semplicità, imporremo una direzione **orizzontale** attivando la modalità **ORTO** dalla **barra di stato** nella parte bassa dello schermo) e digitare la lunghezza del lato, cioè 160,75.

Il comando **linea** può essere attivato con l'icona corrispondente del pannello **Disegno 2D** nella parte alta della **plancia di comando** (cerchiato in ▶FIGURA **C**), oppure dalla **finestra di comando** utilizzando la tastiera. Adottando quest'ultima modalità la finestra di comando conterrà le seguenti righe di informazioni:

Comando: **linea** (line) ↵
Specificare primo punto:
(selezionare un punto a piacere col puntatore)
Specificare punto successivo
o [Annulla]: (dirigere la linea elastica lungo una direzione orizzontale attivando la modalità ORTO nella barra di stato inferiore …) **160.75** ↵
Specificare punto successivo o [Annulla]: **ESC**
Comando:

Icona 

Alla fine della sequenza sullo schermo apparirà un **segmento** orizzontale corrispondente al lato AB del triangolo di lunghezza 160,75. Questa prima fase è sintetizzata nella ▶FIGURA **C**.

Ricerca del punto *C* e disegno del triangolo

Per costruire i restanti due lati del triangolo, basta costruire **due cerchi**, il primo di raggio $AC = b = 123{,}40$ m con centro in A e il secondo di raggio $BC = a = 132{,}60$ m con centro in B. Naturalmente l'**intersezione** di questi due cerchi coincide con il punto C, il quale, unito con A e B, completerà il triangolo.

Per tracciare i due cerchi, tuttavia, è necessario far coincidere **esattamente** i due centri dei cerchi con i punti A e B. A ciò provvede la modalità **OSNAP (object snap)** che permette la **cattura precisa** (con un effetto calamita) degli elementi caratteristici di ciascun componente grafico. Dunque, prima di disegnare questi cerchi, è necessario attivare la modalità **OSNAP** per la «cattura» degli oggetti sul disegno. Gli elementi da catturare, nel nostro caso, sono i **punti finali** del segmento AB appena disegnato; quindi la modalità di **OSNAP** da usare sarà **Fine**, attivando contestualmente anche la modalità **Intersezione** che risulterà necessaria successivamente.

Comando: **osnap** (osnap) ↵
(Spuntare la scelta **Fine** e **Intersezione** nella finestra di dialogo che appare a video): **F I** ↵
Comando:

Icona 

Le modalità di **OSNAP** così assegnate, sono dette **permanenti**, in quanto rimangono attive fin quando non vengono cambiate o disattivate, sempre utilizzando il comando **osnap** (sono possibili anche modalità di cattura **provvi-**

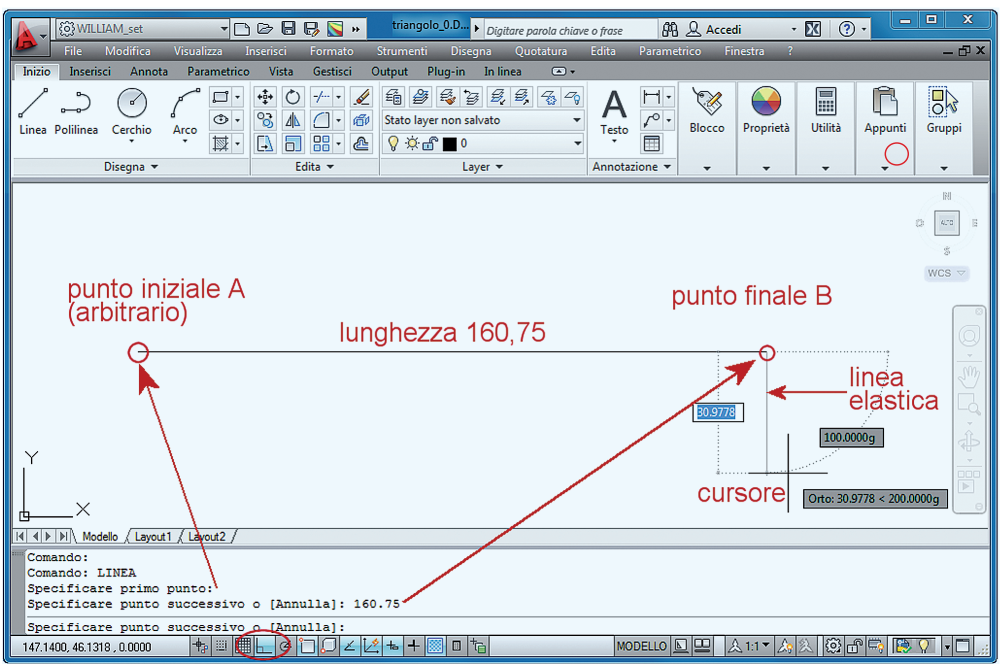


FIGURA C Tracciamento del lato *AB* con il comando **linea**. Il primo estremo (*A*) viene scelto arbitrariamente, il secondo (*B*) viene definito assegnando la lunghezza del segmento *AB* lungo la linea elastica generata dal cursore.

LABORATORIO INFORMATICO

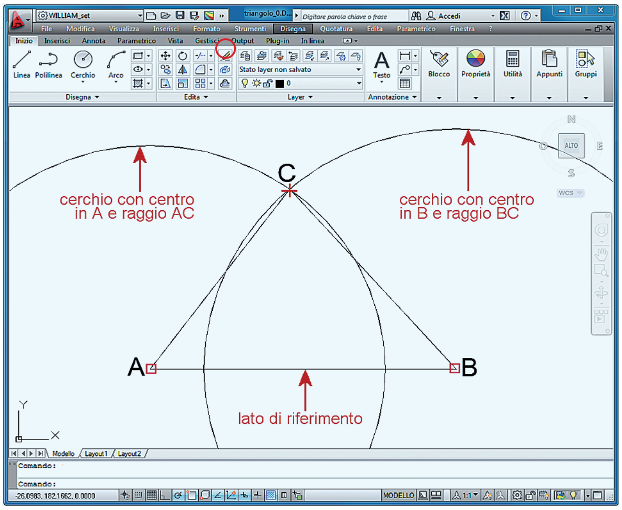


FIGURA D Costruzione del triangolo *ABC*. Il punto *C* è stato determinato per intersezione di due cerchi di raggio *AC* e *BC*, rispettivamente con centro in *A* e in *B*.

sorie, valide solo per il comando attivo). Il comando **osnap** può essere attivato o disattivato molto rapidamente utilizzando l'omonimo pulsante collocato nella **barra di stato** inferiore.

Esso non provoca nessun cambiamento al disegno; tuttavia, quando si attiva il comando **linea**, assieme al cursore apparirà un piccolo quadratino chiamato **mirino**, col quale è possibile la **cattura precisa** degli estremi del segmento disegnato, allorquando questo mirino sfiorerà genericamente la parte finale del segmento. Possiamo ora disegnare il **primo cerchio** con centro in *A* e raggio 123,40. Il comando da assegnare ad AutoCAD sarà il seguente:

Comando: **cerchio** (circle) ↵ — Icona
Specificare centro del cerchio o
[3P/2P/Ttr (tangente tangente raggio)]:
(portare il mirino del cursore in prossimità di A e selezionare …)
Specificare raggio del cerchio o
[Diametro]: **123.40** ↵
Comando:

Successivamente disegniamo il secondo cerchio con centro in *B* e raggio 132,60. Il comando da assegnare ad AutoCAD sarà il seguente:

Comando: **cerchio** (circle) ↵ — Icona
Specificare centro del cerchio o
[3P/2P/Ttr (tangente tangente raggio)]:
(portare il mirino del cursore in prossimità di B e selezionare …)
Specificare raggio del cerchio o
[Diametro]: **132.60** ↵
Comando:

Ora, ricordando che sono attivate le modalità di cattura **Fine** e **Intersezione**, con il comando **linea** possiamo tracciare consecutivamente i lati *AC* e *CB* del triangolo:

Comando: **linea** (line) ↵ — Icona
Specificare primo punto: (portare il mirino del cursore in prossimità di A e selezionare …)
Specificare punto successivo o [Annulla]:
(portare il mirino del cursore in prossimità della intersezione dei due cerchi e selezionare …)
Specificare punto successivo: (portare il mirino del cursore in prossimità di B e selezionare …)
Specificare punto successivo o [Annulla]: ↵
Comando:

● Inserimento del testo e cancellazione dei cerchi di costruzione

Per rendere più sicura l'interpretazione del disegno, è necessario aggiungere le lettere *A*, *B*, *C* in prossimità di ciascun vertice del triangolo, utilizzando il comando **testo**:

Comando: **testo** (text) ↵ — Icona
Stile di testo corrente: "Standard"
Altezza del testo: 2.500 Annotativo: No
Specificare punto iniziale del testo
o [Giustificato/Stile]: (portare il mirino del cursore in prossimità di A e selezionare …):
Specificare altezza <2.500>: **10** ↵
Specificare angolo di rotazione del testo
<100.0000g>: ↵
Digitare testo: **A** ↵ (nella finestra dei comandi o in un riquadro direttamente sull'area di lavoro)
Comando:

Ripetiamo poi la procedura in modo analogo per inserire le lettere in prossimità dei punti *B* e *C*. Lo stato del foglio virtuale è ora quello che si presenta in ▶FIGURA **D**.

