

## E1

# Inquadramento generale



## TEORIA

### INTRODUZIONE

**1** Impostazione generale del rilievo topografico

**2** Precisione delle reti di inquadramento

### LE TRIANGOLAZIONI

**3** Principi generali

**4** La triangolazione geodetica dell'IGM

### LE INTERSEZIONI

**5** Classificazione delle intersezioni

**6** Intersezioni dirette

**7** Il problema di Snellius-Pothenot (intersezione inversa)

**8** Problema di Hansen (doppia intersezione inversa)

**9** La stazione libera (intersezione inversa con distanze)

**10** Livellazione fondamentale dell'IGM

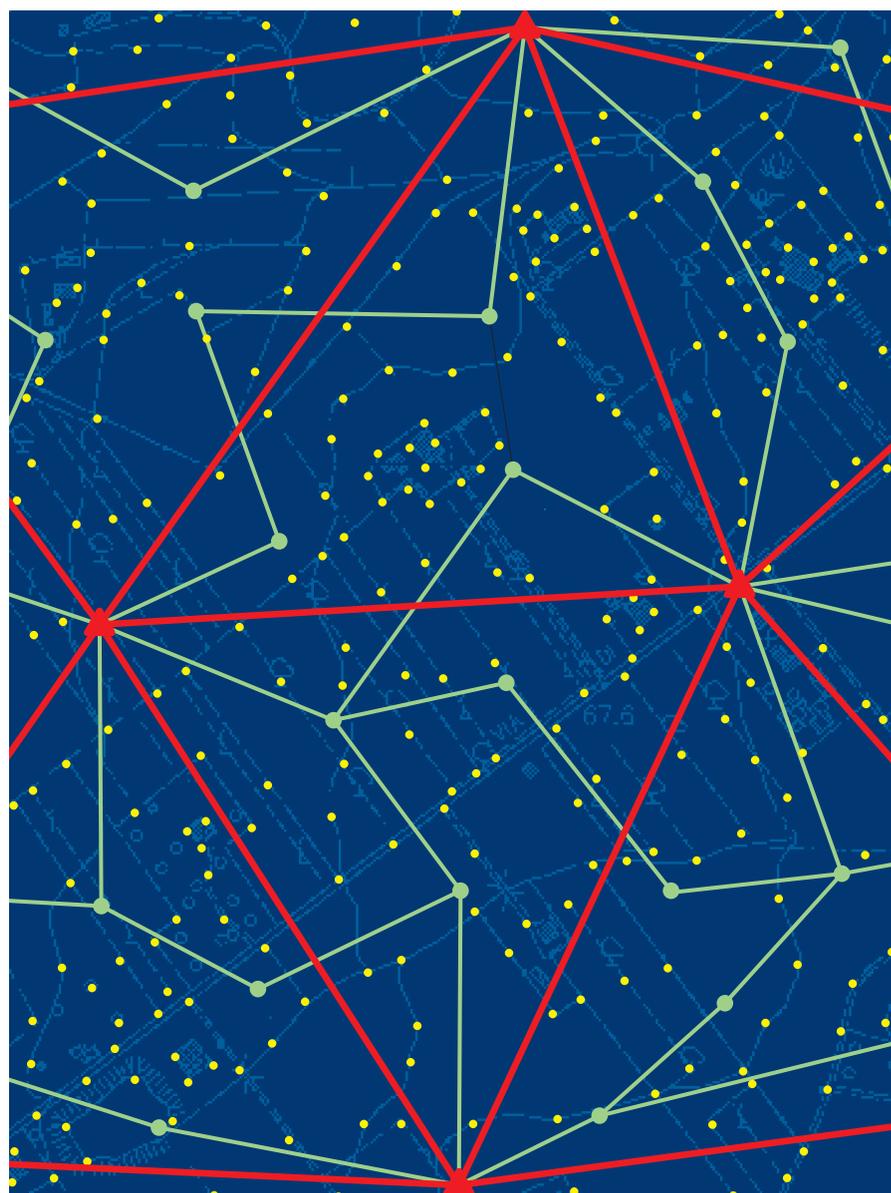
### RIASSUMENDO

## LABORATORIO INFORMATICO

### AutoCAD

Sviluppo del problema di Snellius-Pothenot

## AUTOVALUTAZIONE



Il rilievo topografico di una certa zona di territorio prevede anzitutto la scelta di una rete di inquadramento che fa da struttura portante al rilievo. A questa si accompagna una rete costituita da punti di raffittimento, integrata a sua volta da numerosi punti di dettaglio, corrispondenti ai particolari topografici.

## Introduzione

### 1. Impostazione generale del rilievo topografico

Nel primo volume del corso è stato definito il **rilievo topografico** come:

il complesso delle operazioni di misura e dei procedimenti che occorre effettuare al fine di produrre la rappresentazione grafica e numerica del territorio. La redazione dei disegni e lo sviluppo dei calcoli necessari viene indicata con il nome di **restituzione** del rilievo.

È bene chiarire subito che, nell'impostazione del *rilievo topografico*, si deve procedere sempre «dal **generale** al **particolare**». Questo slogan, nella sua essenzialità, stabilisce un concetto semplice ma basilare, che non deve mai essere eluso nelle operazioni topografiche di rilievo.

Analogamente a quanto avviene nella costruzione di un edificio, nel quale prima vengono eseguite tutte le *strutture portanti come pilastri, travi, muri* (il **generale**), e solo successivamente le opere di finitura dei singoli ambienti come *pavimenti, intonaci, tinteggiature* (il **particolare**), anche nel rilievo topografico è necessario, in primo luogo, realizzare l'**inquadramento geometrico** generale di tutta l'area interessata al rilievo, e solo in seguito considerare i **particolari topografici** del territorio da rappresentare in mappa.

Possiamo affermare che il *lavoro di inquadramento* consiste:

nella *copertura* dell'intera zona di terreno da rilevare, con una **serie di punti**, in numero limitato, opportunamente *scelti* e tra loro *collegati*, dei quali occorrerà determinare con cura le posizioni. Essi, nel loro insieme, costituiscono la **rete di base**, l'**ossatura di sostegno** e di **appoggio** per tutte quelle operazioni «minori» con le quali si definiranno le particolarità del terreno (*dettagli topografici*) che verranno poi riportati sulla mappa.

Il numero dei punti che andranno a costituire la *rete di inquadramento* dipende da svariati elementi, tra cui la **scala** del disegno. In effetti un rilievo che debba essere rappresentato in *grande scala* (per esempio 1:1000) richiederà un numero di punti di inquadramento per unità di area (**densità** dei punti) senz'altro **maggiore** di quelli che richiederebbe un analogo rilievo che dovesse essere rappresentato con una più *piccola scala* (per esempio 1:10000).

L'organizzazione dei lavori di rilievo di grandi estensioni di terreno è strutturata in **fasi** successive che seguono una precisa «**gerarchia**» da un punto di vista logico, funzionale e cronologico:

- fase 1: **rete di inquadramento** (o di *appoggio*);
- fase 2: **raffittimento** dei punti della rete di inquadramento (solo per grandi estensioni);
- fase 3: **rilievo dei particolari** topografici (o *rilievo di dettaglio*).

Procedendo dalla prima alla terza fase **aumenta** considerevolmente il **numero** dei punti da rilevare (► FIGURA 1), mentre **diminuisce** la **precisione** richiesta nella definizione della posizione degli stessi punti.

In effetti, nella realizzazione e nel raffittimento delle reti di **inquadramento** (fasi 1 e 2) vengono coinvolti relativamente **pochi punti**, che tuttavia sono distribuiti su **tutto il territorio** da rilevare. Ciò significa che gli **errori di misura** influiscono

#### FAQ

##### ► Cosa significa procedere dal generale al particolare?

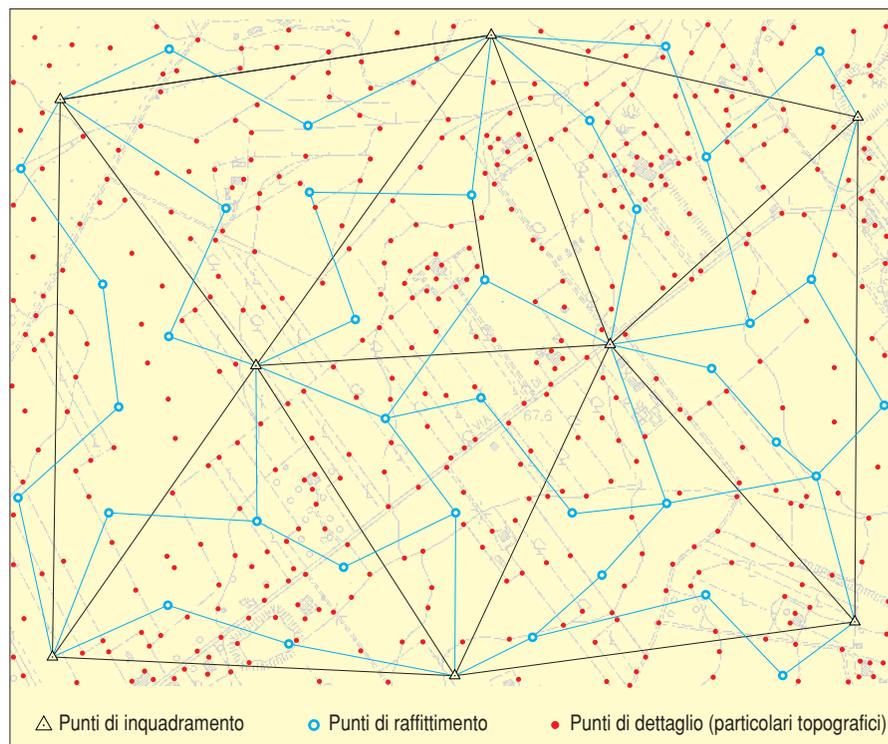
Significa definire una serie di punti che, opportunamente collegati, copriranno l'intera zona da rilevare e che costituiscono l'inquadramento del rilievo. Da essi, successivamente, si partirà per rilevare via via i particolari topografici del territorio.

#### FAQ

##### ► Il lavoro di inquadramento interessa l'intera area da rilevare?

Sì, questo lavoro coinvolge un limitato numero di punti, tuttavia essi devono essere scelti con cura e devono essere distribuiti sull'intero territorio da rilevare.

**FIGURA 1** Schema di copertura di una zona di territorio, di significativa ampiezza, con il classico metodo topografico. Si può osservare il numero crescente di punti nel passaggio dalla rete di inquadramento (triangoli neri), al raffittimento (punti blu) e infine al dettaglio (punti rossi), i cui punti andranno poi a formare la mappa dell'area rilevata.



in qualche modo su tutta la rete tendendo ad **accumularsi**, quindi è necessario effettuare le misure con **grande cura e precisione**.

La fase conclusiva (rilievo di **dettaglio**), invece, viene estesa a un numero largamente superiore di punti, però l'influenza degli errori di misura in tale contesto, è **localizzato**, dunque meno temibile. Pertanto le misure, in questa fase, possono essere eseguite con **minor precisione**, utilizzando *strumenti e metodi* meno impegnativi.

In relazione alle modalità con le quali vengono tra loro collegati i punti di inquadramento, si può formulare la seguente classificazione dei metodi impiegati nella realizzazione delle reti di inquadramento e dell'eventuale raffittimento:

- **triangolazioni;**
- **intersezioni;**
- **poligonazioni;**
- **sistema satellitare GPS.**

Tuttavia, è bene precisare subito che questa classificazione non deve essere intesa in modo rigido, ma flessibile. In effetti si possono realizzare metodi **misti** nei quali possono convivere i principi di alcuni dei metodi elencati. Inoltre, nella realtà, questi metodi raramente sono **alternativi**, ma al contrario sono spesso **complementari**, tanto che per il rilievo delle grandi estensioni di territorio possono essere utilizzati tutti, sfruttando di ciascuno le relative particolarità.

In effetti l'estensione della zona da rilevare costituisce il criterio principale nella definizione dei metodi da utilizzare nella creazione della rete di inquadramento.

**FAQ**

► **Quali punti del rilievo vengono riportati sulla mappa?**

Solo i punti di dettaglio. Quelli costituenti la rete di inquadramento, in generale, non hanno interesse per la rappresentazione del territorio.

Quando l'estensione da rilevare è **molto grande**, i fondamenti della topografia classica prescrivono uno schema che impiega le **triangolazioni** per costituire una *prima maglia* di punti, limitati come numero, ma rilevati con grande precisione. Il **raffittimento** dei punti di appoggio (fase 2), fino alla **densità** desiderata e necessaria al successivo rilievo dei particolari (fase 3), viene poi raggiunto con l'impiego delle **poligonali** che si sviluppano tra i punti definiti nella prima fase (► FIGURA 1).

Quando invece l'estensione della zona da rilevare è **modesta** (situazione peraltro più familiare al tecnico geometra), allora l'impiego delle *impegnative* triangolazioni può essere omessa e la rete di appoggio può essere creata col solo impiego delle più flessibili **poligonali**.

Diciamo anche che le reti di inquadramento sono essenzialmente delle **operazioni planimetriche**, in quanto con esse viene definita la posizione delle *proiezioni* dei punti sulla *superficie di riferimento*, in genere a mezzo delle coordinate piane ( $X, Y$ ). Le **operazioni altimetriche**, che talvolta accompagnano la realizzazione della rete, non raggiungono mai le precisioni che caratterizzano le precedenti coordinate.

## 2. Precisione delle reti di inquadramento

Nel precedente paragrafo si è visto che il rilievo topografico consiste nella determinazione della posizione di un adeguato numero di punti. Si è poi accertato che nella pianificazione del rilievo i punti da considerare sono distinti in due categorie.

- I punti di **inquadramento** e di **raffittimento**, che costituiscono la struttura portante del rilievo. Essi, in generale, sono una piccola frazione del complesso dei punti rilevati, la cui posizione deve essere determinata con **grande precisione** (decisamente migliore di quella richiesta dalla rappresentazione grafica della mappa), in genere condizionata dall'**estensione** della zona da rilevare.
- I punti di **dettaglio**, che rappresentano le **particolarità** del terreno e dei manufatti. Essi sono utilizzati nella **formazione della mappa**, e la relativa posizione viene stabilita «partendo» da uno o più punti della rete di inquadramento. I punti di **dettaglio** sono in numero nettamente superiore ai punti di inquadramento e di raffittimento, e, essendo tra l'altro condizionati **direttamente** dalla **scala** della mappa, richiedono una **minor precisione**, dunque vengono rilevati con tecniche meno raffinate e più rapide.

Peraltro, le posizioni dei punti (di inquadramento o di dettaglio), cioè le loro coordinate, vengono ricavate direttamente o indirettamente dalle misure **lineari** (*distanze*) e **angolari** eseguite durante le operazioni di rilievo in campagna. Poiché tali misure sono affette da **errori**, questi poi si ripercuotono e si trasmettono inevitabilmente sui valori delle coordinate dei punti che verranno calcolate.

I **punti rilevati**, perciò, non sono «veri» punti, ma piuttosto possono essere considerati come piccoli *intorni*, cioè **piccole aree**, le cui dimensioni saranno tanto **più piccole** quanto più elevata risulterà la **precisione** con la quale sono state effettuate le misure.

La dimensione di queste piccole aree rappresenta, in definitiva, l'**errore probabile** di cui sono affette le coordinate dei punti. In altri termini, la **posizione esatta** del punto, pur rimanendo indeterminata, si troverà comunque con tutta probabilità all'interno di queste piccole aree.