Ora è necessario **cancellare** i due cerchi, che ci sono serviti unicamente con funzione di costruzione grafica, attivando il seguente comando:

Comando: **cancella** (erase) ↵ — Icona
Selezionare oggetti: (portare il cursore sul 1° cerchio e selezionare) trovato(i) 1
Selezionare oggetti: (portare il cursore sul 2° cerchio e selezionare) trovato(i) 1,2 totale
Selezionare oggetti: ↵
Comando:

3. Estrazione delle informazioni geometriche dal disegno

Una volta ultimato il disegno del triangolo, siamo pronti per estrarre da esso tutte le informazioni geometriche richieste dal problema.

LABORATORIO INFORMATICO

Gli angoli interni

Per ottenere queste informazioni è necessario evocare il comando **lista** e selezionare due lati consecutivi, per esempio AC e AB, per ottenere l'angolo α. In effetti si ha:

```
Comando: lista (list) ↵                                   Icona
Selezionare oggetti: (portare il cursore
su un punto di AC ...) trovato(i)1
Selezionare oggetti: (portare il cursore su un punto
di AB ...) trovato(i)1,2 totale
Selezionare oggetti: ↵
   LINEA Layer: "0" (segmento AC ...)
   Spazio: Spazio modello
   Gestore = A6
   da punto, X = 30.8041 Y = 37.6973
      Z = 0.0000
   a punto, X = 103.8535 Y = 137.1525
      Z = 0.0000
   Lunghezza = 123.40,
      Angolo nel piano XY  = 40.3301g
   Delta X = 73.0493, Delta Y = 99.4553,
      Delta Z = 0.0000

   LINEA Layer: "0" (segmento AB ...)
   Spazio: Spazio modello
   Gestore = A3
   da punto, X = 30.8041 Y = 37.6973
      Z = 0.0000
   a punto, X = 191.5541 Y = 37.6973
      Z = 0.0000
   Lunghezza = 160.75,
      Angolo nel piano XY  = 100.0000g
   Delta X = 160.7500, Delta Y = 0.0000,
      Delta Z = 0.0000
Comando:
```

Il comando **lista** fornisce **numerose informazioni** sugli oggetti selezionati (nel nostro caso i due segmenti AC e AB); tuttavia, ora a noi interessa valutare l'informazione `Angolo nel piano XY`. Infatti questa informazione fornisce l'**angolo** che il segmento selezionato forma con l'**origine** scelta per la misura degli angoli che, con il comando **unita**, noi abbiamo fatto coincidere con l'asse delle ordinate. Quindi la differenza tra questi angoli relativi ai due segmenti selezionati ci fornisce l'angolo α cercato. Nel nostro caso si ha:

$$\alpha = 100{,}0000^g - 40{,}3301^g = 59^c{,}6699$$

Ripetendo il comando **lista** due volte, selezionando prima i lati AB e BC e successivamente i lati AC e CB, ma tenendo conto della **direzione con la quale si sono tracciati questi lati**, si ottengono, sempre per differenza tra i valori `Angolo nel piano XY`, gli angoli β e γ che forniscono i seguenti valori:

$$\beta = 53^c{,}9931 \qquad \gamma = 86^c{,}3379$$

Il perimetro e l'area del triangolo

Per ottenere il **perimetro** e l'**area** di una **figura chiusa**, nel nostro caso il triangolo ABC, basta richiamare da tastiera il comando **area** (o selezionare la corrispondente icona). Esso richiede la **selezione** sequenziale dei **vertici della figura** e fornisce immediatamente i due valori richiesti. Dunque, ricordando che sono attive le modalità **OSNAP** di cattura **Fine** e **Intersezione** che facilitano la selezione con precisione dei vertici del triangolo, si ha:

```
Comando: Area (area) ↵                                    Icona
Specificare primo angolo o
[Oggetto/Aggiungi/Sottrai]: (portare il cursore
sul punto A ...) ↵
Specificare angolo opposto successivo
o premere INVIO per totale: (portare il cursore
su B ...)
Specificare angolo opposto successivo
o premere INVIO per totale: (portare il cursore
su C ...)
Specificare angolo opposto successivo
o premere INVIO per totale: ↵
 Area = 7993.719, Perimetro = 416.750
Comando:
```

4. I raggi dei cerchi circoscritto e inscritto

Tracciamo per primo il cerchio **circoscritto**. Si tratta di tracciare un cerchio passante per **tre punti** (sigla **3P** nelle opzioni del comando) che coincidono con i **tre vertici** del triangolo. Ricordando che sono ancora attive le modalità di **OSNAP Fine** e **Intersezione**, possiamo impostare il comando **cerchio**:

```
Comando: cerchio (circle) ↵                               Icona
Specificare centro del cerchio o[3P/2P/
Ttr (tangente tangente raggio):
3P ↵
Specificare primo punto sul cerchio:
(portare il cursore sul punto A ...)
Specificare secondo punto sul cerchio:
(portare il cursore sul punto B ...)
Specificare terzo punto sul cerchio:
(portare il cursore sul punto C ...)
Comando:
```

Una volta disegnato il **cerchio circoscritto** possiamo immediatamente interrogare AutoCAD per conoscerne il raggio (oltre a numerosi altri parametri significativi relativi allo stesso cerchio) con il comando **lista**:

```
Comando: lista (list) ↵                                   Icona
Selezionare oggetti: (portare il cursore sul
cerchio appena tracciato) trovato(i) 1
Selezionare oggetti: ↵
```

LABORATORIO INFORMATICO

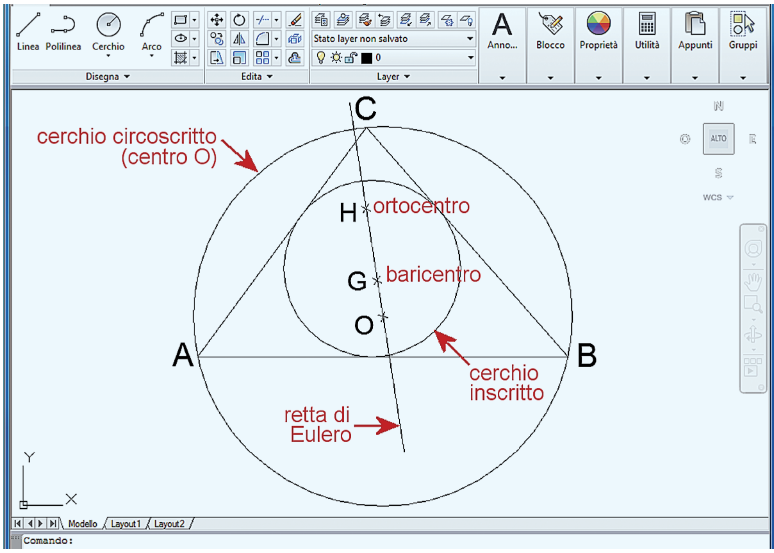


FIGURA E L'area di lavoro di AutoCAD a conclusione dell'esercitazione proposta, con il tracciamento del cerchio inscritto e del cerchio circoscritto al triangolo assegnato. È visibile anche la retta di Eulero sulla quale, com'è noto, si trovano il baricentro, l'ortocentro e il circocentro.

```
   CERCHIO Layer: "0"
   Spazio: Spazio modello
   Gestore = C7
   centro punto, X = 111.179 Y = 55.217
      Z = 0.000
   RAGGIO 82.2623
   circonferenza 516.869
   area 21259.424
Comando:
```

Per tracciare il cerchio **inscritto** occorre ricordare che esso è **tangente** ai tre lati del triangolo. Il comando è sempre **cerchio 3P**. Tuttavia, prima di evocarlo, è necessario **disattivare** la modalità di **OSNAP Fine** (ormai non più necessaria) e contestualmente attivare la modalità **Tangente** per catturare automaticamente i *punti di tangenza* del cerchio rispetto ai lati che saranno via via selezionati. Dunque si ha:

```
Comando: osnap (osnap) ↵                                  Icona
(Togliere la scelta Fine e selezionare quella Tangente
nella finestra di dialogo che appare a video) : T I ↵
Comando:
```

Questo comando disattiva la modalità di cattura **Fine** e attiva la modalità **Tangente**. Ora possiamo tracciare il cerchio inscritto con il comando **cerchio**:

```
Comando: cerchio (circle) ↵                               Icona
Specificare centro del cerchio o[3P/2P/
Ttr (tangente tangente raggio):
3P ↵
Specificare primo punto sul cerchio:
(portare il cursore su un punto del lato AB …)
```

```
Specificare secondo punto sul cerchio:
(portare il cursore su un punto del lato BC …)
Specificare terzo punto sul cerchio:
(portare il cursore su un punto del lato AC …)
Comando:
```

Anche in questo caso, per conoscere il raggio del cerchio, interroghiamo AutoCAD con il comando **lista** o, in alternativa, con il comando **proprieta** (senza accento):

```
Comando: lista (list) ↵                                   Icona
Selezionare oggetti: (portare il cursore
sul cerchio appena tracciato) ↵ trovato(i) 1
Selezionare oggetti: ↵
   CERCHIO Layer: "0"
   Spazio: Spazio modello
   Gestore = C9
   centro punto, X = 106.5791 Y = 76.0594
      Z = 0.0000
   RAGGIO 38.3622
   circonferenza 241.0367
   area 4623.3457
Comando:
```

L'area di lavoro di AutoCAD, dopo che sono stati tracciati i due cerchi, si presenta come in ▶FIGURA E. Per esercizio, poi, consigliamo allo studente di tracciare un segmento appartenente alla **retta di Eulero** dello stesso triangolo (anch'essa rappresentata in ▶FIGURA E).

Essendo il centro O del cerchio circoscritto già presente nel disegno, sarà necessario l'ulteriore tracciamento delle **mediane** (per individuare il baricentro G) e delle **altezze** (per individuare l'ortocentro H). Mediane e altezze sono facilmente tracciabili facendo ricorso, rispettivamente, alle modalità di cattura **OSNAP Medio** e **Perpendicolare**.

Autovalutazione

A. Verifica delle conoscenze

QUESITI VERO/FALSO

Considerando il triangolo ABC di lati a, b, c, di angoli interni α, β, γ, e indicando con p e S semiperimetro e area del triangolo, verificare le seguenti relazioni.

V F

1 $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\gamma}$ ☐ ☐

2 $a = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$ ☐ ☐

3 $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{c}$ ☐ ☐

4 $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\beta + \gamma)$ ☐ ☐

5 $h_a = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$ essendo h_a l'altezza relativa al lato a ☐ ☐

6 $c = 100$ m, $a = 50$ m, $b = 40$ m sono i lati di un triangolo ☐ ☐

7 $a = 100$ m, $b = 80$ m, $\alpha = 87^c{,}55$, $\beta = 57^c{,}45$, sono lati e angoli di un triangolo ☐ ☐

8 $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ = raggio del cerchio circoscritto al triangolo ☐ ☐

9 $\cos\beta = \dfrac{b^2 + a^2 + c^2}{2ac}$ ☐ ☐

10 Due lati e l'angolo compreso definiscono sempre un solo triangolo ☐ ☐

11 Due lati e un angolo adiacente al terzo lato definiscono sempre un solo triangolo ☐ ☐

12 Tre lati definiscono sempre un triangolo ☐ ☐

13 $ac \cdot \operatorname{sen}\beta$ = quadruplo dell'area del triangolo ☐ ☐

14 $a^2 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}$ = doppio dell'area del triangolo ☐ ☐

15 $\dfrac{b^2}{2} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\gamma}$ = area del triangolo ☐ ☐

16 $\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ = area del triangolo ☐ ☐

17 Il centro del cerchio inscritto coincide con l'intersezione delle mediane ☐ ☐

18 Il centro del cerchio circoscritto coincide con l'intersezione degli assi dei lati ☐ ☐

19 $(p - a)$ = distanza tra il vertice A e i punti di tangenza dei lati AB e AC con il cerchio inscritto ☐ ☐

20 $\dfrac{S}{p}$ = diametro del cerchio inscritto ☐ ☐

21 $\dfrac{S}{p + b}$ = raggio del cerchio ex-inscritto relativo al lato AC ☐ ☐

22 $p \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2)$ = raggio del cerchio ex-inscritto relativo al lato BC ☐ ☐

23 Il baricentro del triangolo divide ciascuna mediana in due segmenti rispettivamente di 1/3 e 2/3 della lunghezza della stessa mediana ☐ ☐

QUESITI A RISPOSTA SINGOLA

24 Considerando un triangolo ottusangolo, dimostrare l'enunciato del teorema dei seni.

25 Considerando un triangolo ottusangolo, dimostrare l'enunciato del teorema di Carnot.

26 Illustrare la procedura per risolvere un triangolo quando sono noti due angoli e un lato.

27 Illustrare la procedura per risolvere un triangolo quando sono noti due lati e un angolo adiacente al terzo lato.

28 Nella risoluzione dei triangoli l'uso della funzione *arcocoseno* al posto della funzione *arcoseno* è più conveniente; perché?

29 Scrivere tutte le possibili espressioni utilizzabili per il calcolo dell'area di un triangolo.

30 Elencare le proprietà che possiedono i cerchi inscritti a un triangolo.

31 Elencare le proprietà che possiedono i cerchi ex-inscritti a un triangolo.

AUTOVALUTAZIONE

32 Scrivere l'espressione che fornisce il raggio del cerchio circoscritto a un triangolo, in funzione dei tre lati dello stesso triangolo.

33 Quali punti definiscono la retta di Eulero in ciascun triangolo?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Verificare la validità delle relazioni che seguono.

34 $\frac{k}{c} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$

- a $k = 1$
- b $k = a$
- c $k = b$
- d nessuno dei precedenti valori

35 $\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = k$

- a $k = 2R$ (R = raggio cerchio circoscritto)
- b $k = R$
- c $k = 1/R$
- d $k = 1/(2R)$

36 $k = \frac{b \cdot \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}$

- a $k = c$
- b $k = a$
- c $k = b$
- d nessuno dei precedenti valori

37 $k = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\gamma$

- a $k = a$
- b $k = b$
- c $k = c$
- d nessuno dei precedenti valori

38 $k = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$

- a $k = \gamma$
- b $k = \cos\gamma$
- c $k = \operatorname{sen}\gamma$
- d $k = \cos\beta$

39 $\operatorname{sen}\gamma = \frac{c \cdot \operatorname{sen}(\alpha + k)}{b}$

- a $k = \gamma$
- b $k = \alpha$
- c $k = \beta$
- d nessuno dei precedenti valori

40 Se $\frac{c}{b}\operatorname{sen}\beta = 1$

- a il triangolo non esiste
- b il triangolo è retto in C
- c il triangolo è retto in B
- d esistono due triangoli che soddisfano la relazione

41 $\frac{1}{2}cb \cdot \operatorname{sen} k = S$

- a $k = \alpha$
- b $k = \beta$
- c $k = \gamma$
- d la relazione non è vera per qualsiasi valore di k

42 $\frac{k}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)} = S$

- a $k = a$
- b $k = b$
- c $k = c$
- d $k = a^2$

43 Essendo R il raggio del cerchio inscritto:

$(k - b) \cdot \operatorname{tg}(\beta/2) = R$

- a $k = c$
- b $k = b$
- c $k = a$
- d $k = p$

44 Essendo R il raggio del cerchio ex-inscritto relativo al lato AC: $p \cdot \operatorname{tg}(k/2) = R_{AC}$

- a $k = \alpha$
- b $k = \beta$
- c $k = \gamma$
- d la relazione non è vera per qualsiasi valore di k

45 Quale punto *non* giace sulla retta di Eulero?

- a baricentro
- b circocentro
- c incentro
- d ortocentro

46 Qual è il numero minimo di elementi lineari noti affinché sia possibile la risoluzione dei quadrilateri?

- a 1
- b 2
- c 3
- d non esiste nessun limite

47 Una figura piana possiede 7 lati. Quanti elementi devono essere noti affinché sia possibile la sua risoluzione?

- a 7
- b 9
- c 11
- d 13

48 Una figura piana possiede 6 lati. Quanto vale la somma dei suoi angoli interni?

- a 400^c
- b 600^c
- c 800^c
- d 1200^c

49 Una figura piana possiede 5 vertici. Quanto vale la somma dei suoi angoli esterni?

- a 1400^c
- b 1600^c
- c 1800^c
- d 1000^c

50 In un quadrilatero sono noti 3 lati e i 2 angoli tra essi compresi. In che modo si deve scomporre il quadrilatero?

- a con una diagonale
- b prolungando i lati noti estremi
- c entrambe le precedenti soluzioni
- d il quadrilatero non è risolvibile

51 In un quadrilatero sono noti un lato e i quattro angoli. In che modo si deve scomporre il quadrilatero?

- a con una diagonale
- b prolungando i lati noti estremi
- c in triangoli rettangoli
- d il quadrilatero non è risolvibile