Facendo un esempio, possiamo fare riferimento al punto  $P$  che viene determinato partendo dal punto  $S$  e misurando direttamente le *coordinate polari*: l'**azimut**  $\vartheta$  e la **distanza**  $SP$  (► FIGURA 2).

La **determinazione** risentirà ovviamente degli inevitabili **errori di misura** della distanza  $D = SP$ , che indichiamo con  $\pm\mu_D$ , e dell'**azimut**  $\vartheta$ , che indicheremo con  $\pm\mu_\vartheta$ . Questi errori possono essere ridotti al minimo mediante opportune **serie di misure** ripetute; tuttavia potranno sempre persistere i **residui** degli errori accidentali oltre agli errori **sistematici**. A ogni misura effettuata, perciò, corrisponde una posizione diversa dell'estremo  $P$  della semiretta  $SP$ . Tali estremi, di conseguenza, non concorreranno esattamente in un sol punto, ma si distribuiranno in un certo «intorno», producendo un'area simile a quella indicata in ► FIGURA 2 (ovviamente non in scala), chiamata **figura d'errore**.

### FAQ

#### ► Il numero dei punti di dettaglio è elevato?

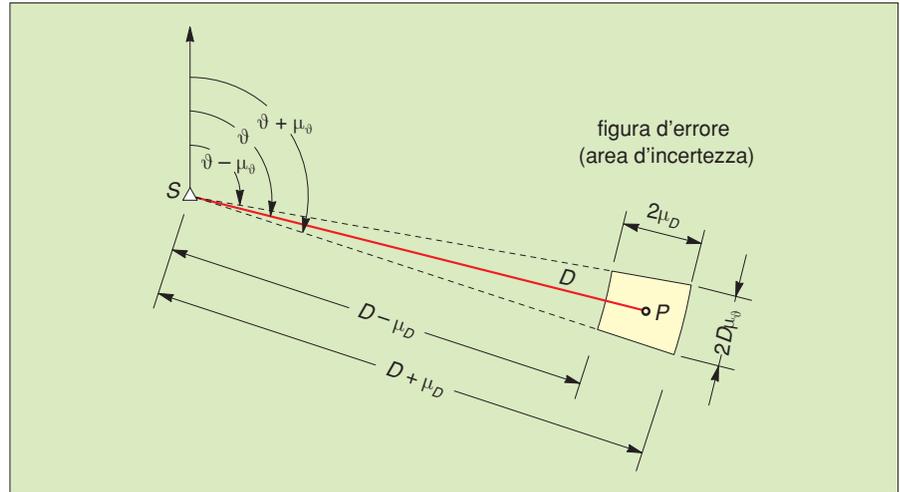
Sì, costituiscono la parte preponderante dell'insieme dei punti del rilievo. Per fortuna essi sono facili da rilevare e non richiedono grande precisione.

### FAQ

#### ► Che cosa è la propagazione degli errori nelle reti di inquadramento?

È la temibile conseguenza per la quale, sviluppando il calcolo della rete, gli effetti degli errori commessi nelle misure via via utilizzate nei calcoli si sommano, accumulandosi col procedere delle determinazioni.

**FIGURA 2** Figura d'errore associata alla determinazione del punto  $P$  misurando le relative coordinate polari a partire dal punto  $S$ .



In generale la **semidiagonale** di questa figura viene assunta come parametro per definire l'errore di posizione del punto  $P$ . Il suo valore, pertanto, dovrà essere contenuto entro i limiti prefissati (**tolleranza**).

**Gerarchie degli errori di posizione**

È necessario a questo punto riflettere attentamente sull'incidenza che gli *errori di posizione* dei punti hanno sulla **fedeltà** e sull'**affidabilità** globale del rilievo. In effetti è molto importante comprendere che questa incidenza è **molto diversa** a seconda che questi errori si siano prodotti nell'ambito della rete di **inquadramento**, nell'ambito del **raffittimento**, oppure nella fase di rilievo dei **particolari topografici** del terreno.

Ci serviamo di un esempio per esporre il problema. Riferendoci alla **FIGURA 3a** immaginiamo di rilevare per **irradiamento** (vol. 1, modulo E) i *particolari topografici* costituiti dai punti 1, 2, 3, ..., 8, 9, vertici del contorno di una particella, partendo dai punti  $S$  ed  $R$  appartenenti alla rete di **inquadramento**.

Supponiamo che venga commesso un errore nella determinazione della posizione di un punto di **dettaglio**, per esempio il vertice 5; l'effetto di questo errore sarà quello di considerare l'errata posizione in  $5'$  al posto di quella corretta in 5. Vediamo subito dallo schema (**FIGURA 3a**) che tale errore può anche non compromettere l'affidabilità del rilievo nel suo complesso, in quanto l'ipotetico errore di posizione del punto 5 non si **ripercote** sugli altri punti, ma rimane **localizzato**, e quindi **non distorce** in modo *grave* la figura nel suo insieme.

Esaminiamo invece gli effetti ben più consistenti e **temibili**, dello stesso errore commesso, non più su un particolare di dettaglio, ma sulla posizione del **punto d'appoggio**  $S$ , che ovviamente farà parte di una organica rete di **inquadramento** e dal quale si parte per definire la posizione dei punti di dettaglio 1, 2, 3, 4, 5. Supponiamo, allora, che per errore, anziché in  $S$ , la posizione del punto di appoggio sia definita in  $S'$ . La **FIGURA 3b** mostra eloquentemente quello che succede.

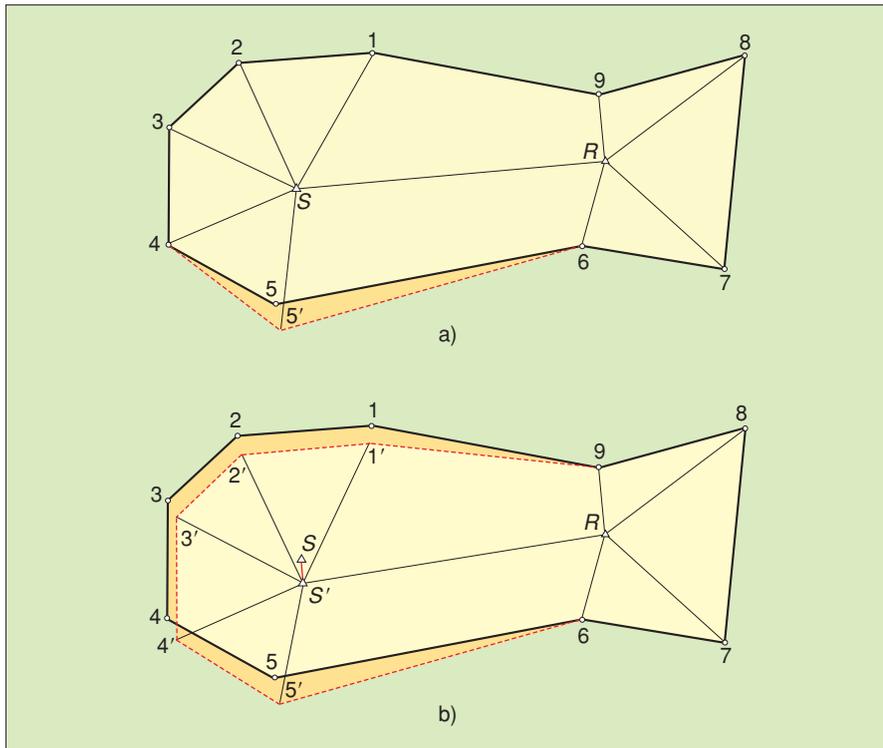
In effetti l'errore commesso nel posizionare  $S$  non è più **localizzato**, ma viene automaticamente **trasferito** (propagato) a tutti i punti (1, 2, 3, 4, 5) determinati partendo da  $S'$ . Questi, oltre a contenere gli errori che derivano dalle misure realizzate da  $S'$ , saranno anche affetti dall'errore prodotto dall'errata posizione  $S'$  di  $S$ , errore tanto più temibile se si osserva che ha caratteristiche di **sistematicità** e perciò non **eliminabile** con la ripetizione delle misure. Esso causa una deformazione e una distorsione intollerabile della figura.

Questo esempio ci aiuta a mettere a fuoco un criterio di grande importanza in topografia: la **priorità** e la **gerarchia** nella precisione con la quale vengono definiti i punti.

**FAQ**

► **Che cosa producono gli errori di misura nella determinazione della posizione dei punti?**

Un'area di incertezza all'interno della quale si troverà il punto rilevato. Maggiore è la precisione delle misure, minore saranno le dimensioni dell'area di incertezza.



**FIGURA 3** Effetto di un errore associato alla posizione di un punto di dettaglio (punto 5) (a) e alla posizione di un punto di inquadramento (punto S) (b).

In definitiva possiamo affermare che, mentre si possono tollerare *relative incertezze* nella determinazione dei *dettagli topografici*, questa incertezza non deve sussistere nella determinazione dei punti che costituiscono la rete di *inquadramento*. Allo stesso modo tra questi punti potranno verificarsi diversi *gradi di precisione* in relazione dei livelli di appartenenza nell'ambito della rete.

## ■ Realizzazione e controllo della precisione

Le precisioni richieste nell'esecuzione delle reti di inquadramento vengono ottenute ricorrendo alle seguenti condizioni, entrambe irrinunciabili:

- **impiego di strumenti di misura di adeguata precisione;**
- **esecuzione di misure sovrabbondanti (ridondanza).**

Se la prima condizione appare del tutto ovvia, la seconda non è meno importante da realizzare. In effetti qualsiasi rete di inquadramento dovrà prevedere un numero di misure superiori allo stretto necessario (**iperdeterminazione**), con le quali, oltre a ottenere *migliori precisioni*, si possono anche eseguire gli irrinunciabili **controlli** alle misure effettuate.

Alla sovrabbondanza delle misure, poi, corrisponde una sovrabbondanza dei risultati con i quali è possibile calcolare l'errore più probabile di cui sono affette le posizioni dei punti e, se viene rispettata la tolleranza assegnata, è possibile procedere alla **compensazione** degli errori di osservazione, che possiamo definire come:

la tecnica che consente la redistribuzione degli errori, con segno invertito e con appropriate regole, sulle grandezze che li hanno generati.

Con la *compensazione* si ottiene, non tanto un incremento della precisione delle *single misure* interessate, quanto un **miglioramento globale** del rilievo interessato.

### FAQ

► **Per quale ragione esiste una gerarchia nella precisione con la quale vengono definiti i punti in un rilievo?**

Per i diversi effetti che gli errori producono sul rilievo in relazione al tipo di punti considerati. Per esempio, gli errori commessi nei punti della rete di inquadramento sono molto più temibili di quelli commessi nei punti di dettaglio, perché si propagano e non rimangono localizzati.

**FAQ**

► **Quale condizione permette il controllo e la correzione delle misure in un rilievo?**

L'esecuzione di un numero di misure superiori allo stretto necessario.

Chiariamo questi concetti basilari con un semplicissimo esempio. Si pensi a un triangolo  $ABC$  di cui sono stati **misurati** in campagna gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  e il lato  $AB$ . Questi elementi sono strettamente necessari per calcolare tutti gli altri elementi incogniti del triangolo. In questo caso, però, nulla possiamo dire sulla bontà e sulla precisione raggiunta nella misura di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $AB$ .

Ma se in campagna, oltre agli angoli  $\alpha$  e  $\beta$ , misuriamo anche il terzo angolo  $\gamma$ , avremo **iperdeterminato** la risoluzione del triangolo  $ABC$ ; innanzi tutto possiamo **controllare** la precisione delle misure angolari eseguite con la notissima relazione teorica:  $\alpha + \beta + \gamma - 200^\circ = 0$ . Noi sappiamo, però, che gli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , misurati in campagna, contengono inevitabilmente errori di osservazione, per cui la relazione precedente non potrà essere perfettamente verificata, e si dovrà scrivere:

$$\alpha + \beta + \gamma - 200^\circ = \pm \Delta$$

In essa il termine  $\pm \Delta$  rappresenta l'errore **complessivo** di cui sono affette le tre misure degli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . La conoscenza di  $\Delta$  fornisce, in primo luogo, indicazioni sulla precisione raggiunta nella misura degli angoli; successivamente permette di **correggere** le stesse misure *ridistribuendo* l'errore  $\Delta$ , con opportuni criteri, tra gli angoli misurati (*compensazione angolare*).

Queste note preliminari fanno capire che, nelle operazioni topografiche connesse alla creazione delle *reti di inquadramento*, non è solo necessario l'uso di *strumenti sofisticati*, ma è ancora più importante la **ridondanza** delle misure per raggiungere e controllare le precisioni richieste.

**■ Collegamento tra i punti di inquadramento**

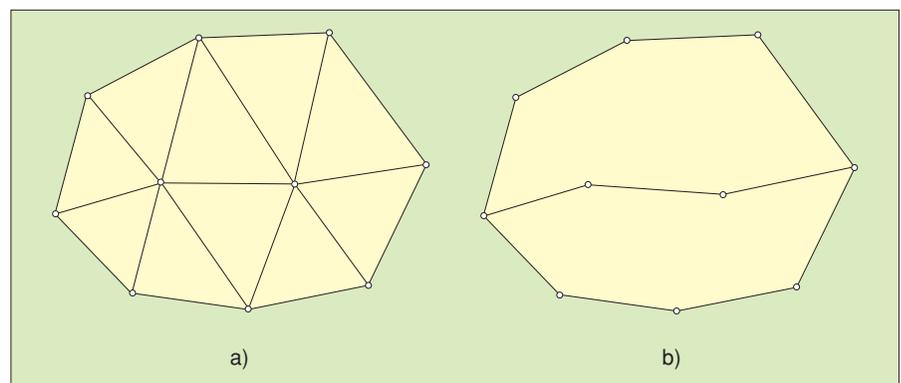
L'entità della sovrabbondanza delle misure è strettamente legata alla modalità con la quale i punti sono tra loro **collegati**. In effetti vedremo che se l'insieme di punti che costituiscono la rete di inquadramento sono collegati tra loro a due a due fino a formare una *maglia di triangoli* che hanno un lato in comune, essi realizzeranno lo *schema geometrico* delle **triangolazioni** (► FIGURA 4a). Se, al contrario, i punti sono collegati tra loro formando una spezzata, o una serie di spezzate tra loro collegate, avremo lo schema geometrico delle **poligonali** (► FIGURA 4b).

Ovviamente diversi sono i gradi di ridondanza in relazione agli elementi misurati e allo schema geometrico adottato. Fin d'ora possiamo affermare che le *triangolazioni* costituiscono uno schema geometrico di per sé molto **rigido** e ben definito, che consente di avere un gran numero di misure sovrabbondanti, e perciò numerosi controlli, e di conseguenza particolarmente adatto nei rilievi di *grandi estensioni* di territorio. Le *poligonali*, invece, presentano uno schema geometrico assai meno rigido, con limitati elementi di controllo, anche se di più **facile realizzazione**, e perciò utilizzate nella fase di raffittimento nei rilievi di zone con modesta estensione.

**FAQ**

► **Quale aspetto viene condizionato dalla modalità di collegamento dei punti di inquadramento?**

Condiziona il grado di iperdeterminazione del rilievo, quindi anche la precisione ottenibile nella determinazione dei punti.



**FIGURA 4** Schema geometrico delle triangolazioni (a) e schema geometrico delle poligonali (b).

## Le triangolazioni

### 3. Principi generali

Quando dal collegamento dei punti di **inquadramento** si ottiene una sequenza di triangoli, si realizza lo schema geometrico delle **triangolazioni**.