52 In quale configurazione un quadrilatero diventa risolvibile solo dividendolo in triangoli rettangoli?

- a quando sono noti 3 lati e i 2 angoli adiacenti al lato incognito
- b quando sono noti 3 angoli e i 2 lati opposti
- c quando sono noti 3 lati e 2 angoli opposti
- d quando sono noti 4 lati e una diagonale

53 A cosa corrisponde k per fornire l'area di un triangolo con la seguente espressione:

$$S = 0{,}5 \cdot c \cdot k \cdot \text{sen}\,\beta$$

- a l'espressione non fornisce l'area del triangolo
- b $k = p$
- c $k = b$
- d $k = a$

54 A cosa corrisponde k per fornire l'area del quadrilatero con la seguente espressione:

$$2S = ab\,\text{sen}\,\beta + bc\,\text{sen}\,\gamma + ac\,\text{sen}\,(k)$$

- a l'espressione non fornisce l'area del quadrilatero
- b $k = \beta + \gamma$
- c $k = \beta - \gamma$
- d $k = \beta \cdot \gamma$

55 Nel problema della distanza inaccessibile quanti triangoli occorre sviluppare?

- a 1
- b 2
- c 3
- d nessuno

B. Verifica delle competenze

● Esercizi e problemi

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI

Applicazioni sul teorema dei seni

56 In un triangolo ABC si conoscono i lati AC e BC, nonché l'angolo al vertice A:

$$\overline{AC} = b = 210{,}39 \text{ m} \qquad \overline{BC} = a = 171{,}40 \text{ m}$$
$$\alpha = 42^c{,}2500$$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:3000.
[$\beta_1 = 54^c{,}5828$; $\gamma_1 = 103^c{,}1672$; $c_1 = 277{,}90$ m; $\beta_2 = 145^c{,}4172$; $\gamma_2 = 12^c{,}3328$; $c_2 = 53{,}57$ m]

57 In un triangolo ABC si conoscono i lati AB e BC, nonché l'angolo al vertice A:

$$\overline{AB} = c = 1367{,}40 \text{ m} \qquad \overline{BC} = a = 1651{,}30 \text{ m}$$
$$\alpha = 73^c{,}9846$$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\gamma = 54^c{,}9494$; $\beta = 71^c{,}0660$; $b = 1616{,}81$ m]

58 In un triangolo ABC si conoscono i lati AC e AB, nonché l'angolo al vertice C:

$$\overline{AC} = b = 124{,}78 \text{ m} \qquad \overline{AB} = c = 154{,}70 \text{ m}$$
$$\gamma = 114^c{,}7074$$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:1000.
[$\beta = 57^c{,}4815$; $\alpha = 27^c{,}8111$; $a = 67{,}24$ m]

59 In un triangolo ABC si conoscono:

$$a = 101{,}30 \text{ m} \qquad b = 122{,}70 \text{ m}$$
$$\beta = 72^c{,}5111$$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\alpha = 53^c{,}9731$; $\gamma = 73^c{,}5157$; $c = 123{,}58$ m]

60 In un triangolo ABC si conoscono i due lati a e b e l'angolo β:

$$a = 37{,}49 \text{ m} \qquad b = 124{,}75 \text{ m}$$
$$\beta = 69^c{,}7253$$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\alpha = 17^c{,}2188$; $\gamma = 113^c{,}0568$; $c = 137{,}38$ m]

61 Di un triangolo si conoscono:

$$a = 38{,}69 \text{ m} \qquad b = 47{,}06 \text{ m}$$
$$\alpha = 33°36'48''$$

Calcolare gli elementi incogniti.
[$c_1 = 67{,}83$ m; $\beta_1 = 42°19'33''$; $\gamma_1 = 104°03'39''$; $c_2 = 10{,}73$ m; $\beta_2 = 137°40'27''$; $\gamma_2 = 8°42'46''$]

62 Di un triangolo si conoscono:

$$a = 131{,}99 \text{ m} \qquad b = 104{,}07 \text{ m}$$
$$\beta = 47°18'06''$$

Calcolare gli elementi incogniti.
[$c_1 = 127{,}19$ m; $\alpha_1 = 68°46'00''$; $\gamma_1\ 63°55'54''$; $c_2 = 51{,}82$ m; $\alpha_2 = 111°14'$, $\gamma_2 = 21°27'54''$]

Applicazioni sul teorema di Carnot

63 Nel triangolo CDE si conoscono:

$$\overline{DE} = 131{,}70 \text{ m} \qquad \overline{EC} = 98{,}50 \text{ m}$$
$$\widehat{E} = 64^c{,}5360$$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\overline{CD} = 115{,}456$ m; $\widehat{C} = 83^c{,}9102$; $\widehat{D} = 51^c{,}5538$]

64 In un triangolo ABC si conoscono i lati b e c, nonché l'angolo α:

$b = 45$ m $\qquad c = 50$ m

$\alpha = 93^c{,}8889$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:1000.
[$a = 63{,}98$ m; $\beta = 49^c{,}3710$; $\gamma = 56^c{,}7401$]

65 In un triangolo ABC si conoscono i lati AB e AC e l'angolo compreso $C\widehat{A}B$:

$\overline{AB} = c = 2570{,}40$ m $\qquad \overline{AC} = b = 2590{,}10$ m

$\alpha = 84^c{,}8055$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:3000.
[$a = 3188{,}68$ m; $\beta = 57^c{,}9065$; $\gamma = 57^c{,}2880$]

66 In un triangolo ABC si conoscono:

$\overline{AB} = c = 119{,}36$ m $\qquad \overline{BC} = a = 114{,}18$ m

$\beta = 59^c{,}3840$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$b = 105{,}119$ m; $\alpha = 67^c{,}5053$; $\gamma = 73^c{,}1107$]

67 In un triangolo ABC si conoscono:

$\overline{AB} = c = 75{,}39$ m $\qquad \overline{AC} = b = 110{,}78$ m

$\widehat{A} = 83^c{,}6852$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\overline{BC} = 117{,}14$ m; $\beta = 73^c{,}5336$; $\gamma = 42^c{,}7824$]

68 Un terreno di forma triangolare è stato rilevato misurando i lati AB e AC, nonché l'angolo nel vertice A:

$\overline{AB} = 115{,}50$ m $\qquad \overline{AC} = 102{,}70$ m

$\widehat{A} = 69^c{,}3333$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\overline{BC} = 113{,}56$ m; $\beta = 59^c{,}1861$; $\gamma = 71^c{,}4805$]

69 Per determinare la distanza tra due punti B e C si è fatta stazione con un goniometro in un punto A e si è misurato l'angolo $C\widehat{A}B$:

$\widehat{A} = \alpha = 82^c{,}9031$

Si sono misurate le distanze AB e AC:

$\overline{AB} = c = 1038{,}80$ m $\qquad \overline{AC} = b = 1356{,}30$ m

Calcolare gli angoli in B e in C, nonché la distanza BC. Figura in scala 1:20 000.
[$\overline{BC} = 1473{,}42$ m; $\beta = 69^c{,}5139$; $\gamma = 47^c{,}4719$]

70 In un triangolo si conoscono:

$a = 110{,}30$ m $\qquad c = 98{,}50$ m $\qquad \beta = 71^c{,}4475$

Calcolare gli elementi incogniti.
[$\alpha = 69^c{,}9846$; $\gamma = 58^c{,}5679$; $b = 111{,}563$ m]

71 Di un triangolo si conoscono:

$c = 12{,}132$ m $\qquad a = 11{,}465$ m $\qquad \beta = 62^c{,}4512$

Calcolare gli elementi incogniti.
[$\alpha = 72^c{,}1876$; $\gamma = 65^c{,}3611$; $b = 11{,}13$ m]

72 Di un triangolo PQR si conoscono i lati:

$\overline{QP} = 128{,}28$ m $\qquad \overline{RP} = 75{,}15$ m

$\overline{PQ} = 101{,}54$ m

Calcolare gli angoli. Figura in scala 1:2000.
[$\widehat{Q} = 39^c{,}8216$; $\widehat{P} = 102^c{,}0770$; $\widehat{R} = 58^c{,}1012$]

73 Di un triangolo si conoscono i lati:

$a = 132{,}60$ m $\qquad b = 123{,}40$ m $\qquad c = 160{,}75$ m

Calcolare gli angoli.
[$\alpha = 59^c{,}6685$; $\beta = 53^c{,}9932$; $\gamma = 86^c{,}3383$]

74 Di un triangolo si conoscono i lati:

$a = 1005{,}34$ m $\qquad b = 655{,}60$ m $\qquad c = 529{,}50$ m

Calcolare gli angoli.
[$\alpha = 128^c{,}5000$; $\beta = 40^c{,}0055$; $\gamma = 31^c{,}4944$]

Applicazioni sul calcolo dell'area di un triangolo

75 Calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscono i lati:

$a = 12{,}58$ m $\qquad b = 16{,}32$ m $\qquad c = 19{,}56$ m
[$S = 102{,}11$ m^2]

76 Calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscono:

$a = 186{,}20$ m $\qquad b = 315{,}20$ m $\qquad \gamma = 94^c{,}6111$
[$S = 29\,240{,}05$ m^2]

77 Calcolare l'area di un triangolo di cui si sa che:

$a = 315{,}27$ m $\qquad \beta = 69°25'36''$ $\qquad \gamma = 77°15'29''$
[$S = 82\,626{,}43$ m^2]

78 Calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscono:

$a = 128{,}28$ m $\qquad b = 75{,}15$ m $\qquad c = 101{,}54$ m
[$S = 3813{,}36$ m^2]

79 Calcolare l'area di un triangolo di cui si conoscono:

$b = 54{,}00$ m $\qquad \alpha = 84°30'$ $\qquad \beta = 44°26'02''$
[$S = 1612{,}54$ m^2]

Problemi riepilogativi sui triangoli

80 Risolvere i seguenti triangoli qualunque conoscendo i dati indicati:

a) $a = 433{,}40$ $\qquad \beta = 106^c{,}7733$ $\qquad \gamma = 49^c{,}0119$
[$b = 673{,}74$; $c = 471{,}33$; $\alpha = 44^c{,}2148$]

b) $b = 348{,}75$ $\qquad \alpha = 100^c{,}0630$ $\qquad \gamma = 54^c{,}6997$
[$a = 534{,}84$; $c = 404{,}96$; $\beta = 45^c{,}2373$]

c) $c = 112{,}40$ $\beta = 87^c{,}0858$ $\gamma = 49^c{,}7345$
[$a = 133{,}66$; $b = 156{,}35$; $\alpha = 63^c{,}1796$]

d) $a = 97{,}49$ $b = 124{,}76$ $\beta = 62°45'10''$
[$c = 134{,}37$; $\alpha = 44°00'16''$; $\gamma = 73°14'34''$]

e) $a = 115{,}00$ $b = 143{,}00$ $\alpha = 53^c{,}4850$
[$c_1 = 138{,}83$, $c_2 = \ldots$; $\beta_1 = 75^c{,}3667$, $\beta_2 = \ldots$;
$\gamma_1 = 71^c{,}1483$, $\gamma_2 = \ldots$]

f) $b = 490{,}55$ $c = 581{,}30$ $\beta = 61^c{,}4370$
[$a_1 = 441{,}78$, $a_2 = \ldots$; $\alpha_1 = 53^c{,}0680$, $\alpha_2 = \ldots$;
$\gamma_1 = 85^c{,}4850$, $\gamma_2 = \ldots$]

g) $a = 263{,}61$ $b = 249{,}50$ $\gamma = 102°36'18''$
[$c = 398{,}70$; $\alpha = 40°18'30''$; $\beta = 37°45'12''$]

h) $b = 254{,}23$ $c = 262{,}51$ $\alpha = 38°04'00''$
[$a = 168{,}70$; $\beta = 68°18'30''$; $\gamma = 73°37'30''$]

i) $a = 84{,}30$ $c = 91{,}52$ $\beta = 124°36'14''$
[$b = 155{,}71$; $\alpha = 26°27'47''$; $\gamma = 28°55'59''$]

l) $a = 105{,}72$ $b = 112{,}30$ $c = 155{,}71$
[$\alpha = 42°45'02''$; $\beta = 46°08'36''$; $\gamma = 91°06'16''$]

m) $a = 265{,}38$ $b = 422{,}41$ $c = 271{,}15$
[$\alpha = 37°35'10''$; $\beta = 103°51'46''$; $\gamma = 38°33'06''$]

n) $a = 121{,}04$ $b = 129{,}25$ $c = 90{,}51$
[$\alpha = 64°01'36''$; $\beta = 73°43'59''$; $\gamma = 42°14'25''$]

81 $a = 12{,}58$ m $c = 19{,}56$ m $S = 102{,}11$ m^2
[$\beta_1 = 56°05'35''$; $\alpha_1 = 39°46'23''$; $\gamma_1 = 84°08'02''$;
$b_1 = 16{,}32$ m; $\beta_2 = \ldots$; $\alpha_2 = \ldots$; $\gamma_2 = \ldots$; $b_2 = \ldots$]

82 $\overline{AB} = c = 398{,}70$ m $\widehat{A} = 40°18'30''$ $S = 32\,176$ m^2
[$\overline{AC} = 249{,}50$ m; $\overline{BC} = 263{,}62$ m;
$\widehat{B} = 37°45'07''$; $\widehat{C} = 101°56'23''$]

83 $\widehat{A} = 38°40'00'$ $\widehat{B} = 68°18'30''$ $S = 20\,575$ m^2
[$\widehat{C} = 73°01'30''$; $\overline{AB} = 260{,}37$ m;
$\overline{BC} = 170{,}10$ m; $\overline{CA} = 252{,}95$ m]

84 $a = 124{,}76$ m $b + c = 229{,}61$ m $\alpha = 62°45'10''$
[$b = 93{,}91$ m; $c = 135{,}70$ m; $\beta = 42°00'25'$;
$\gamma = 75°14'24''$; $S = 5664{,}78$ m^2]

85 $b = 121{,}40$ m $a + c = 200{,}74$ m $\beta = 77^c{,}4191$
[$a = 124{,}64$ m; $c = 76{,}10$ m; $\alpha = 82^c{,}5772$;
$\gamma = 40^c{,}004$; $S = 4447{,}33$ m^2]

86 $b = 94{,}52$ m $a - c = 19{,}08$ m $\beta = 49^c{,}7346$
[$a = 131{,}47$ m; $c = 112{,}40$ m; $\alpha = 87^c{,}0861$;
$\gamma = 63^c{,}1793$; $S = 5203{,}11$ m^2]

87 $a = 83{,}55$ m $b - c = 21{,}03$ m $\alpha = 89^c{,}7738$
[$b = 73{,}78$ m; $c = 52{,}75$ m; $\beta = 67^c{,}3917$;
$\gamma = 42^c{,}8340$; $S = 1920{,}90$ m^2]

88 $p = 85{,}94$ m $\alpha = 33^c{,}1440$
$\beta = 62^c{,}1724$ $\gamma = 104^c{,}6836$
[$a = 36{,}80$ m; $b = 61{,}30$ m;
$c = 73{,}78$ m; $S = 1124{,}87$ m^2]

89 $p = 27{,}13$ m $\alpha = 32^c{,}9093$
$\beta = 44^c{,}7284$ $\gamma = 122^c{,}3469$
[$a = 12{,}90$ m; $b = 16{,}86$ m;
$c = 24{,}50$ m; $S = 102{,}10$ m^2]

90 Del triangolo ABC sono noti il lato AB e le altezze relative agli altri due lati:

$c = 196{,}50$ m $h_a = 179{,}554$ m $h_b = 131{,}30$ m

Determinare perimetro, area e raggio del cerchio circoscritto del triangolo.
[$2p = 523{,}274$ m; $S = 12391{,}4$ m^2; $R = 103{,}28$ m]

91 Con i dati dell'esercizio precedente, determinare la distanza tra l'ortocentro del triangolo e il punto medio del lato AB. [$d = 75{,}345$ m]

92 Del triangolo ABC sono noti l'angolo in B, l'area e il raggio del cerchio inscritto:

$\beta = 32^c{,}0569$ $S = 13897{,}05$ m^2 $r = 40{,}628$ m

Determinare la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli del triangolo.
[$a = 320$ m; $b = 184{,}11$ m; $c = 180$ m; $\alpha = 136^c{,}6679$]

93 Con i dati dell'esercizio precedente, determinare la distanza tra il punto K, intersezione tra la bisettrice dell'angolo β con il lato AC, e il punto O centro del cerchio circoscritto al triangolo. [$KO = 169{,}076$ m]

94 Del triangolo ABC sono noti i lati:

$a = 48{,}00$ m $b = 56{,}09$ m $c = 60{,}00$ m

Determinare le distanze tra il centro O del cerchio inscritto e i punti O_1, O_2, O_3 dei cerchi ex-inscritti al triangolo.
[$OO_1 = 52{,}69$ m; $OO_2 = 65{,}23$ m; $OO_3 = 73{,}20$ m]

95 Con i dati dell'esercizio precedente, determinare il perimetro e l'area del triangolo che ha come vertici i punti O_1, O_2, O_3, centri dei cerchi ex-inscritti al triangolo ABC. [$2p = 331{,}02$ m; $S = 5241{,}85$ m^2]

96 Del triangolo ABC sono noti i lati AB e BC, oltre alla mediana relativa al lato AB:

$c = 92{,}00$ m $a = 62{,}00$ m $m_c = 49{,}478$ m

Determinare il perimetro e il raggio del cerchio inscritto del triangolo.
[$b = 72{,}69$ m; $\alpha = 46^c{,}92$;
$2p = 226{,}69$ m; $r = 19{,}83$ m]