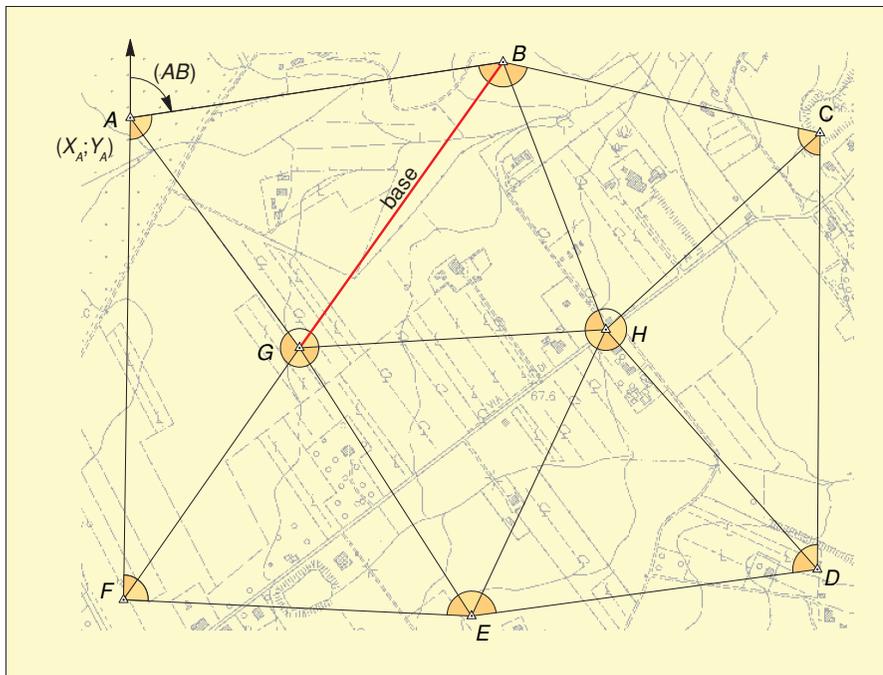
Esse, nonostante siano assai impegnative da realizzare, hanno costituito per secoli il punto di riferimento più sicuro per le operazioni di inquadramento di estensioni medio-grandi, in quanto sviluppavano al **massimo** le misure **angolari** e al **minimo** le misure delle **distanze**, che in passato venivano determinate con misure dirette molto lunghe e laboriose.

Solo di recente, con l'introduzione della *misura elettronica* delle distanze e dell'impiego dei *satelliti artificiali* (GPS) anche nell'ambito topografico, ci si è scostati da tale schema classico per realizzare le reti di inquadramento.

Fu l'astronomo *Willebrord Snell (Snellius)* che, fra il 1615 e il 1622, eseguì la prima triangolazione allo scopo di determinare la lunghezza di un arco di meridiano tra Alkmaar in Olanda e Bergen, alla foce del fiume Schelda. Il principio alla base delle triangolazioni può essere sintetizzato nei seguenti termini.

Dopo aver scelto con cura i punti della rete di inquadramento, questi vengono idealmente collegati a due a due in modo da ottenere una *serie di triangoli* (prossimi a essere equilateri) aventi via via un lato in comune. Viene poi misurato almeno un lato di questi triangoli (detto **base** della triangolazione) e tutti gli **angoli interni** di ciascun triangolo (► FIGURA 5).

Conoscendo poi le *coordinate* di un qualunque punto della triangolazione (nel nostro esempio  $X_A, Y_A$  del punto A), e la *direzione* (cioè l'*azimut*) di un lato uscente dallo stesso punto (per esempio AB), è possibile determinare le **coordinate** di tutti i restanti punti, che vengono chiamati *vertici della triangolazione*, che costituisce l'obiettivo finale dello sviluppo di una triangolazione.



**FIGURA 5** Schema geometrico di una triangolazione a rete continua.

#### FAQ

► **Quale tipo di misura viene privilegiato nelle triangolazioni?**

Le misure angolari, che, fino a pochi decenni or sono, erano il tipo di misura di precisione meno complicata da eseguire.

**TABELLA 1**

Criteri di classificazione	Tipi di triangolazione	Connotati generali
Geometria	<b>A catena</b>	Il passaggio da un triangolo all'altro può avvenire in un solo modo (►FIGURA 6).
	<b>A rete</b>	Il passaggio da un triangolo all'altro può avvenire seguendo diverse strade.
Estensione	<b>Tecniche (topografiche)</b>	Estensione medio-piccola contenuta nell'ambito del campo topografico e con lati caratterizzati da lunghezze di 1-2 km.
	<b>Geodetiche</b>	Estensione grande con lati lunghi fino a decine di chilometri, richiedendo la <i>sfera locale</i> come superficie di riferimento.
Gerarchia	<b>I, II, III ordine</b>	Livelli di punti successivi e gerarchici, ciascuno contenuto rigidamente in quello precedente, con un progressivo aumento del numero dei punti, ma con contestuale riduzione della precisione richiesta nella misura.

In effetti, partendo da un triangolo che contiene la *base*, e applicando successivamente e progressivamente il teorema dei seni, verranno calcolati tutti i **lati** della triangolazione. Quindi, una volta definiti gli **azimut** dei lati con elementari operazioni algebriche sugli angoli di ciascun vertice, si potrà passare facilmente alle coordinate di tutti i vertici.

## ■ Classificazione delle triangolazioni

I criteri con i quali le triangolazioni possono venire classificate sono molteplici; essi sono sintetizzati nella ►TABELLA 1.

L'ultimo criterio di classificazione è riferito in genere alle triangolazioni geodetiche e merita un maggior approfondimento per il concetto importantissimo che racchiude.

In effetti, quando la triangolazione si sviluppa su **grandi** estensioni, il *numero di vertici* diventa elevato, e in questo caso *non è corretto* collegarli con un **unico livello** di triangoli (►FIGURA 7a), in quanto la *propagazione* e *l'accumularsi* degli **errori** nel passare dal *triangolo di partenza* (quello contenente la *base*) a quelli più lontani diverrebbe a un certo punto intollerabile.

Il problema viene risolto disponendo i vertici su diversi livelli, chiamati **ordini**. La ►FIGURA 7a illustra lo schema di copertura di una certa area con un *unico livello* di punti; la ►FIGURA 7b, invece, più propriamente, copre la medesima area con lo stesso numero di punti, ma disposti su **due livelli** (*I ordine* e *II ordine*).

Nella pratica si comincia col fissare alcuni vertici, relativamente pochi e quindi molto distanti tra loro, ma distribuiti sull'*intero territorio* da rilevare. Questi vertici, collegati tra loro, costituiscono la **triangolazione** (o *rete*) di **I ordine**.

Successivamente viene operato un primo **raffittimento** individuando un secondo livello di punti, scelti in prossimità del baricentro dei triangoli di primo ordine; questi saranno collegati tra di loro, ma anche con i punti del I ordine. Si viene così a realizzare una triangolazione, detta di **II ordine**, contenuta e **rigidamente collegata** a quella precedente (►FIGURA 7b).

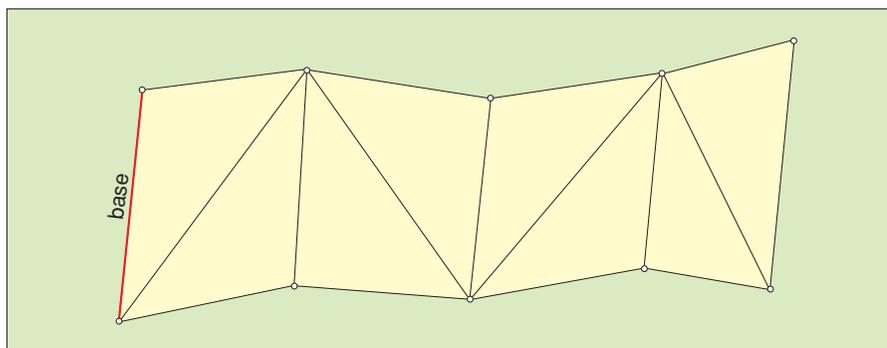
Procedendo in modo analogo si realizzano le triangolazioni, strettamente collegate alle precedenti, di **III ordine**, di **IV ordine**, e così via, fintanto che non si è raggiunta sul terreno la densità di punti programmata.

È importante capire che la precisione con la quale devono essere determinati i vertici di *I ordine* dovrà essere **maggiore** di quella necessaria nella realizzazione della triangolazione di *II ordine*; allo stesso modo la precisione in questa triangolazione risulterà *superiore* a quella prescritta per la triangolazione di *III ordine* e così di seguito.

### FAQ

► **Per quale ragione, nelle grandi estensioni di territorio, le triangolazioni vengono organizzate in livelli detti ordini?**

Per limitare la propagazione degli errori. In effetti, dopo il primo livello, gli errori di misura rimangono più localizzati, quindi permettono misure meno impegnative.



**FIGURA 6** Schema di una triangolazione a catena.

Il relativo *diminuire* della precisione nella determinazione della posizione dei vertici appartenenti agli *ordini inferiori* (II, III ecc.) è dettato dal fatto che, mentre un qualsiasi errore nella determinazione dei punti della rete di I ordine si ripercuote e si propaga su **tutta la triangolazione**, gli stessi errori commessi sui vertici delle triangolazioni di *ordine inferiore* producono invece effetti più **localizzati**, quindi assai meno *temibili*.

## ■ Impiego delle triangolazioni

Le triangolazioni costituiscono una *struttura geometrica* estremamente **rigida** e ben definita, nella quale la **propagazione degli errori**, pur esistendo, è lenta e comunque di gran lunga *inferiore* a quella che si riscontra, per esempio, nelle *poligonazioni*. Quindi vengono usate per coprire grandi estensioni.

Esse tuttavia sono sempre **complicate** da realizzare, e spesso costituiscono una delle operazioni più *difficilissime* di tutta la topografia. Queste difficoltà sono legate sia alla laboriosità della misura diretta delle **basi**, sia all'individuazione dei vertici che, richiedendo una grande **visibilità** (spesso a  $360^\circ$ ), devono trovarsi in scomode, e talvolta inaccessibili, posizioni *dominanti*.

Nondimeno, fino a qualche decennio fa, appena il rilievo interessava un'estensione di qualche chilometro quadrato, la triangolazione era l'**unico modo** concepibile per realizzare una *rete di inquadramento*. Secondo tali concezioni, alle *poligonali* era demandato il compito di collegare i vertici della triangolazione di livello più basso, allo scopo di **raffittire** i punti di inquadramento fino alla *densità* necessaria al successivo *rilievo di dettaglio* dei particolari topografici.

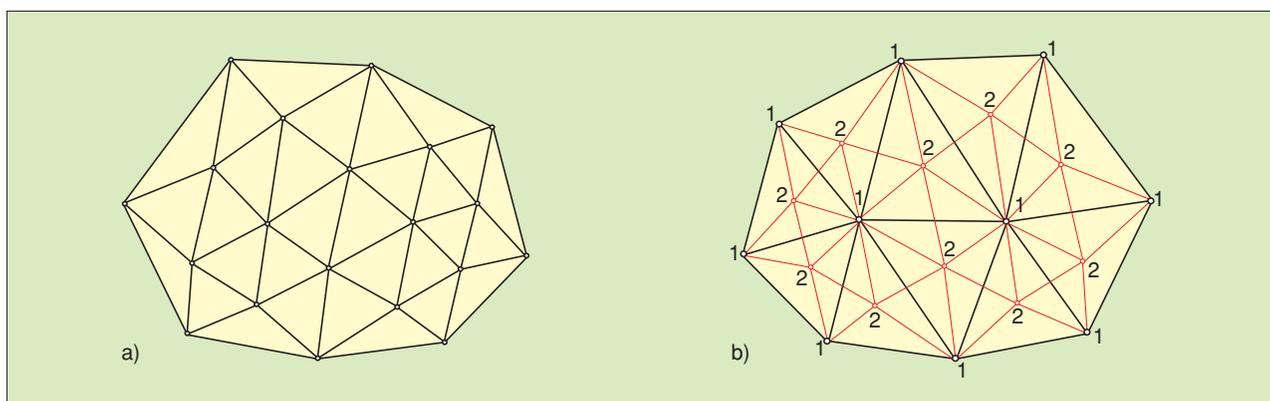
Nelle più *moderne* concezioni topografiche tale modo di procedere, anche se non del tutto abbandonato, è tuttavia sicuramente riconsiderato. Ciò per la com-

### FAQ

#### ► In quale contesto è corretto l'impiego delle triangolazioni?

Quando il rilievo riguarda estensioni di territorio medio-grandi. Esse, tuttavia, devono sempre essere collegate ad altri metodi, come intersezioni e poligonali, con i quali raffittire i punti di inquadramento fino a raggiungere la densità desiderata.

**FIGURA 7** Su un'area di grande estensione, anziché uno schema di triangolazione a un solo livello (a), è necessario realizzare due (o più) reti rigidamente collegate (b), una del I ordine (punti 1) e una del II ordine (punti 2).



**FAQ**

**► Nelle moderne operazioni topografiche vengono ancora utilizzate le triangolazioni?**

Attualmente le triangolazioni (molto difficoltose da eseguire) tendono a essere sostituite con le tecniche di rilievo satellitare GPS.

parsa sul mercato ordinario degli strumenti per la **misura elettronica** delle grandi distanze (lo storico problema che assillava da sempre i topografi), esaminati nel modulo G e in grado di eseguire tali misure molto rapidamente e con precisioni nemmeno immaginabili fino a qualche decennio fa, e anche dei sistemi di *posizionamento satellitare (GPS)*.

Questi strumenti da un lato hanno permesso di realizzare nella pratica uno schema rimasto per secoli solo *pura teoria* per la difficoltà nel misurare le grandi distanze: le **trilaterazioni**, che prevedono appunto la misura diretta dei lati di ciascun triangolo. Dall'altro, hanno dilatato in modo significativo i limiti di impiego delle **poligonali**, riducendo in modo decisivo la propagazione degli errori su di esse.

**■ Geometria delle triangolazioni tecniche**

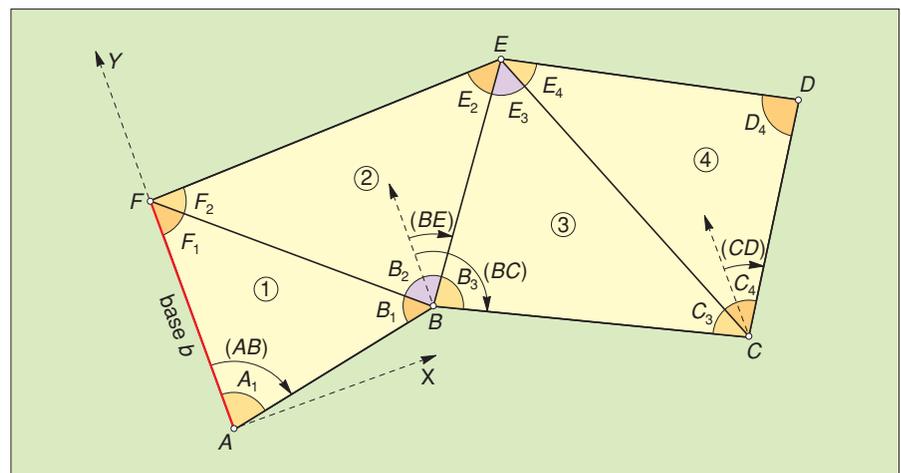
Prescindendo dai problemi connessi alla **compensazione**, consideriamo la semplice triangolazione tecnica a *catena*, che immaginiamo di *tipo topografico*, schematizzata in ► FIGURA 8, prescindendo per il momento dagli *errori di osservazione* di cui sono affette, in qualche modo, le misure realizzate in campagna.