97 Con i dati dell'esercizio precedente, determinare la distanza tra il baricentro G e il punto T posto sul lato AB a una distanza dal vertice A pari ai 3/4 dello stesso lato AB. [$GT = 26{,}10$ m]

98 Del triangolo ABC sono noti il lato AB e le mediane relative agli altri due lati:

$c = 110{,}00$ m $\quad m_a = 101{,}175$ m $\quad m_b = 84{,}444$ m

Determinare gli angoli, i lati AC e BC e il raggio del cerchio inscritto del triangolo.
[$a = 92$ m; $b = 112{,}27$ m; $\alpha = 54^c{,}32$; $\beta = 74^c{,}2713$; $r = 29{,}61$ m]

99 Con i dati dell'esercizio precedente, determinare la distanza tra il baricentro G del triangolo ABC e il punto O, centro del cerchio inscritto al triangolo GAB. [$GO = 14{,}94$ m]

100 Del triangolo ABC sono noti l'angolo in A, il raggio del cerchio inscritto e il raggio del cerchio ex-inscritto relativo al lato BC:

$\alpha = 49^c{,}9918 \quad r = 13{,}595$ m $\quad R_a = 31{,}817$ m

Determinare la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli del triangolo.
[$a = 44$ m; $b = 47{,}65$ m; $c = 62$ m; $\beta = 55^c{,}5230$]

101 Con i dati dell'esercizio precedente, determinare la distanza tra il centro O_1 del cerchio inscritto e il centro O_2 del cerchio ex-iscritto relativo al lato BC. [$O_1O_2 = 47{,}624$ m]

102 Del triangolo ABC sono stati misurati il lato $AC = 86{,}18$ m e gli angoli $C\widehat{A}B = 76^c{,}88$ e $B\widehat{C}A = 64^c{,}76$. Determinare la posizione del punto H sul lato BC tale che l'area del triangolo ACH sia i 2/3 dell'area del triangolo ABC. [$CH = 67{,}67$ m]

103 In un parallelogramma le due diagonali sono lunghe 132,40 m e 84,30 m, mentre l'angolo che esse formano è di $78^c{,}06$. Determinare il perimetro e l'area del parallelogramma.
[$2p = 620{,}25$ m; $S = 21\,010{,}06$ m^2]

104 Da un punto A su una circonferenza di raggio 16,50 m sono state tracciate le due corde AB e AC, lunghe rispettivamente 8,06 m e 9,85 m. Determinare il perimetro del triangolo ABC. [$2p = 35{,}15$ m]

105 In un cerchio di raggio 20,15 m sono state tracciate le tre corde consecutive AB, BC e CD, lunghe rispettivamente 28,90 m, 20,03 m e 33,95 m. Determinare la lunghezza della corda AD. [$AD = 29{,}46$ m]

106 In un cerchio di centro O e raggio 12,80 m due angoli al centro consecutivi $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ hanno rispettivamente le ampiezze di $98^c{,}08$ e $34^c{,}60$. Determinare il perimetro e l'area del triangolo ABC. (*Suggerimento*: ricordare le proprietà tra gli angoli al centro e quelli alla circonferenza.)
[$2p = 46{,}83$ m; $S = 52{,}88$ m^2]

RISOLUZIONE DEI QUADRILATERI

Noti i quattro lati e un angolo

107 Un appezzamento di terreno di forma quadrilatera $ABCD$ è stato rilevato misurando i quattro lati e l'angolo nel vertice B:

$\overline{AB} = 84{,}30$ m $\quad \overline{BC} = 91{,}52$ m
$\overline{CD} = 105{,}72$ m $\quad \overline{DA} = 112{,}30$ m
$A\widehat{B}C = \beta = 138^c{,}4488$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000. Si calcoli anche l'area del quadrilatero.
[$\delta = 101^c{,}2272$; $\alpha = 79^c{,}6497$; $\gamma = 80^c{,}6738$; $S = 9110{,}22$ m^2]

108 Un pezzo di terreno di forma quadrilatera $ABCD$ è stato rilevato misurando i quattro lati e l'angolo nel vertice A:

$\overline{AB} = a = 62{,}30$ m $\quad \overline{BC} = b = 75{,}15$ m
$\overline{CD} = c = 101{,}54$ m $\quad \overline{DA} = 128{,}3$ m
$D\widehat{A}B = \alpha = 84^c{,}4028$

Calcolare gli elementi incogniti e l'area. Figura in scala 1:2000. [$\beta = 142^c{,}4484$; $\gamma = 102^c{,}1192$; $\delta = 71^c{,}0402$; $S = 7690{,}45$ m^2]

109 Di un terreno quadrilatero $ABCD$ si conoscono:

$a = 265{,}38$ m $\quad b = 260{,}10$ m
$c = 403{,}70$ m $\quad d = 271{,}15$ m
$\gamma = 84^c{,}0080$

Calcolare gli elementi incogniti e l'area. Figura in scala 1:5000.
[$\alpha = 115^c{,}3991$; $\beta = 118^c{,}1447$; $S = 85\,784{,}87$ m^2]

110 Di un terreno quadrilatero $BCDE$ si conoscono:

$\overline{EB} = 42{,}15$ m $\quad \overline{BC} = 45{,}76$ m
$\overline{CD} = 52{,}86$ m $\quad \overline{DE} = 56{,}15$ m
$\beta = 124°36'14''$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\delta = 91°06'10''$; $\varepsilon = 71°41'10''$; $\gamma = 72°36'26''$; $S = 2277{,}56$ m^2]

Noti tre lati e due angoli

111 Un terreno di forma quadrilatera è stato rilevato misurando i lati AB, BC e CD nonché gli angoli nei vertici A e B:

$\overline{AB} = a = 87{,}55$ m $\quad \overline{BC} = b = 97{,}38$ m
$\overline{CD} = c = 82{,}60$ m
$D\widehat{A}B = \alpha = 100^c{,}0000 \quad A\widehat{B}C = \beta = 91^c{,}1012$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.
[$\overline{AD} = 133{,}16$ m; $\gamma = 138^c{,}2389$; $\delta = 70^c{,}6599$; $S = 9146{,}94$ m^2]

112 Lo studente osservi che con i dati dell'esercizio precedente si possono costruire due quadrilateri. Faccia i calcoli relativi al secondo quadrilatero, cioè quello avente l'angolo in D ottuso.

[$\delta_1 = 129^c{,}3395$; $\gamma_2 = 79^c{,}5605$; $\overline{AD}_1 = 5{,}69$ m; $S = 6429{,}40$ m^2]

113 Un terreno di forma quadrilatera $MNPQ$ è stato rilevato misurando i lati MN, NP, PQ e gli angoli nei vertici M ed N:

$\overline{MN} = 86{,}24$ m $\quad \overline{NP} = 91{,}50$ m

$\overline{PQ} = 214{,}75$ m

$Q\widehat{M}N = 101^c{,}3735 \quad M\widehat{N}P = 133^c{,}5642$

Calcolare gli elementi incogniti. Figura in scala 1:2000.

[$\overline{MP} = 154{,}11$ m; $\widehat{Q} = 42^c{,}8796$; $\overline{MQ} = 244{,}06$ m; $S = 19\,755{,}65$ m^2]

114 Risolvere i seguenti quadrilateri, calcolandone anche l'area.

a) $\overline{AB} = 119{,}80$ m $\quad \overline{BC} = 116{,}75$ m
$\overline{CD} = 164{,}11$ m $\quad \alpha = 117^c{,}0216$
$\gamma = 72^c{,}6698$

[$\overline{DA} = 74{,}47$ m; $\beta = 110^c{,}2911$; $\delta = 100^c{,}0176$; $S = 13\,012{,}79$ m^2]

b) $\overline{DA} = 40{,}30$ m $\quad \overline{AB} = 84{,}60$ m
$\overline{BC} = 65{,}40$ m $\quad \alpha = 67^c{,}4086$
$\gamma = 101^c{,}6728$

[$\overline{CD} = 32{,}44$ m; $\beta = 60^c{,}5821$; $\delta = 170^c{,}3364$; $S = 2546{,}56$ m^2]

c) $\overline{CD} = 158{,}28$ m $\quad \overline{DA} = 100{,}12$ m
$\overline{AB} = 184{,}21$ m $\quad \alpha = 93^c{,}0062$
$\gamma = 89^c{,}1204$

[$\overline{BC} = 151{,}75$ m; $\beta = 90^c{,}2272$; $\delta = 127^c{,}6463$; $S = 21\,001$ m^2]

d) $\overline{DA} = 124{,}30$ m $\quad \overline{AB} = 115{,}80$ m
$\overline{BC} = 110{,}24$ m $\quad \alpha = 67°24'10''$
$\gamma = 121°42'10''$