Supponiamo poi che nelle operazioni di campagna vengano misurati tutti gli **angoli interni** di ciascun triangolo e la **base** della triangolazione, che coincide con il lato  $AF$  ( $b = AF$ ).

Generalmente le triangolazioni di *tipo tecnico* hanno carattere **locale**, perciò *non sono orientate* rispetto a *sistemi assegnati*, ma sono riferite a sistemi di riferimento **arbitrari** definiti dal tecnico in modo da avere nota la *posizione di un vertice* (nel nostro esempio  $A$ ), assumendolo come **origine** del sistema di riferimento, e la **direzione** (*l'azimut*) di un lato uscente da tale vertice (nel nostro caso il lato  $AF$ ). Nell'esempio di ► FIGURA 8, l'asse delle ordinate coincide con il lato  $AF$  ( $Y \equiv AF$ ), per cui automaticamente diventano noti gli azimut  $(AF) = 0^\circ$  e  $(AB) = A_1$ .

La risoluzione geometrica di una triangolazione tecnica si sviluppa, poi, secondo le seguenti fasi:

- partendo dal triangolo a cui appartiene la **base** nota  $b$  si applica il *teorema dei seni* per calcolare la lunghezza dei **lati incogniti** dello stesso triangolo;
- successivamente l'operazione viene ripetuta via via progressivamente per tutti gli altri triangoli della triangolazione;
- calcolo degli **azimut** dei lati, partendo da quelli noti, e utilizzando gli *angoli interni* dei triangoli misurati nelle operazioni di campagna;
- calcolo delle **coordinate cartesiane** dei vertici avendo a disposizione *più strade* per raggiungere tutti i vertici della triangolazione.



**FIGURA 8** Piccola triangolazione tecnica costituita da quattro triangoli e in cui è stata misurata la base  $b = AF$ .

Con riferimento alla stessa ► FIGURA 8 proponiamo il seguente esempio sviluppato numericamente, nel quale si prescinde dai problemi connessi agli errori di misura.

### APPLICAZIONE

**Problema** Con riferimento allo schema di ► FIGURA 8, sviluppare i calcoli geometrici della triangolazione ABCDEF le cui misure eseguite in campagna sono riportate nel seguente registro.

Triangolo 1	Triangolo 2	Triangolo 3	Triangolo 4
$A_1 = 85^{\circ},78$	$B_2 = 96^{\circ},68$	$B_3 = 110^{\circ},06$	$C_4 = 50^{\circ},08$
$B_1 = 55^{\circ},83$	$E_2 = 56^{\circ},37$	$C_3 = 41^{\circ},59$	$D_4 = 111^{\circ},15$
$F_1 = 58^{\circ},39$	$F_2 = 46^{\circ},95$	$E_3 = 48^{\circ},35$	$E_4 = 38^{\circ},77$
Base $\overline{AF} = b = 658,20$ m			

#### 1. Calcolo delle lunghezze dei lati del triangolo iniziale:

$$\overline{AB} = 658,20 \frac{\text{sen } 58^{\circ},39}{\text{sen } 55^{\circ},83} = 679,68 \text{ m} \quad \overline{FB} = 658,20 \frac{\text{sen } 85^{\circ},78}{\text{sen } 55^{\circ},83} = 834,86 \text{ m}$$

#### 2. Calcolo delle lunghezze dei lati dei successivi triangoli:

$$\begin{aligned} \overline{BE} &= 834,86 \frac{\text{sen } 46^{\circ},95}{\text{sen } 56^{\circ},37} = 725,11 \text{ m} & \overline{FE} &= 834,86 \frac{\text{sen } 96^{\circ},68}{\text{sen } 56^{\circ},37} = 1076,88 \text{ m} \\ \overline{BC} &= 725,11 \frac{\text{sen } 48^{\circ},35}{\text{sen } 41^{\circ},59} = 821,43 \text{ m} & \overline{EC} &= 725,11 \frac{\text{sen } 110^{\circ},06}{\text{sen } 41^{\circ},59} = 1178,14 \text{ m} \\ \overline{CD} &= 1178,14 \frac{\text{sen } 38^{\circ},77}{\text{sen } 111^{\circ},15} = 684,42 \text{ m} & \overline{ED} &= 1178,14 \frac{\text{sen } 50^{\circ},08}{\text{sen } 111^{\circ},15} = 847,07 \text{ m} \end{aligned}$$

#### 3. Calcolo degli azimut necessari:

$$\begin{aligned} (AF) &= 0^{\circ} & (AB) &= 85^{\circ},78 & (BA) &= 285^{\circ},78 \\ (BE) &= [285^{\circ},78 + 55^{\circ},83 + 96^{\circ},68] - 400^{\circ} = 38^{\circ},29 \\ (BC) &= 38^{\circ},29 + 110^{\circ},06 = 148^{\circ},35 & (CB) &= 348^{\circ},35 \\ (CD) &= [348^{\circ},35 + 41^{\circ},59 + 50^{\circ},08] - 400^{\circ} = 40^{\circ},02 \end{aligned}$$

#### 4. Calcolo delle coordinate dei vertici:

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \text{ m} & Y_A &= 0 \text{ m} & X_F &= 0 \text{ m} & Y_F &= 658,20 \text{ m} \\ X_B &= 0 + 679,68 \text{ sen } 85^{\circ},78 = +662,79 \text{ m} \\ Y_B &= 0 + 679,68 \text{ cos } 85^{\circ},78 = +150,56 \text{ m} \\ X_E &= 662,79 + 725,11 \text{ sen } 38^{\circ},29 = +1073,09 \text{ m} \\ Y_E &= 150,56 + 725,11 \text{ cos } 38^{\circ},29 = +748,42 \text{ m} \\ X_C &= 662,79 + 821,43 \text{ sen } 148^{\circ},35 = +1258,49 \text{ m} \\ Y_C &= 150,56 + 821,43 \text{ cos } 148^{\circ},35 = -415,04 \text{ m} \\ X_D &= 1258,49 + 684,42 \text{ sen } 40^{\circ},02 = +1660,96 \text{ m} \\ Y_D &= -415,04 + 684,42 \text{ cos } 40^{\circ},02 = +138,54 \text{ m} \end{aligned}$$

## 4. La triangolazione geodetica dell'IGM

All'indomani dell'unità d'Italia, si fece indifferibile l'esigenza di avere una **carta topografica** che rappresentasse in modo organico e completo tutto il territorio nazionale. Il patrimonio cartografico dell'epoca era quello ereditato dai vari staterelli italiani e costituiva nel suo insieme una cartografia non omogenea sia per



**FIGURA 9** Schema della rete fondamentale del I ordine in Italia.

scala di rappresentazione, sia per procedimenti di rilievo impiegati, oltre che per i sistemi di proiezione adottati. Questa, perciò, non era idonea a costituire la dotazione cartografica della neonata nazione.

Poiché gli scopi di questa cartografia oltre che *civili*, all'epoca, erano soprattutto *militari*, ne fu affidata la realizzazione e la conservazione all'**Istituto Geografico Militare**, con sede a Firenze, il quale ha redatto la cosiddetta **Carta d'Italia** prima nella scala 1:100 000 e successivamente nelle scale 1:50 000 (*quadranti*) e 1:25 000 (*tavolette*).

La **rete di inquadramento** utilizzata per il rilievo topografico collegato alla creazione della Carta d'Italia venne realizzata con una *triangolazione a rete di tipo geodetico* (più sinteticamente **rete geodetica**). Questo fu un lavoro imponente, che coinvolse complessivamente 20 000 punti e che si protrasse per decenni, superando innumerevoli tipologie di problematiche.

Le *triangolazioni geodetiche* propongono sempre *due esigenze contrapposte*: da una parte, al fine di limitare la **propagazione degli errori**, conviene rilevare la posizione di **pochi punti** distribuiti sull'intero territorio e quindi caratterizzati da *grandi distanze* reciproche. Dall'altra c'è la necessità di avere sul terreno una buona quantità di punti (**densità**) in modo che sia poi possibile l'esecuzione del rilievo dei particolari topografici.

Per conciliare queste due esigenze, contrastanti ma entrambe ineludibili, si definisce una *prima maglia di punti*, limitati come numero ma distribuiti su tutto il territorio e rilevati con *grande precisione*, denominata rete di **I ordine**.

A questa prima e **fondamentale** triangolazione si collegano successivamente le reti di **II ordine**, **III ordine** ecc. (con i criteri esposti in precedenza), fino a che la densità di punti noti raggiunta sul terreno non sia giudicata sufficiente per il successivo *rilievo dei dettagli* del terreno stesso.

È evidente che questa densità di punti noti è strettamente legata alla scala di rappresentazione. Nel caso della Carta d'Italia la rappresentazione è a **piccola scala** (1:100 000) pertanto la densità è *relativamente bassa* (mediamente un punto ogni 2-3 km<sup>2</sup>). È anche evidente che tale densità sarebbe del tutto inadeguata per i rilievi con rappresentazioni a **grande scala** (1:2000, 1:1000 ecc.), più familiari al tecnico geometra.

## ■ Rete di primo ordine

Per realizzare la **rete fondamentale** furono individuati circa 300 punti, chiamati vertici **trigonometrici di primo ordine**. Essi formano una rete continua di triangoli pressoché equilateri che copre l'intero territorio nazionale; la loro distanza reciproca non è mai inferiore ad *alcune decine* di chilometri (mediamente 40-50 km) e in alcuni casi eccezionali può raggiungere anche parecchie decine di chilometri. I vertici di primo ordine sono convenzionalmente indicati sulla carta d'Italia con un **triangolino rosso**. La ► FIGURA 9 illustra lo schema della rete fondamentale di I ordine sul territorio nazionale.

L'importanza della rete fondamentale e i problemi di ordine generale che essa investì, furono tali da travalicare di gran lunga le esigenze dettate dalla preparazione della Carta d'Italia, ma si proposero anche come **strumento di base** per qualsiasi lavoro di carattere geodetico e topografico a scopi civili e non solo militari.

Nelle zone pianeggianti i vertici di I ordine sono costituiti da *segnali naturali*, in genere **campanili** (► FIGURA 10) o *particolari architettonici di fabbricati* monumentali, mentre nelle zone montane si dovettero individuare i vertici con *segnali artificiali*, come **pilastrini** in calcestruzzo (► FIGURA 11a) o in ferro, opportunamente segnalati con *mire*, di solito **capre**, di adeguate dimensioni (► FIGURA 11b).

### FAQ

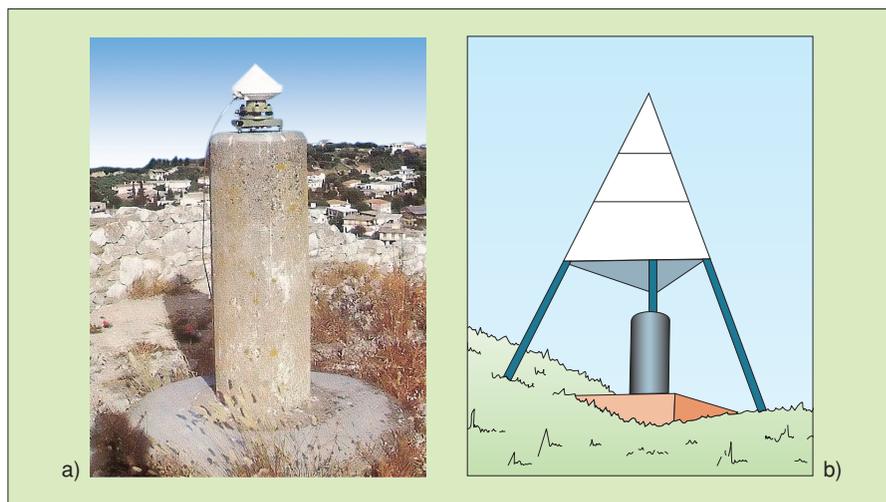
► **Per quale ragione lo Stato italiano affidò all'IGM il compito di redigere la Carta d'Italia?**

Perché all'epoca (1881) la carta aveva prevalenti finalità militari. Solo successivamente queste ragioni andarono via via attenuandosi, mentre contestualmente aumentavano le implicazioni civili della stessa carta.



**FIGURA 10** Torre campanaria del Duomo di Modena (Ghirlandina), vertice di I ordine della rete geodetica italiana.

**FIGURA 11** I segnali artificiali materializzano i vertici della rete, e le mire li rendono visibili a distanza: a) pilastro in calcestruzzo; b) capra in legno.



### • Misura delle basi

Straordinari, per il tempo, furono i problemi connessi alla **misura delle basi** della rete di I ordine. Essendo impensabile ipotizzare la misura di *una sola base* (data l'estensione e la conformazione del territorio da rilevare) per l'intollerabile **propagazione degli errori** che questa avrebbe prodotto, furono programmate 8 basi. Di fatto il territorio nazionale venne suddiviso idealmente in 8 parti, in ciascuna delle quali la triangolazione viene calcolata partendo dalla relativa base.

### ■ Rete di secondo ordine

Ultimati i lavori connessi alla rete fondamentale di I ordine, i tecnici dell'IGM passarono al rilievo della rete di **II ordine**, seguendo i criteri già illustrati in precedenza. Nella ►FIGURA 12 viene riproposto lo schema geometrico col quale i vertici della rete di I ordine sono intercalati da quelli di II ordine.

Si noterà come questi ultimi siano *rigidamente collegati* con quelli della rete fondamentale e come su tutta la rete sia possibile individuare dei triangoli nei quali un lato sia costituito da vertici di I ordine e quindi di lunghezza nota. La rete di II ordine, che presenta lati lunghi mediamente 20-30 km, copre ininterrottamente tutto il territorio nazionale. I suoi vertici nella Carta d'Italia sono identificati da un **cerchietto rosso**.

### ■ Rete di terzo ordine

A causa dei problemi di visibilità che spesso si riscontrano nelle zone montuose, in alcune aree le reti di I e II ordine presentavano una *densità* di punti maggiore (cioè vertici più vicini), rispetto ad altre zone, di solito pianeggianti, nelle quali la visuale poteva spaziare liberamente ed era condizionata unicamente dalle capacità degli strumenti, dando luogo, di conseguenza, a vertici più distanti e a densità minori.

Si rese perciò necessario un ulteriore **raffittimento** dei vertici laddove le maglie della rete si presentavano più larghe, dunque, più spesso, nei tratti pianeggianti. Questo **raffittimento** venne ottenuto collegando nuovi punti individuati all'interno dei triangoli delle reti precedenti, generalmente in zone baricentriche; questi punti andarono a costituire la rete di III ordine.

Questa rete, perciò, **non è continua**, quindi non si estende ininterrottamente su tutto il territorio nazionale, ma è stata eseguita, a macchie di leopardo, solo nelle zone che richiedevano un riequilibrio della densità di punti noti. I vertici di III ordine sono indicati nella Carta d'Italia con un **quadrato rosso** e la loro distanza è mediamente di 10-15 km.

#### FAQ

##### ► Nella rete geodetica italiana di I ordine, quante basi vennero misurate?

Otto, che di fatto hanno diviso idealmente il territorio nazionale in aree di pertinenza.

#### FAQ

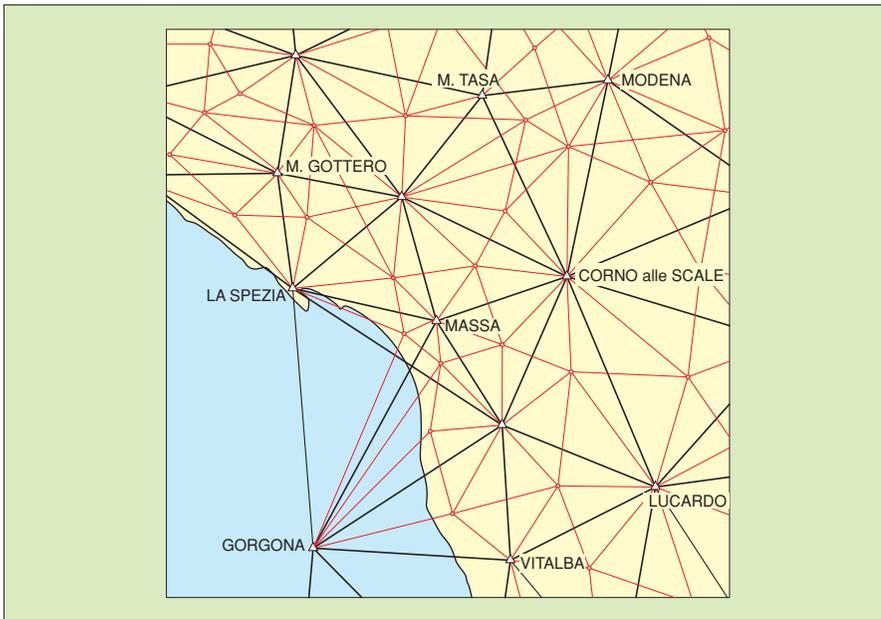
##### ► Nella rete geodetica italiana di II ordine, quante basi vennero misurate?

Nessuna, per il relativo sviluppo vennero utilizzati i lati della rete di I ordine.

#### FAQ

##### ► La rete di III ordine si sviluppa in modo continuo sul territorio nazionale?

No, a differenza delle reti di I e II ordine, essa è stata realizzata solo in alcune regioni, dove i vertici delle reti precedenti erano molto distanti.



**FIGURA 12** Schema della rete di II ordine (in rosso) in un'area che comprende parti di Toscana, Emilia e Liguria.

### ■ Vertici di quarto ordine

Tutti i vertici di I, II e III ordine, che costituivano le rispettive reti, non realizzavano comunque la densità di punti noti richiesta per eseguire il **rilievo dei particolari topografici** del terreno, necessari alla redazione della Carta d'Italia nella scala 1:100 000 e successivamente 1:50 000 e 1:25 000.

L'IGM procedette, allora, a un raffittimento finale, intercalando i vertici delle reti precedenti con nuovi punti detti di IV ordine.

Tuttavia la determinazione di questi vertici, che sono di gran lunga **più numerosi** dei vertici di I, II e III ordine messi insieme, non è stata effettuata con gli stessi criteri con cui sono stati determinati i precedenti ordini di punti. In effetti i vertici di IV ordine **non sono collegati** tra loro, e quindi non formano una rete di triangoli, ma la posizione di ciascun punto è stata determinata in modo autonomo con criteri e metodi che esporremo tra poco e che prendono il nome di *intersezioni*. Questa particolarità ha reso più rapida la determinazione di questo ordine di punti, che però sono decisamente **meno precisi** (ma comunque adeguati alle esigenze della carta in scala 1:100 000) di tutta la rete geodetica italiana.

### ■ La rete IGM95 (ordine 0)

Nella prima metà degli anni '90, con l'affermarsi delle tecniche di rilievo satellitare GPS, l'IGM realizzò una nuova **rete geodetica fondamentale** costituita da **1200 punti** (mediamente un punto ogni 20 km) uniformemente distribuiti su tutto il territorio nazionale, collegata al sistema di riferimento europeo (ETRF89) e chiamata IGM95.

Questi vertici trigonometrici sono in parte (piccola) coincidenti con i vertici della rete storica di I ordine e in gran parte in punti di nuova posizione. Su essi, naturalmente, possono essere collocati apparati GPS.

Dei vertici della rete IGM95 sono state determinate le coordinate sia nel sistema di riferimento utilizzato per la vecchia rete trigonometrica (datum ROMA40), sia nel sistema di riferimento europeo ETRF89. Anche se attualmente la maggior parte della cartografia esistente è espressa nello storico sistema di riferimento ROMA40, questo via via andrà sostituito dal nuovo e più preciso riferimento della rete IGM95.

#### FAQ

##### ► I vertici di IV ordine sono collegati tra loro?

No, in effetti non costituiscono una triangolazione, ma sono stati determinati con altri metodi di rilievo allo scopo di aumentare la densità di punti noti fornita dalle reti di I, II e III ordine.

**FAQ**

► **Le informazioni connesse alla Carta d'Italia sono disponibili al pubblico?**

Sì, dal 1936, anno in cui venne dichiarata superata l'esclusiva militare della carta.

**■ Pubblicazioni dell'IGM**

L'imponente lavoro descritto in precedenza, che si è protratto per decenni ed è ancora in atto per la fase di conservazione e adeguamento, è stato la base utilizzata dall'IGM nella formazione della Carta d'Italia che, come già ricordato, venne in prima istanza redatta in scala 1:100 000. Essa si compone di 278 **fogli** (in generale, quindi, *un foglio per ciascun vertice di I ordine*). I fogli sono individuati da un *numero* progressivo e dal *nome* di una località in esso contenuta.

A partire dal 1936 l'IGM (esaurita l'esclusività militare della carta) iniziò la pubblicazione di **fascicoli** contenenti, ciascuno, un foglio della carta 1:100 000 e tutti gli elementi dei vertici che si trovano in quel foglio, e cioè:

- **ordine del vertice;**
- **breve descrizione;**
- **coordinate geografiche** (latitudine e longitudine);
- **quota assoluta;**
- **schizzo monografico.**

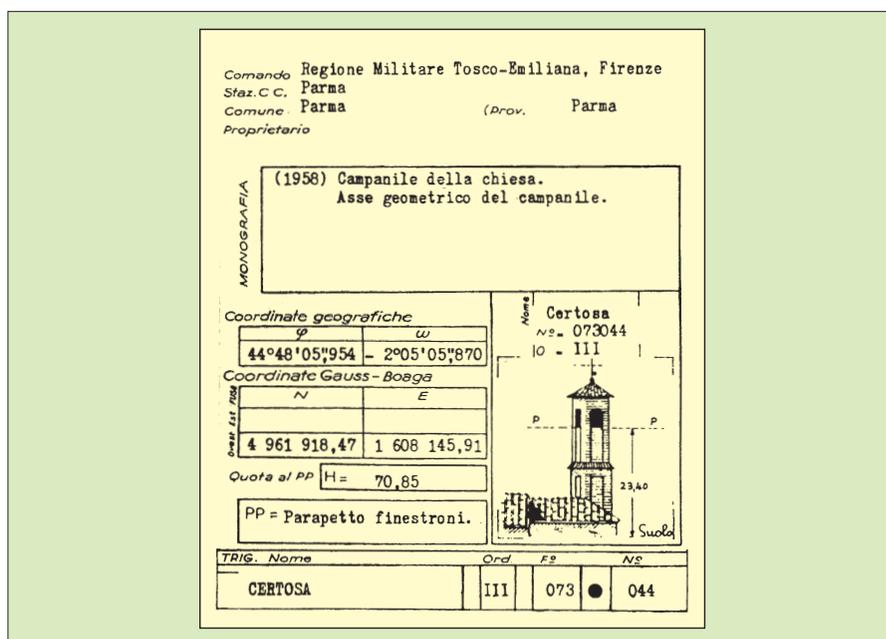
Si sarà certamente osservato che le posizioni dei vertici della rete vennero determinate esprimendole in coordinate geografiche, in quanto questo sistema fu giudicato di più universale applicazione e più conveniente per il lavoro cartografico commissionato all'IGM.

Tuttavia l'importanza di questo lavoro ha travalicato le finalità cartografiche originarie, assumendo anche rilevanti implicazioni che ben presto coinvolsero l'attività dei tecnici ordinari. Emerse, allora, l'esigenza di riferire i vertici della rete anche a un sistema di coordinate di più immediato impiego nell'ambito di attività minori e territorialmente circoscritte.

Nel secondo dopoguerra, in effetti, l'IGM riferì i vertici della rete a un sistema di *coordinate cartografiche ortogonali E, N, h*, definito sull'ellissoide e denominato **Gauss-Boaga**, che verrà illustrato in seguito (modulo L) e che è stato anticipato nel modulo B del volume 1.

Queste coordinate sono espresse in metri e sono molto utili nelle operazioni topografiche ordinarie in quanto, per **piccole estensioni**, queste possono senz'altro essere considerate come normali coordinate cartesiane piane con la corrispondenza  $Y \equiv N$  e  $X \equiv E$ .

**FIGURA 13** Esempio di monografia di un vertice estratto dai cataloghi IGM che illustrano i punti trigonometrici presenti nella Carta d'Italia.



Come conseguenza, a partire dagli anni '50, vennero pubblicati i **cataloghi** (► FIGURA 13) dei punti trigonometrici contenuti nei fogli della Carta d'Italia. In essi, oltre agli elementi già presenti nei fascicoli, vengono riportate anche le coordinate nel sistema *Gauss-Boaga*.

## Le intersezioni

### 5. Classificazione delle intersezioni

In precedenza si è visto come ai vertici di IV ordine della rete geodetica italiana sia stato assegnato il compito di costituire il **raffittimento** finale della rete di inquadramento necessario a realizzare la densità di punti noti richiesti dal successivo *rilievo di dettaglio*. Questi punti si dicono **isolati**, in quanto non sono *collegati* tra loro, e ciascuno viene determinato in modo del tutto **autonomo** dagli altri, costituendo un insieme *poco rigido* nel quale non è possibile ottenere grandi precisioni.

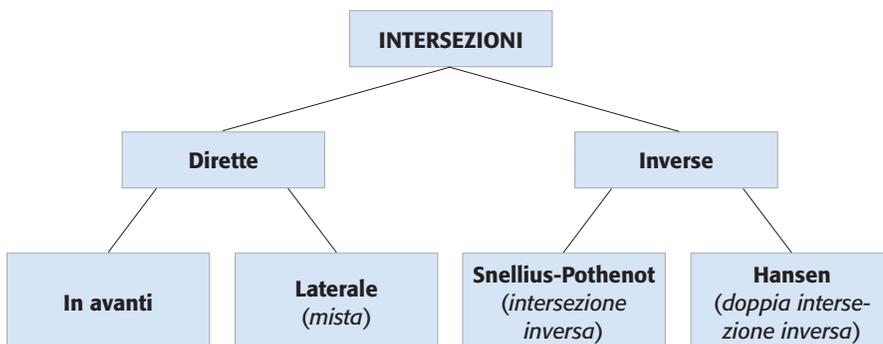
Le *procedure operative* e i *metodi necessari* per determinare la posizione di punti *isolati* prendono il nome di **intersezioni**. Il nome deriva dal fatto che graficamente essi permettono di stabilire la posizione incognita dei punti interessati tramite l'*intersezione grafica* di due o più semirette **che partono da punti noti**.

Ricordiamo, però, che l'impiego *esclusivo* di questi metodi per realizzare il raffittimento finale di una rete di inquadramento, è accettabile solo per rappresentazioni a **piccola scala** (come nel caso della Carta d'Italia). Quando il rilievo, invece, prevede la realizzazione di una carta a **grande scala** (1:2000; 1:1000 ecc.) l'impiego dei metodi di intersezione è assai limitato e occasionale, mentre il grosso del lavoro di raffittimento viene demandato all'uso delle **poligonali**.

I metodi di intersezione possono essere anche utilizzati per scopi e in ambiti diversi dalle reti di *inquadramento* e *raffittimento*. Spesso, infatti, questi metodi vengono utilizzati per determinare la posizione di punti al fine di **orientare** una determinata struttura topografica, che può essere una poligonale o una triangolazione tecnica (operazione di **riattacco**).

Nella concezione classica dei metodi di intersezione, la posizione di un punto isolato viene sempre definita partendo da altri punti dei quali già devono essere note le coordinate e utilizzando alcune misure **esclusivamente** angolari eseguite in campagna.

Da un punto di vista operativo si usa classificare i metodi classici di intersezione secondo il seguente schema:



#### FAQ

► **In quale contesto è corretto l'impiego delle intersezioni?**

Le intersezioni non devono mai essere usate in modo autonomo, ma devono costituire la fase di raffittimento di punti determinati con le triangolazioni, nell'ambito di un rilievo con rappresentazione a piccola scala.

#### FAQ

► **Quali misure, nella concezione classica, vengono eseguite nelle intersezioni?**

Solo misure angolari, le più semplici da eseguire in passato.

**FAQ**

► **Al fine di realizzare le operazioni di misura, sono più convenienti le intersezioni dirette o quelle inverse?**

Quelle inverse. Le intersezioni dirette, infatti, prevedono la stazione con il goniometro su punti di posizione nota che, in genere, ostacolano l'esecuzione della stessa stazione (stazione fuori centro).

Nelle intersezioni **dirette** le misure angolari necessarie alla definizione dei punti isolati sono effettuate **facendo stazione** col goniometro su almeno uno dei punti di *coordinate note*, mentre nelle intersezioni **inverse** le misure angolari sono effettuate facendo stazione sul punto isolato *incognito*.

La scelta di un metodo piuttosto che un altro dipenderà dalle configurazioni morfologiche del terreno, dalla disponibilità e dalla visibilità dei vertici di coordinate note che dovranno fungere da punti di partenza, nonché dalle precisioni che occorre rispettare.

Facciamo subito rilevare che, a prescindere dai criteri precedenti, le *intersezioni dirette* (in avanti e laterale) richiedono lo stazionamento dei goniometri sui punti di coordinate note (per esempio vertici della rete geodetica), ed essendo questi ultimi generalmente in posizioni inaccessibili, diviene spesso necessario eseguire la **stazione fuori centro**, che costituisce una complicazione non trascurabile della procedura.

Al contrario, le *intersezioni inverse*, richiedono lo stazionamento del goniometro sui punti incogniti, spesso definiti dal tecnico in posizioni meno difficili, sui quali è possibile lo stazionamento del goniometro; perciò, in definitiva, esse sono da considerare più convenienti di quelle *dirette*, anche se lo sviluppo numerico appare più complesso.

## 6. Intersezioni dirette

### ■ Intersezione in avanti

Lo schema dell'intersezione **in avanti** (► FIGURA 14) viene usato per determinare le coordinate di un punto *P* isolato ma visibile da due punti *A* e *B* di coordinate note e che, a loro volta, devono essere visibili reciprocamente. L'intersezione in avanti viene usata in genere quando il punto isolato *P* da determinare è **inaccessibile**.

Facendo stazione con un goniometro sui punti noti *A* e *B*, si misurano gli angoli  $\widehat{PAB} = \alpha$  e  $\widehat{ABP} = \beta$ . Queste sono le sole misure richieste nel lavoro di campagna.