[$\overline{CD} = 36{,}95$ m; $\beta = 72°57'55'$; $\delta = 97°55'45''$; $S = 8825$ m^2]

e) $\overline{DA} = 170{,}30$ m $\quad \overline{AB} = 164{,}80$ m
$\overline{BC} = 104{,}60$ m $\quad \alpha = 82°10'10''$
$\gamma = 68°20'20''$

[$\overline{CD} = 236{,}18$ m; $\beta = 135°26'10''$; $\delta = 74°03'20''$; $S = 25\,374$ m^2]

f) $\overline{BC} = 116{,}35$ m $\quad \overline{CD} = 148{,}87$ m
$\overline{DA} = 172{,}54$ m $\quad \alpha = 82°06'$
$\beta = 72°20'$

[$\overline{AB} = 195{,}25$ m; $\gamma = 131°27'$; $\delta = 74°07'$]

g) $\overline{CD} = 120{,}10$ m $\quad \overline{DA} = 124{,}57$ m
$\overline{AB} = 85{,}50$ m $\quad \beta = 124°15'10''$
$\gamma = 75°10'26''$

[$\overline{BC} = 98{,}60$ m; $\alpha = 77°08'03''$; $\delta = 83°26'21''$; $S = 11\,431$ m^2]

h) $\overline{DA} = 122{,}40$ m $\quad \overline{AB} = 189{,}70$ m
$\overline{BC} = 168{,}60$ m $\quad \gamma = 97°41'03''$
$\delta = 128°18'15''$

[$\overline{CD} = 77{,}48$ m; $\alpha = 73°41'10''$; $\beta = 60°19'30''$]

i) $\overline{DA} = 112{,}40$ m $\quad \overline{AB} = 194{,}90$ m
$\overline{BC} = 158{,}60$ m $\quad \alpha = 88°46'30''$
$\beta = 78°12'20''$

[$\overline{CD} = 165{,}73$ m; $\gamma = 86°48'02''$; $\beta = 106°13'08''$; $S = 24\,076$ m^2]

l) $\overline{DA} = 150{,}40$ m $\quad \overline{AB} = 180{,}72$ m
$\overline{BC} = 120{,}25$ m $\quad \alpha = 125°13'30''$
$\beta = 99°45'17''$

[$\overline{CD} = 287{,}90$ m; $\gamma = 81°06'38''$; $\delta = 53°54'34''$; $S = 28\,203$ m^2]

m) $\overline{AB} = 110$ m $\quad \overline{BC} = 150$ m
$\overline{CD} = 140$ m $\quad \beta = 106°20'20''$
$\gamma = 74°30'10''$

[$\overline{DA} = 146{,}51$; $\alpha = 85°12'42''$; $\delta = 93°56'48''$; $S = 18\,148{,}20$ m^2]

n) $\overline{AB} = 85{,}50$ m $\quad \overline{BC} = 98{,}60$ m
$\overline{CD} = 120{,}10$ $\quad \beta = 124°15'10''$
$\gamma = 75°10'26''$

[$\overline{DA} = 124{,}57$ m; $\alpha = 77°08'03''$; $\delta = 83°26'21''$; $S = 10\,916$ m^2]

Noti due lati e tre angoli

115 Un parco quadrilatero $ABCD$ è stato rilevato misurando:

$\overline{AD} = 394{,}28$ m $\quad \overline{BC} = 719{,}30$ m

$\widehat{A} = 135^c{,}0000 \quad \widehat{B} = 90^c{,}6667 \quad \widehat{C} = 75^c{,}9259$

Calcolare gli elementi incogniti e l'area. Figura in scala 1:10 000.

[$\overline{AB} = 547{,}54$ m; $\overline{CD} = 749{,}30$ m; $S = 342\,488$ m^2]

116 Risolvere i seguenti quadrilateri, calcolandone anche l'area.

a) $\overline{AB} = 150$ m $\quad \overline{BC} = 145$ m
$\alpha = 93^c{,}6173 \quad \beta = 86^c{,}7376 \quad \gamma = 105^c{,}7500$

[$\overline{CD} = 107{,}77$ m; $\overline{DA} = 129{,}84$ m; $S = 17\,470$ m^2]

b) $\overline{DA} = 100{,}40$ m $\quad \overline{AB} = 175{,}10$ m

$\alpha = 78°50'30''$ $\quad \beta = 80°59'02''$ $\quad \gamma = 81°10'04''$

[$\delta = 119°00'24''$; $\overline{BC} = 143{,}17$ m; $\overline{CD} = 139{,}97$ m; $S = 18\,525$ m^2]

c) $\overline{CD} = 100{,}20$ m $\quad \overline{DA} = 140{,}84$ m

$\alpha = 84°50'10''$ $\quad \beta = 80°09'20''$ $\quad \gamma = 120°40'20''$

[$\delta = 74°20'10''$; $\overline{AB} = 124{,}49$ m; $\overline{BC} = 106{,}20$ m; $S = 13\,307{,}12$ m^2]

d) $\overline{AB} = 148{,}70$ m $\quad \overline{BC} = 110{,}40$ m

$\alpha = 80°15'20''$ $\quad \beta = 75°10'40''$ $\quad \gamma = 130°18'10''$

[$\delta = 74°15'50''$; $\overline{CD} = 104{,}57$ m; $\overline{DA} = 153{,}94$ m; $S = 15\,682{,}20$ m^2]

e) $\overline{DA} = 112{,}40$ m $\quad \overline{AB} = 175{,}37$ m

$\alpha = 74°30'$ $\quad \beta = 73°50'$ $\quad \gamma = 84°30'$

[$\delta = 127°10'$; $\overline{BC} = 155{,}03$ m; $\overline{CD} = 109{,}94$ m; $S = 17\,979{,}34$ m^2]

f) $\overline{AB} = 148{,}70$ m $\quad \overline{DC} = 104{,}57$ m

$\alpha = 80°15'20'$ $\quad \beta = 75°10'40''$ $\quad \gamma = 130°18'10''$

[$\delta = 74°15'50''$; $\overline{BC} = 110{,}40$ m; $\overline{DA} = 153{,}94$ m; $S = 15\,682$ m^2]

g) $\overline{BC} = 155{,}18$ m $\quad \overline{DA} = 112{,}40$

$\alpha = 74°30'$ $\quad \beta = 73°50'$ $\quad \gamma = 84°30'$

[$\delta = 127°10'$; $\overline{AB} = 175{,}77$ m; $\overline{CD} = 110{,}32$ m; $S = 18\,039{,}32$ m^2]

h) $\overline{AB} = 115{,}80$ m $\quad \overline{DC} = 36{,}95$ m

$\alpha = 67°24'10''$ $\quad \beta = 72°57'55''$ $\quad \gamma = 121°42'10''$

[$\delta = 97°55'45''$; $\overline{BC} = 110{,}24$ m; $\overline{DA} = 124{,}30$ m; $S = 8825$ m^2]

Risoluzione di figure trapezie

117 In un trapezio sono stati misurati i quattro lati:

$\overline{DA} = 120{,}40$ m (lato obliquo)
$\overline{BC} = 103{,}25$ m (lato obliquo)
$\overline{CD} = 141{,}75$ m (base minore)
$\overline{AB} = 241{,}50$ m (base maggiore)

Calcolare gli elementi incogniti e l'area. Figura in scala 1:3000. [$\alpha = 61^c{,}0834$; $\beta = 80^c{,}8126$; $h = 98{,}60$ m; $S = 18\,894{,}23$ m^2]

118 Risolvere il trapezio $ABCD$ di cui si conoscono:

$\overline{BC} = b = 54{,}30$ m (lato obliquo)
$\overline{DA} = d = 62{,}28$ m (lato obliquo)
$\overline{CD} = c = 96{,}35$ m (base minore)
l'angolo $D\widehat{A}B = \alpha = 62^c{,}2430$

Eseguire la figura in scala 1:1000. Prima di fare i calcoli costruire la figura e, poiché sussiste la doppia soluzione, fare i calcoli per entrambi i trapezi.
[$\beta = 80^c{,}0055$; $\beta' = 119^c{,}9945$; $h = 51{,}64$ m; $\overline{AD'} = 34{,}81$ m; $\overline{BC'} = 16{,}77$ m; $\overline{AB} = 147{,}93$ m; $\overline{AB'}$ 114,38 m]

119 Di un trapezio $PQRS$ si sa che la somma delle basi PQ e RS è 164,32 m, mentre la loro differenza è 56,00 m. Si conoscono inoltre il lato QR e l'angolo nel vertice Q: $\overline{QR} = 66{,}19$ m; $\widehat{Q} = 49^c{,}2457$. Calcolare gli elementi incogniti e l'area.
[$\overline{SP} = 47{,}05$ m; $\widehat{P} = 88^c{,}2346$; $\widehat{S} = 111^c{,}7654$; $\widehat{R} = 150^c{,}7543$; $S = 3799{,}54$ m^2]