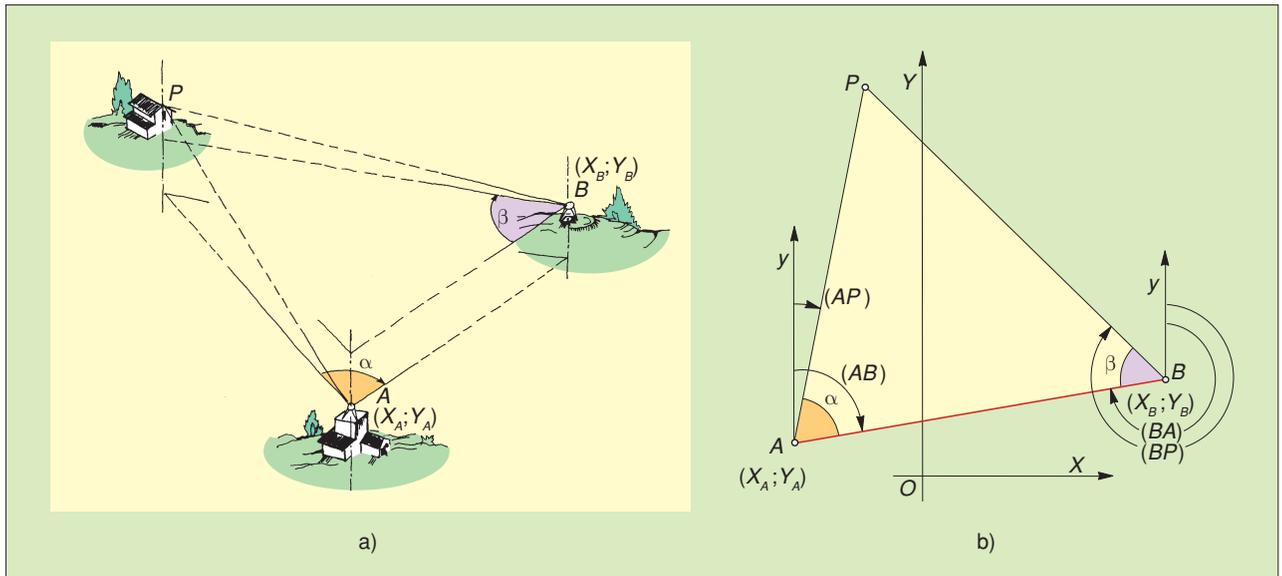
Per eliminare l'ambiguità connessa alla posizione di *P* rispetto al lato *AB* occorre poi preventivamente stabilire da che parte si colloca *P*, se alla sinistra (come in ► FIGURA 14) oppure alla destra di un osservatore posto in *A* che osserva *B*.

Sintetizziamo gli elementi geometrici del problema:

Elementi noti	Elementi misurati	Incognite
$A \equiv (X_A; Y_A)$	$\alpha, \beta$	$P \equiv (X_P; Y_P)$
$B \equiv (X_B; Y_B)$		

I punti *A* e *B* di coordinate note possono appartenere alle reti di inquadramento nazionali (IGM o Catasto), oppure possono essere stati definiti in operazioni precedenti nell'ambito dello stesso rilievo topografico. Il calcolo geometrico dell'*intersezione in avanti* inizia con la determinazione delle coordinate polari di *B* rispetto ad *A* [ $(AB)$  e  $\overline{AB}$ ] e viceversa:

$$(AB) = \arctg\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right) \quad (BA) = (AB) \pm 200^\circ \quad \overline{AB} = \frac{X_B - X_A}{\text{sen}(AB)}$$



Ora del triangolo  $ABP$  si conoscono la lunghezza del lato  $AB$  e gli angoli misurati  $\alpha$  e  $\beta$ . Applicando il teorema dei seni si possono calcolare la lunghezza del lato  $AP$  e quindi l'azimut  $(AP)$  dello stesso lato:

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \quad (AP) = (AB) - \alpha$$

Queste sono le coordinate polari di  $P$  rispetto ad  $A$ . Il calcolo delle coordinate cartesiane di  $P$  diviene allora immediato; partendo dal punto  $A$  si ha (con riferimento alla ► FIGURA 14):

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + (x_P)_A & \text{cioè} & & X_P &= X_A + \overline{AP} \cdot \text{sen}(AP) \\ Y_P &= Y_A + (y_P)_A & & & Y_P &= Y_A + \overline{AP} \cdot \text{cos}(AP) \end{aligned}$$

In modo analogo si può procedere partendo dal punto  $B$ , calcolando  $\overline{BP}$  e  $(BP)$ .

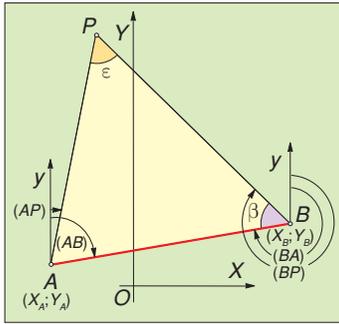
Le intersezioni sono un problema essenzialmente **planimetrico**, tuttavia, conoscendo la quota di almeno uno dei due punti  $A$  e  $B$ , è possibile determinare anche la **quota** del punto incognito  $P$ . Se, per esempio, si conosce la quota  $Q_A$  di  $A$ , è possibile determinare la quota di  $P$  misurando il dislivello  $\Delta_{AP}$ . Di solito le distanze tra i punti noti e quello incognito sono elevate e pertanto richiedono la misura del dislivello con una **livellazione trigonometrica** semplificata:

$$Q_P = Q_A + \Delta_{AP} = Q_A + \left( \overline{AP} \cdot \cotg \varphi_p + \frac{1 - K}{2R} \overline{AP}^2 + h_A - h_m \right)$$

Naturalmente  $\varphi_p$  rappresenta l'**angolo zenitale** misurato da  $A$  su  $P$ ,  $h_A$  il valore dell'**altezza strumentale** in  $A$ ,  $h_m$  l'**altezza dal suolo della mira** collimata in  $P$ , mentre  $K$  è il **coefficiente di rifrazione atmosferica** e  $R$  è il raggio della **sfera locale**.

Come si vede, il problema strettamente geometrico connesso all'intersezione in avanti, è molto semplice. Di fatto si tratta di risolvere un triangolo col teorema dei seni. Tuttavia è opportuno ricordare che spesso la stazione sui punti di coordinate note  $A$  e  $B$  non è possibile, quindi la misura degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  richiede fastidiose e costose **stazioni fuori centro**, che appesantiscono il lavoro di campagna.

**FIGURA 14** Schema di intersezione in avanti per la determinazione delle coordinate di un punto  $P$  considerato inaccessibile.



**FIGURA 15** Schema di intersezione laterale.

## ■ Intersezione laterale (o mista)

Questo metodo di intersezione (► FIGURA 15) viene impiegato nella determinazione di un punto isolato *P* che deve essere **accessibile**, avendo a disposizione due punti *A* e *B* di coordinate note, reciprocamente visibili, e da almeno uno dei quali sia visibile *P*.

Le operazioni di misura richiedono la stazione su *P* per misurare l'angolo  $\epsilon$ , e su uno dei due punti di coordinate note, per esempio in *B*, per misurare l'angolo  $\beta$ . L'angolo  $\alpha$  si ottiene dalla ovvia relazione:  $\alpha = 200^\circ - (\beta + \epsilon)$ .

A questo punto lo sviluppo geometrico diventa identico a quello appena visto nell'*intersezione in avanti*, con la facile determinazione delle coordinate del punto *P*. La vera differenza con l'*intersezione in avanti* è nel lavoro di campagna. In effetti in questo caso occorre eseguire la stazione su un solo punto di coordinate note, e quindi la probabilità di dover ricorrere alla **stazione fuori centro** si riduce rispetto all'*intersezione in avanti*.



**Stazione fuori centro nelle intersezioni dirette**

## 7. Il problema di Snellius-Pothenot (intersezione inversa)

Abbiamo appena visto come le **intersezioni dirette** (*in avanti* e *laterale*) richiedono un *semplice* e rapido lavoro di calcolo, ma sono spesso *complicate* nella fase di realizzazione delle misure angolari in campagna, a causa della consistente probabilità di dover effettuare *stazioni fuori centro*.

Ben più conveniente sarebbe la determinazione della posizione del punto incognito *P*, senza avere la necessità di fare stazione col goniometro su uno o più vertici trigonometrici, ma facendo stazione sul punto *P*, naturalmente quando questo è accessibile.

### FAQ

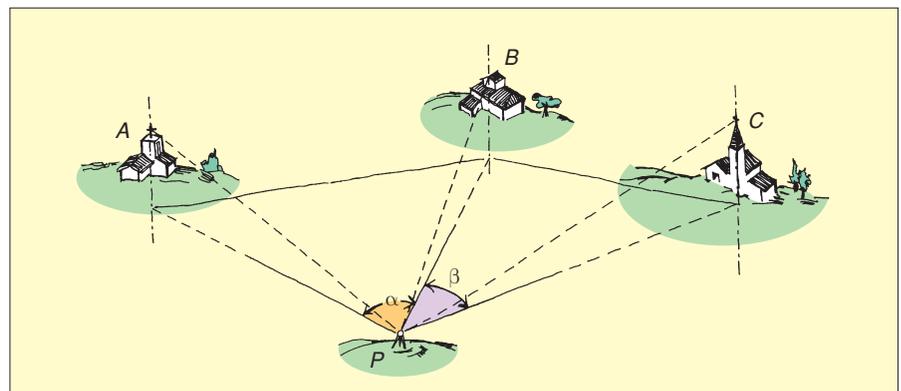
► **L'intersezione laterale è più conveniente dell'intersezione in avanti?**

In teoria sì, perché richiede la stazione con il goniometro solo su un punto noto (e non su due); tuttavia è necessario che il punto incognito sia accessibile per potersi eseguire la stazione.

Questa opportunità ci è fornita dall'**intersezione inversa**, la quale prevede lo stazionamento del goniometro **solo** sul punto *P* incognito, dal quale però devono essere visibili almeno **tre punti** *A, B, C* (*intersezione inversa semplice*) di coordinate note, per consentire la misura dei due angoli orizzontali  $\alpha$  e  $\beta$  compresi tra le tre direzioni che escono da *P* e che passano per essi (► FIGURA 16).

Questo notissimo problema di topografia venne formulato la prima volta da **Snellius** (Willebrord Snell), che ne indicò una soluzione di tipo **grafico** nei primi anni del Seicento. Ma poi fu **Pothenot** che ne sviluppò una procedura analitica

**FIGURA 16** Schizzo orientativo relativo al metodo dell'intersezione inversa per la determinazione del punto *P* (problema di Snellius-Pothenot) partendo dai 3 punti *A, B* e *C* di coordinate note, e con la misura degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  in *P*.



congeniale al calcolo logaritmico. Da allora numerosi furono gli studi proposti per risolvere questo problema.

Diciamo subito che alla *semplificazione* nell'esecuzione delle misure rispetto alle *intersezioni dirette*, corrisponde, nelle *intersezioni inverse*, una maggior *complessità* dello schema geometrico e dei relativi calcoli, che tuttavia è senz'altro meglio tollerata e più conveniente.

Come nell'*intersezione in avanti*, anche in questo caso è necessario eliminare l'**ambiguità** connessa alla posizione di  $P$  rispetto ai punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ , stabilendo a priori da che parte si colloca  $P$ , se alla destra (come in ► FIGURA 16) oppure alla sinistra di un osservatore posto in  $A$  che osserva  $B$ .

Gli elementi geometrici in gioco nell'*intersezione inversa semplice* sono sintetizzati nella seguente tabella:

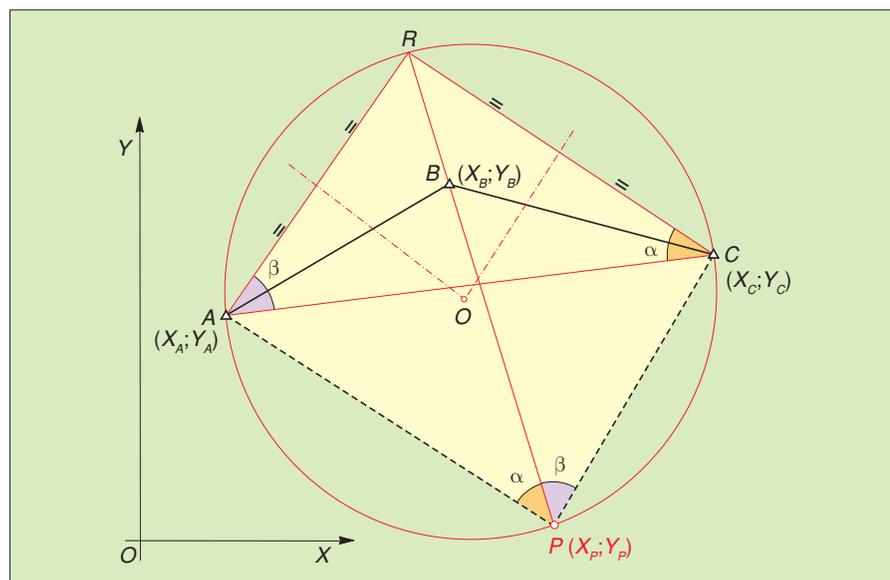
Elementi noti	Elementi misurati	Incognite
$A \equiv (X_A; Y_A)$	$\alpha, \beta$	$P \equiv (X_P; Y_P)$
$B \equiv (X_B; Y_B)$		
$C \equiv (X_C; Y_C)$		

Esistono numerose soluzioni per questo problema. Alcune di esse sono di tipo **grafico**, altre di tipo **numerico**; tra queste ultime, poi, in passato erano preferite quelle che permettevano il *calcolo logaritmico*, ma ormai, dopo l'avvento delle calcolatrici tascabili, tale prerogativa appare del tutto irrilevante.

Per questa ragione, alla trattazione della soluzione analitica del problema facciamo precedere quella grafica, che ci fornirà anche alcune indicazioni geometriche indispensabili allo sviluppo numerico del problema.

### ■ Soluzione grafica di Collins

Tra le varie soluzioni grafiche del problema di Snellius-Pothenot, particolarmente semplice e rapida appare quella proposta dal matematico inglese **John Collins** (1625-1683) nella sua opera *Trasactions Philosophiques*, pubblicata nel 1671. Essa permette di individuare graficamente sul foglio da disegno (o in ambiente CAD) il punto incognito  $P$ , attraverso i passaggi sotto descritti (► FIGURA 17).



**FIGURA 17** Gli elementi (in rosso) della soluzione grafica di Collins basata sul punto ausiliario  $R$  e la circonferenza passante per i tre punti  $A$ ,  $C$ ,  $R$ .

#### FAQ

##### ► Quali sono le differenze tra le intersezioni dirette e quelle inverse?

Le intersezioni dirette richiedono calcoli numerici elementari, ma costringono a un laborioso lavoro nell'esecuzione delle misure in campagna per la difficoltà di eseguire le stazioni su punti di posizione nota. Al contrario, quelle inverse presentano sessioni di misura più semplici con stazioni eseguite unicamente sui punti incogniti, ma con schemi di calcolo assai più complessi.

#### FAQ

##### ► Il problema di Snellius-Pothenot prevede anche la possibilità di soluzioni grafiche?

Sì, esse possono anche essere utilizzate per impostare il calcolo analitico dello stesso problema.

**FAQ**

► **In quale contesto la soluzione grafica di Collins fornisce la posizione del punto incognito con scarsa precisione?**

Quando i punti *B* e *R* sono molto vicini, quindi la loro distanza è molto piccola.

1. Collocamento sul foglio dei tre punti *A, B, C* riportando in **scala** le rispettive coordinate note e tracciamento della congiungente *AC*.
2. Tracciamento della semiretta con origine in *A*, dalla **parte opposta** di *P*, formante l'**angolo**  $\beta$  con la congiungente *AC*.
3. Tracciamento della semiretta con origine in *C*, dalla **parte opposta** di *P*, formante l'**angolo**  $\alpha$  con la congiungente *CA*.
4. Individuazione dell'**intersezione** *R* delle due semirette precedenti (*R* può essere sia alla destra sia alla sinistra di *AB*) e tracciamento del **cerchio** passante per i tre punti *A, C, R*, il cui **centro** *O* (necessario all'uso del compasso) è individuato dall'intersezione degli **assi** dei segmenti *AR* e *CR*.
5. **Prolungamento** del segmento *RB*, fino a intersecare il **cerchio** precedente, dalla parte opposta a *R*, individuando il punto *P* cercato.

Per valutare la correttezza del procedimento basta osservare che gli angoli  $\widehat{APB}$  e  $\widehat{BPC}$  (ottenuti collegando *A, B, C* con *P*) sono proprio i due angoli  $\alpha$  e  $\beta$  sotto cui da *P* si vedono i segmenti *AB* e *BC*. Infatti  $\widehat{APB} = \widehat{ACR} = \alpha$ , in quanto **angoli alla circonferenza** sottesi alla stessa **corda** *AR*; per la stessa ragione si avrà  $\widehat{BPC} = \widehat{CAR} = \beta$ .

Nella costruzione grafica di **Collins**, eseguita come disegno tradizionale su **carta**, è opportuno che il segmento *RB* non sia **eccessivamente piccolo**, perché in questo caso il suo prolungamento diventerebbe incerto e l'individuazione di *P* risulterebbe poco precisa. Questo problema, invece, non esiste affatto se la costruzione grafica viene eseguita in ambito CAD (v. *Laboratorio informatico* di questa unità).

■ **Soluzione analitica (basata sulla costruzione di Collins)**

Nel tempo, sono state successivamente proposte svariate soluzioni numeriche di questo notissimo problema. Tra queste, particolarmente diffusa fu la **soluzione analitica** dovuta al matematico francese **Laurent Pothenot** (1660-1732); essa era influenzata dalle esigenze del **calcolo logaritmico**, che in passato è stato un importante strumento per sviluppare i calcoli. Oggi, con l'uso del **computer** e delle **calcolatrici tascabili**, viene a mancare il condizionamento di arrivare a una **espressione logaritmica**, dando spazio a soluzioni più snelle e lineari sotto l'aspetto geometrico. Noi ne proporremo di seguito una, basata sulla costruzione di Collins, che prevede i seguenti passaggi.

1. Con riferimento alla ► **FIGURA 18**, che riproduce la costruzione di Collins, si inizia calcolando l'azimut (*AC*) e la distanza  $\overline{AC}$  utilizzando le coordinate cartesiane note di *A* e *C*:

$$(AC) = \arctg \frac{X_C - X_A}{Y_C - Y_A} \quad \overline{AC} = \frac{X_C - X_A}{\text{sen}(AC)} \quad (CA) = (AC) \pm 200^\circ$$

2. La distanza *AC*, con i due angoli  $\widehat{ACR} = \alpha$  e  $\widehat{CAR} = \beta$ , consente la risoluzione del **triangolo** *ACR*. Da esso possiamo ricavare le **coordinate polari** di *R* rispetto ad *A* (oppure rispetto a *C*), cioè la lunghezza del lato *AR* e dell'azimut (*AR*) [oppure *CR* e (*CR*)]:

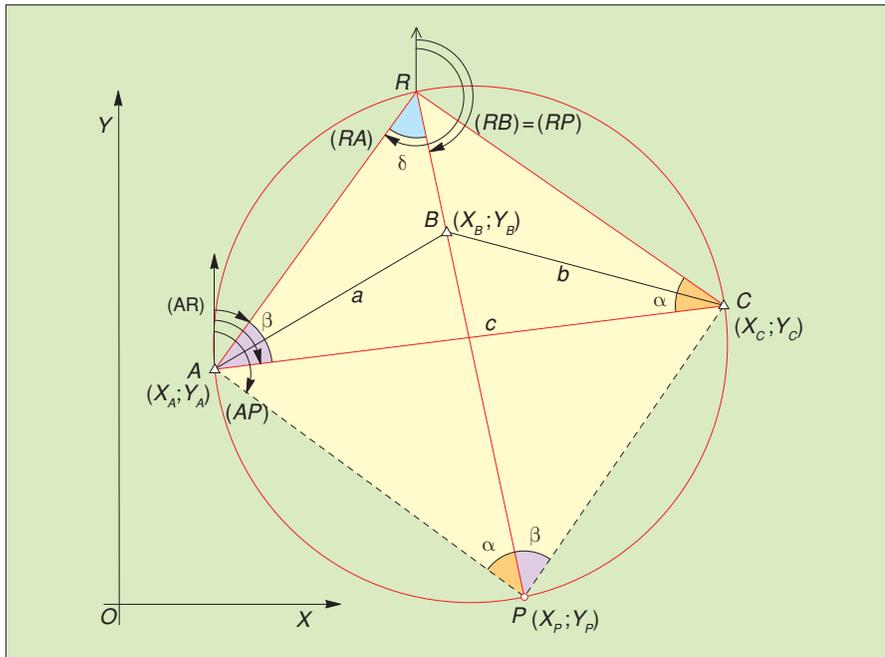
$$AR = \frac{AC}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \text{sen } \alpha$$

$$(AR) = (AC) - \beta \quad (RA) = (AR) \pm 200^\circ$$

3. Ora possiamo trasformare le coordinate polari di *R* rispetto ad *A*, in **coordinate cartesiane**:

$$X_R = X_A + AR \cdot \text{sen}(AR)$$

$$Y_R = Y_A + AR \cdot \text{cos}(AR)$$



**FIGURA 18** Gli elementi della soluzione analitica del problema di Snellius-Pothenot basata sulla costruzione di Collins.

4. Osservando che l'azimut  $(RB)$  ha lo stesso valore di  $(RP)$ , e che ora sono note le coordinate cartesiane di entrambi i punti  $R$  e  $B$ , possiamo calcolare tale azimut, quindi anche l'angolo  $\widehat{ARP} = \delta$  [oppure l'angolo  $\widehat{CRP}$  se si fosse calcolato  $(CR)$  al posto di  $(AR)$ ]:

$$(RB) = (RP) = \operatorname{arctg} \frac{X_B - X_R}{Y_B - Y_R} \quad \delta = (RA) - (RB)$$

5. Considerando il **triangolo ARP** (oppure il triangolo  $CRP$ ), di cui si conoscono i due angoli  $\widehat{ARP} = \delta$  e  $\widehat{APR} = \alpha$  e il lato  $AR$ , possiamo calcolare la lunghezza del lato  $RP$ , che costituisce la seconda **coordinata polare** di  $P$  rispetto a  $R$  [la prima, l'azimut  $(RP)$  è già nota dal punto precedente]:

$$RP = \frac{RA}{\sin \alpha} \sin(\alpha + \delta)$$

6. Infine si trasformano le coordinate polari di  $P$  rispetto a  $R$  [ $RP$  e  $(RP)$ ], nelle corrispondenti **coordinate cartesiane** di  $P$  cercate:

$$\begin{aligned} X_P &= X_R + RP \cdot \sin(RP) \\ Y_P &= Y_R + RP \cdot \cos(RP) \end{aligned}$$

**Osservazione.** Le stesse coordinate cartesiane di  $P$  possono anche essere calcolate partendo da  $A$  [procurandosi  $AP$  e  $(AP)$  nel triangolo  $ARP$ ], oppure da  $C$  [procurandosi  $CP$  e  $(CP)$  nel triangolo  $CRP$ ]. Se, inoltre, dal punto  $P$  è visibile un quarto punto  $D$  di coordinate note, allora è possibile, misurando il terzo angolo  $\gamma = \widehat{CPD}$ , impostare ben quattro problemi di Snellius utilizzando le combinazioni dei quattro vertici  $A, B, C, D$ , presi a tre a tre. Ciò consente di determinare il valore mediato per le coordinate di  $P$  oltre che dei relativi scarti.

#### APPLICAZIONE

**Problema** Per determinare la posizione plano-altimetrica del punto  $P$ , sono stati individuati tre punti  $A, B, C$  con le seguenti coordinate note:

$$\begin{array}{lll} X_A = -2100,00 \text{ m} & X_B = +785,00 \text{ m} & X_C = +2970,00 \text{ m} \\ Y_A = +1450,00 \text{ m} & Y_B = +2398,00 \text{ m} & Y_C = +705,00 \text{ m} \end{array}$$

Si è fatta stazione con un teodolite centesimale destrorso sul punto P e si sono eseguite le seguenti letture al cerchio orizzontale:

$$L_A = 50^{\circ},0000 \quad L_B = 110^{\circ},1852 \quad L_C = 153^{\circ},7778$$

Sul punto C di quota nota  $Q_C = 312,00$  m, e collimando direttamente a terra, si è misurato l'angolo zenitale  $\psi_C = 98^{\circ},6550$  con un'altezza strumentale  $h_p = 1,56$  m. Determinare le coordinate planimetriche del punto P e la quota dello stesso punto, considerando per K e R i seguenti valori medi:  $K = 0,14$  e  $R = 6377$  km.

**Soluzione grafica**

La FIGURA 19 rappresenta la costruzione in scala del problema proposto. Particolarmente efficace può diventare la costruzione grafica utilizzando un programma CAD; in questo caso all'immediatezza dei procedimenti grafici si unisce anche la precisione propria delle procedure numeriche (v. Laboratorio informatico di questa unità).

**Soluzione analitica**

$$\alpha = 110^{\circ},1852 - 50^{\circ},0000 = 60^{\circ},1852$$

$$\beta = 153^{\circ},7778 - 110^{\circ},1852 = 43^{\circ},5926$$

$$(AC) = \arctg\left(\frac{2970 + 2100}{705 - 1450}\right) = 109^{\circ},2882 \quad \overline{AC} = \frac{2970 + 2100}{\sin 109^{\circ},2882} = 5124,444 \text{ m}$$

$$\overline{AR} = \frac{5124,444}{\sin(60^{\circ},1852 + 43^{\circ},5926)} \cdot \sin 60^{\circ},1852 = 4161,833 \text{ m} \quad (\text{triangolo ACR})$$

$$(AR) = 109^{\circ},2882 - 43^{\circ},5926 = 65^{\circ},6956 \quad (RA) = 265^{\circ},6956$$

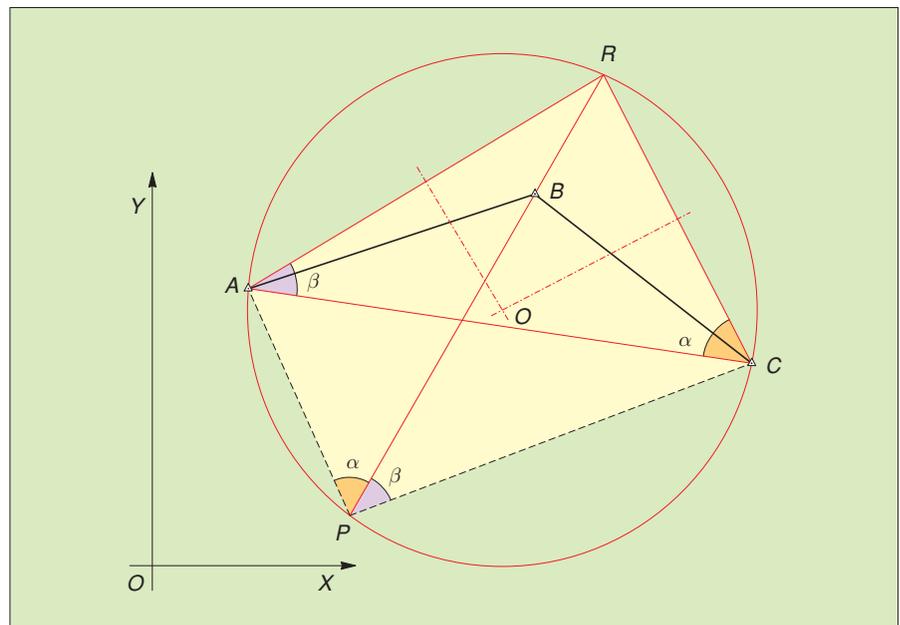
$$X_R = -2100 + 4161,833 \cdot \sin 65^{\circ},6956 = +1472,094 \text{ m}$$

$$Y_R = +1450 + 4161,833 \cdot \cos 65^{\circ},6956 = +3585,650 \text{ m}$$

$$(RB) = (RP) = \arctg\left(\frac{785 - 1472,094}{2398 - 3585,65}\right) = 233^{\circ},3897$$

$$\delta = \widehat{ARP} = 265^{\circ},6956 - 233^{\circ},3897 = 32^{\circ},3058$$

$$\overline{RP} = \frac{4161,833}{\sin 60^{\circ},1852} \cdot \sin(60^{\circ},1852 + 32^{\circ},3058) = 5097,812 \text{ m} \quad (\text{triangolo APR})$$



**FIGURA 19** La soluzione grafica di Collins del problema proposto nell'applicazione.

$$X_p = +1472,094 + 5097,812 \cdot \sin 233^\circ,3897 = -1080,72 \text{ m}$$

$$Y_p = +3585,650 + 5097,812 \cdot \cos 233^\circ,3897 = -826,92 \text{ m}$$

Infine, per calcolare la quota di  $P$ , è necessario avere la distanza  $\overline{PC}$ :

$$(\widehat{PC}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2970 + 1080,72}{705 + 826,92}\right) = 76^\circ,9824$$

$$\overline{PC} = \frac{2970 + 1080,72}{\sin 76^\circ,9824} = 4330,72 \text{ m}$$

Essendo il punto  $C$  collimato a terra è  $l_c = 0$ , dunque:

$$\Delta_{PC} = 4330,72 \cdot \cotg 98^\circ,6550 + 1,56 + \frac{1 - 0,14}{2 \cdot 6377000} 4330,72^2 = 94,334 \text{ m}$$

$$\Delta_{CP} = -94,334 \text{ m}$$

$$Q_p = 312,00 - 94,334 = 217,665 \text{ m}$$

### FAQ

► **Il problema di Snellius-Pothenot ammette sempre una soluzione?**

No, nel caso in cui i quattro punti  $A, B, C, P$  siano disposti su una stessa circonferenza ( $\alpha + \beta + \widehat{B} = 200^\circ$ ) il problema rimane indeterminato.

## ■ Indeterminazione del problema

Per il problema di Snellius-Pothenot esiste un caso di **indeterminazione** in corrispondenza del quale tutte le soluzioni, sia grafiche sia analitiche, non sono in grado di definire il punto incognito  $P$ . Ciò si realizza quando la somma dei tre angoli noti  $\widehat{ABC}$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  è uguale all'**angolo piatto**: ( $\widehat{ABC} + \alpha + \beta = 200^\circ$ ).

In questo caso il cerchio di Collins generato dai punti  $A, C, R$  (► FIGURA 17) passa anche per il punto  $B$ , rendendo impossibile la determinazione del punto  $P$ .

Naturalmente la probabilità che si realizzi esattamente una simile situazione è assai **remota**. Tuttavia, è molto **temibile** e critica la seguente situazione: se la somma dei tre angoli  $\widehat{ABC} + \alpha + \beta$  non si discosta **decisamente** (almeno di  $15^\circ$ - $20^\circ$ ) da  $200^\circ$ , il problema, anche se non più indeterminato, fornisce però soluzioni **imprecise**, perché piccoli errori nella misura degli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  causano significativi errori nelle coordinate di  $P$ .