120 Del trapezio $ABCD$ con base maggiore AB si conoscono:

$\overline{BC} = 25{,}10$ m $\quad \overline{CD} = 30{,}20$ m
$\overline{DA} = 32{,}30$ m $\quad D\widehat{A}B = 50^c{,}1296$

Calcolare gli elementi incogniti.
[$\overline{AB} = 63{,}393$ m; $\beta = 73^c{,}0602$]

PROBLEMI PRATICI DI TOPOGRAFIA

121 Per determinare la distanza tra due punti E ed F completamente inaccessibili, sono stati misurati una base $\overline{AB} = 300$ m è i seguenti angoli orizzontali:

$E\widehat{A}B = \alpha = 76^c{,}6697$ $\quad A\widehat{B}E = \beta = 19^c{,}1583$
$F\widehat{A}B = \alpha_1 = 60^c{,}1870$ $\quad A\widehat{B}F = \beta_1 = 60^c{,}0920$

[$\overline{EF} = 171{,}22$ m]

122 Per determinare la distanza inaccessibile $\overline{AB}$, si è tracciata e misurata una base CD di 350 m e agli estremi di essa con un goniometro sono stati misurati i seguenti angoli:

in C: $A\widehat{C}D = 22^c{,}2222$ $\quad D\widehat{C}B = 29^c{,}1923$
in D: $B\widehat{D}C = 44^c{,}1148$ $\quad C\widehat{D}A = 91^c{,}9405$

I punti C e D giacciono da parti opposte rispetto ad AB.
[$\overline{AB} = 272{,}96$ m]

123 Per determinare la distanza $\overline{AB}$ si è fatta stazione con un goniometro prima in A e poi in B; collimando gli estremi C e D di una distanza nota si sono misurati gli angoli α, α_1, β, β_1. Calcolare la distanza $\overline{AB}$ corrispondente ai seguenti dati:

1) $\overline{CD} = 470{,}15$ m $\quad \alpha = 100^c{,}0000$ $\quad \alpha_1 = 58^c{,}3395$
$\beta = 57^c{,}4537$ $\quad \beta_1 = 107^c{,}9784$

2) $\overline{CD} = 1070{,}30$ m $\quad \alpha = 98°10'30''$ $\quad \alpha_1 = 43°25'20''$
$\beta = 43°36'40''$ $\quad \beta_1 = 92'15'00''$

3) $\overline{CD} = 902{,}70$ m $\quad \alpha = 113^c{,}2430$ $\quad \alpha_1 = 71^c{,}3640$
$\beta = 38^c{,}5270$ $\quad \beta_1 = 78^c{,}1930$

[$\overline{AB}_1 = 579{,}15$ m; $\overline{AB}_2 = 1285{,}68$ m; $\overline{AB}_3 = 756{,}39$ m]

124 Un appezzamento quadrilatero $ABCD$ è stato rilevato misurando i lati AB, AD, CD, la diagonale BD e l'angolo $C\widehat{D}B$. Le lettere A, B, C, D si susseguono in senso antiorario:

$\overline{AB} = a = 75{,}30$ m $\quad \overline{AD} = 64{,}10$ m

$\overline{CD} = 81{,}50$ m $\quad \overline{BD} = 95{,}30$ m

$C\widehat{D}B = \delta_2 = 71^c{,}6667$

Calcolare l'area e gli elementi incogniti del quadrilatero. [$S = 5912{,}20$ m^2]

125 Per determinare la distanza tra i due punti A e B (non misurabile direttamente) si è prolungata la direzione AB fino al punto C, misurando la distanza $\overline{BC} = 50{,}35$ m.
Si è scelto poi un punto D fuori dell'allineamento ABC e con un goniometro si sono misurati i seguenti angoli: $C\widehat{D}B = 53^c{,}1481$ e $B\widehat{D}A = 29^c{,}5741$.
Inoltre è stata misurata la distanza $CD = 65{,}20$ m.
[Doppia soluzione: $\overline{AB}_1 = 35{,}42$ m; $\overline{AB}_2 = 13{,}50$ m]

126 Volendo determinare i lati e gli angoli di un triangolo ABC, con i vertici tutti inaccessibili, si è scelto un punto E sul prolungamento del lato BA dalla parte di A e su un allineamento passante per E e perpendicolare ad AB (dalla parte del vertice C) si sono scelti due punti M ed N in modo che M risulti allineato con C e B ed N con C e A. Si sono misurati:

$\overline{EM} = 80{,}15$ m $\quad \overline{MN} = 60{,}25$ m

$B\widehat{M}E = 57^c{,}2222 \quad A\widehat{N}E = 22^c{,}0741$

Nota. Facendo la figura si osservi che $\alpha = 100^c + \widehat{N}$; $\beta = 100^c - \widehat{M}$; $\gamma = \widehat{M} - \widehat{N}$.
[$\overline{AB} = 93{,}57$ m; $\overline{BC} = 167{,}79$ m; $\overline{AC} = 110{,}82$ m]

127 Per determinare i lati e gli angoli del triangolo inaccessibile di cui all'esercizio precedente, dal punto E si è tracciato un allineamento EMN formante con il prolungamento di AB l'angolo $\widehat{E} = 98^c{,}1111$. Gli elementi misurati sono quelli stessi dell'esercizio 36. Calcolare in base a questi dati i lati e gli angoli del triangolo ABC.
[$\overline{AC} = 110{,}84$ m; $\overline{AB} = 90{,}10$ m; $\overline{BC} = 163{,}20$ m]

128 Due operatori posti su di un piano orizzontale, l'uno in A e l'altro in B, dirigono il cannocchiale del loro goniometro al centro di un pallone nell'istante in cui questo attraversa il piano verticale passante per AB. L'operatore in A misura per il cannocchiale una inclinazione $\alpha = 18°20'$ e quello in B un angolo $\beta = 23°00'$. Sapendo che la distanza $AB = 500$ m e che le altezze strumentali in A e in B risultano di 1,30 m, a quale quota si troverà il pallone rispetto al piano orizzontale? [841,30 m]

129 Due fratelli hanno la proprietà indivisa di un terreno a forma quadrilatera di vertici A, B, C, D. Un tecnico viene incaricato di dividere il terreno in due parti di area uguale, da assegnare a ciascun fratello, con un segmento MN, il cui primo estremo M coincide con il punto medio del lato BC. Il tecnico provvede a eseguire le seguenti misure:

$\overline{AB} = 72{,}00$ m $\quad \overline{BC} = 108{,}00$ m $\quad \overline{CD} = 42{,}50$ m

$\overline{AD} = 83{,}962$ m $\quad \beta = 84^c{,}5000$

Determinare la posizione del secondo estremo N del segmento MN e la lunghezza dello stesso segmento.
[$\overline{AN} = 27{,}136$ m; $\overline{MN} = 61{,}507$ m; $S_{TOT} = 5208$ m^2]

130 Un tecnico viene incaricato di dividere un appezzamento di terreno a forma quadrilatera di vertici A, B, C, D in due parti di area uguale, con un segmento MN, ortogonale al lato AB. Allo scopo vengono eseguite le seguenti misure:

$\overline{AB} = 158{,}00$ m $\quad \overline{BC} = 79{,}50$ m $\quad \overline{CD} = 115{,}60$ m

$\beta = 85^c{,}8060 \quad \gamma = 144^c{,}1839$

Determinare la posizione dei due estremi M ed N e la loro distanza.
[$\overline{BM} = 83{,}516$ m; $\overline{MN} = 111{,}116$ m;
$S_{TOT} = 13\,801{,}88$ m^2]

131 Il quadrilatero di vertici A, B, C, D possiede le seguenti misure:

$\overline{AB} = 86{,}40$ m $\quad \overline{BC} = 67{,}80$ m $\quad \overline{CD} = 92{,}10$ m

$\beta = 125^c{,}3046 \quad \gamma = 96^c{,}5529$

Considerando i due triangoli ABC e ACD generati dalla diagonale AC, determinare la distanza tra i centri O_1 e O_2 dei cerchi inscritti a questi triangoli.
[$\overline{AC} = 128{,}83$ m; $\overline{O_1O_2} = 47{,}61$ m]

Risultati dei quesiti vero/falso

1F, 2V, 3V, 4V, 5F, 6F, 7V, 8F, 9F, 10V, 11F, 12F, 13F, 14V, 15F, 16V, 17F, 18V, 19V, 20F, 21F, 22V, 23V.

Risultati dei quesiti a risposta multipla

34c, 35d, 36a, 37d, 38b, 39a, 40b, 41a, 42d, 43d, 44b, 45c, 46b, 47c, 48c, 49a, 50c, 51d, 52a, 53d, 54a, 55c.