## 8. Problema di Hansen (doppia intersezione inversa)

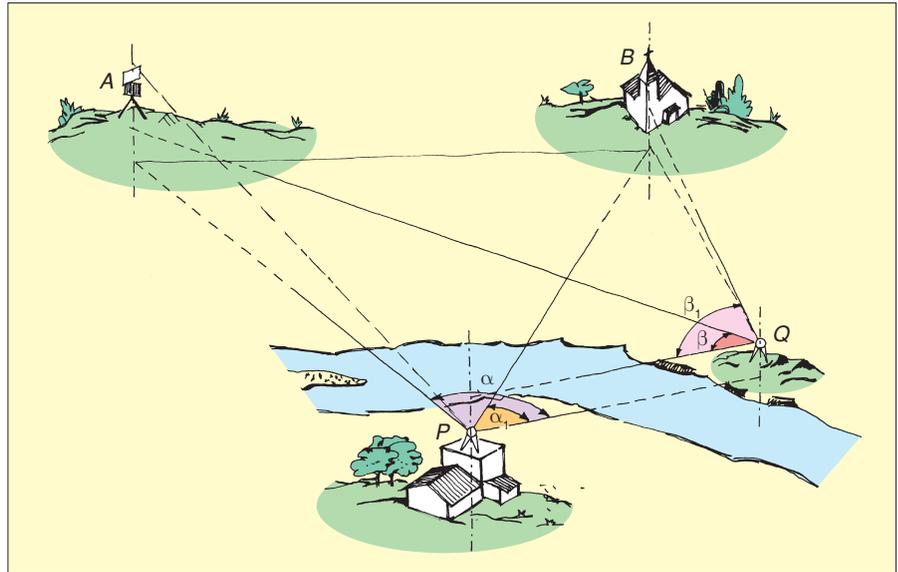
Il problema di Snellius-Pothenot ebbe largo impiego per il fatto che, oltre a richiedere solo misure angolari, prevede **una sola stazione**, per di più sul punto incognito, il che, indubbiamente, rappresenta un vantaggio in numerose situazioni operative.

Può però capitare che **non siano disponibili** i tre punti (almeno) di coordinate note visibili e collimabili contemporaneamente da  $P$ , necessari alla procedura.

Se si riescono a rintracciare solo **due punti**  $A$  e  $B$  di coordinate note, inaccessibili ma visibili e collimabili da  $P$ , è possibile determinare le coordinate di quest'ultimo utilizzando il problema di **Hansen** o della **doppia intersezione inversa**.

Per supplire alla mancanza di un punto noto (rispetto al problema precedente), questo problema prevede l'individuazione di un punto  $Q$  **ausiliario**, scelto arbitrariamente, del quale non è necessario conoscere la posizione, ma che deve essere **visibile** da  $P$  e dal quale devono pure essere **collimabili** i punti noti  $A$  e  $B$  (► FIGURA 20).

**FIGURA 20** Schizzo orientativo relativo al metodo della doppia intersezione inversa per la determinazione del punto  $P$  (problema di Hansen).



Per determinare la posizione di  $P$ , oltre a conoscere le coordinate dei punti  $A$  e  $B$ , è necessario eseguire due stazioni, in  $P$  e  $Q$ , con un teodolite per la **misura** degli angoli orizzontali:  $\widehat{APQ} = \alpha$  e  $\widehat{BPQ} = \alpha_1$  da  $P$ , oltre a  $\widehat{PQA} = \beta$  e  $\widehat{PQB} = \beta_1$  da  $Q$ .

Possiamo sintetizzare il problema col seguente specchietto:

Elementi noti	Elementi misurati	Incognite
$A \equiv (X_A; Y_A)$	$\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$	$P \equiv (X_P; Y_P)$
$B \equiv (X_B; Y_B)$		

L'obiettivo del problema di Hansen è quello di determinare la lunghezza del segmento  $AP$  e dell'angolo  $\widehat{BAP} = \varphi$  (oppure del segmento  $BP$  e dell'angolo  $\widehat{PBA} = \lambda$ ). Con essi sarà poi facile, come si vedrà, determinare le coordinate  $X_P$  e  $Y_P$  di  $P$ .

Anche in questo caso, numerose sono le possibili soluzioni del problema, sia grafiche sia analitiche. Riteniamo conveniente proporre la soluzione analitica del problema di Hansen nota come **metodo della base fittizia**. Questo metodo ci appare il più elegante e, soprattutto, si presta a essere utilizzato anche in altri ambiti.

### ■ Sviluppo col metodo della base fittizia

Conoscendo le coordinate di  $A$  e  $B$  possiamo facilmente calcolare gli azimut  $(AB)$  e  $(BA)$ , oltre alla lunghezza del segmento  $\overline{AB} = a$  (► FIGURA 21):

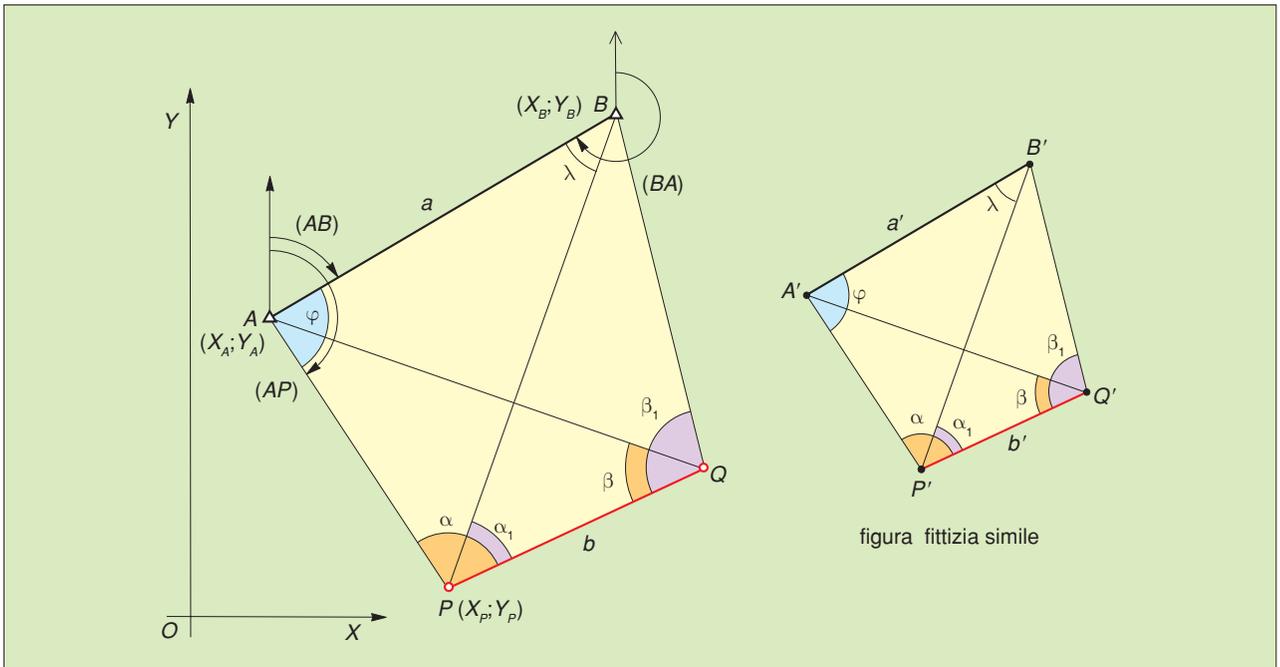
$$(AB) = \arctg\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right) \quad (BA) = (AB) \pm 200^\circ \quad AB = a = \frac{X_B - X_A}{\text{sen}(AB)}$$

Pensiamo ora di assegnare alla lunghezza del segmento  $PQ$  (non misurata e pertanto incognita) un **valore arbitrario** a piacere, che indicheremo con  $b'$  e che supporremo, per esempio, più piccolo del vero. In base a questo valore **fittizio** dato a  $PQ$ , e utilizzando gli stessi angoli misurati in  $P$  e in  $Q$ , possiamo costruire il quadrilatero  $A'B'Q'P'$  **simile** al quadrilatero reale  $ABQP$  (► FIGURA 21), in quanto ne risulteranno uguali, per costruzione, tutti gli angoli.

**FAQ**

► **Quale tributo paga il problema di Hansen, rispetto a quello di Snellius, per il fatto di disporre di soli due punti noti?**

Quello di dover misurare quattro angoli (anziché due) in due distinte stazioni (in  $P$  e in  $Q$ ).



Osserviamo che la figura fittizia  $A'B'Q'P'$  riproduce lo schema geometrico del problema della *distanza inaccessibile*, proposto nel modulo A del primo volume. In essa possiamo riconoscere i triangoli  $A'Q'P'$  e  $P'Q'B'$ , entrambi risolvibili, in ciascuno dei quali si calcolano le lunghezze dei segmenti  $P'A'$  e  $P'B'$ :

$$\overline{A'P'} = b' \cdot \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)} \quad \overline{B'P'} = b' \cdot \frac{\text{sen } \beta_1}{\text{sen}(\alpha_1 + \beta_1)}$$

Il calcolo di questi due lati ci permette di risolvere il triangolo  $P'A'B'$ ; intanto col teorema di Carnot calcoliamo il lato  $\overline{A'B'} = a'$ :

$$\overline{A'B'} = a' = \sqrt{\overline{A'P'}^2 + \overline{B'P'}^2 - 2 \cdot \overline{A'P'} \cdot \overline{B'P'} \cdot \cos(\alpha - \alpha_1)}$$

Quindi, ancora col teorema di Carnot, si possono calcolare i due angoli:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\overline{A'P'}^2 + \overline{A'B'}^2 - \overline{B'P'}^2}{2 \cdot \overline{A'P'} \cdot \overline{A'B'}}\right) \quad \lambda = \arccos\left(\frac{\overline{B'P'}^2 + \overline{A'B'}^2 - \overline{P'A'}^2}{2 \cdot \overline{B'P'} \cdot \overline{A'B'}}\right)$$

Poiché la figura *fittizia* è **simile** alla corrispondente figura *reale*, i rapporti degli elementi lineari **omologhi** delle due figure sono uguali. Conoscendo i lati omologhi  $a$  e  $a'$  in entrambe le figure, possiamo allora determinare il rapporto di similitudine tra le due figure, quindi la distanza  $PQ = b$  nella figura reale:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{da cui:} \quad b = b' \cdot \frac{a}{a'}$$

Allo stesso modo possiamo calcolare la lunghezza dei segmenti  $PA$  e  $PB$  della figura reale:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{A'P'}} = \frac{a}{a'} \quad \text{da cui:} \quad \overline{AP} = \overline{A'P'} = \frac{a}{a'}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{B'P'}} = \frac{a}{a'} \quad \text{da cui:} \quad \overline{BP} = \overline{B'P'} = \frac{a}{a'}$$

**FIGURA 21** Schema geometrico relativo alla soluzione del problema di Hansen con il metodo della base fittizia. Esso si basa sulla formazione di una figura simile a quella assegnata partendo dalla base  $b'$  arbitraria.

**FAQ**

► **Nel problema di Hansen è possibile determinare le coordinate anche del punto ausiliario Q?**

Sì, se è necessario, esse possono essere calcolate con le stesse modalità con cui sono state calcolate quelle del punto P.

Conoscendo  $\overline{AP}$  e l'angolo  $\varphi$ , col quale determinare l'azimut (AP):  $[(AP) = (AB) + \varphi]$ , possiamo calcolare le coordinate di P:

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + \overline{AP} \cdot \text{sen}(AP) \\ Y_P &= Y_A + \overline{AP} \cdot \text{cos}(AP) \end{aligned}$$

Naturalmente, lo stesso risultato, conoscendo BP e l'angolo  $\lambda$ :  $[(BP) = (BA) - \lambda]$ , si poteva ottenere partendo dal punto B.

Come il problema precedente, anche il problema di Hansen è una procedura planimetrica. Tuttavia se dovesse essere nota la **quota** di almeno uno dei due punti noti, per esempio quella  $Q_B$  di B, è possibile determinare anche la quota di P misurando il dislivello  $\Delta_{PB}$ , in genere con una **livellazione trigonometrica**:

$$Q_P = Q_B - \Delta_{PB} = Q_B - \left( \overline{PB} \cotg \varphi_B + \frac{1-K}{2R} \overline{PB}^2 + h_P - l_B \right)$$

È chiaro che occorre misurare l'angolo zenitale  $\varphi_B$  da P su B, ed essendo questo inaccessibile, occorrerà anche conoscere la distanza dal suolo del particolare collimato in B, che costituisce il valore di  $l_B$ . Quando viene collimato il punto a terra tale valore sarà nullo:  $l_B = 0$ .

**APPLICAZIONE**

**Problema** Per determinare la posizione plano-altimetrica del punto P, sono stati individuati due punti A e B con le seguenti coordinate note:

$$\begin{aligned} X_A &= +1995,70 \text{ m} & X_B &= +6710,30 \text{ m} \\ Y_A &= +5550,85 \text{ m} & Y_B &= +6350,74 \text{ m} \end{aligned}$$

Facendo stazione con un teodolite centesimale destrorso prima in P poi sul punto ausiliario Q, si sono misurati i seguenti angoli orizzontali:

$$\begin{aligned} \widehat{APQ} = \alpha &= 121^\circ,3800 & \widehat{BPQ} = \alpha_1 &= 54^\circ,7240 \\ \widehat{PQA} = \beta &= 45^\circ,1740 & \widehat{PQB} = \beta_1 &= 99^\circ,7430 \end{aligned}$$

Da P, durante la collimazione di A con un'altezza strumentale di 1,48 m, si è anche misurato l'angolo zenitale  $\varphi_A = 101^\circ,3455$  in corrispondenza della sommità di un segnale alto 2,50 m dal suolo. Determinare le coordinate planimetriche e la quota del punto P sapendo che quella di A è  $Q_A = 608,00$  m e considerando  $K = 0,13$  e  $R = 6377$  km.

**Soluzione**

$$(AB) = \arctg \left( \frac{6710,30 - 1995,70}{6350,74 - 5550,85} \right) = 89^\circ,3008$$

$$(BA) = 89^\circ,3008 + 200^\circ = 289^\circ,3008$$

$$\overline{AB} = a = \frac{6710,30 - 1995,70}{\text{sen } 89^\circ,3008} = 4781,97 \text{ m}$$

Assumiamo una *figura fittizia* A'P'Q'B' scegliendo arbitrariamente per la distanza P'Q' il valore  $b' = 120$  m:

$$\overline{A'P'} = \frac{120}{\text{sen}(121^\circ,3800 + 45^\circ,1740)} \text{sen } 45^\circ,1740 = 155,888 \text{ m}$$

$$\overline{B'P'} = \frac{120}{\text{sen}(54^\circ,7240 + 99^\circ,7430)} \text{sen } 99^\circ,7430 = 182,983 \text{ m}$$

$$\widehat{A'P'B'} = 121^\circ,3800 - 54^\circ,7240 = 66^\circ,6560$$

$$d' = \sqrt{155,888^2 + 182,983^2 - 2 \cdot 155,888 \cdot 182,983 \cdot \cos 66^\circ,6560} = 171,028 \text{ m}$$

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{182,983}{171,028} \sin 66^\circ,6560\right) = 75^\circ,4344$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{4781,97}{171,028} = 27,960159 \text{ (rapporto di similitudine)}$$

$$\overline{AP} = 155,888 \cdot 27,960159 = 4358,653 \text{ m}$$

$$\overline{BP} = 182,983 \cdot 27,960159 = 5116,234 \text{ m}$$

$$(AP) = 89^\circ,3008 + 75^\circ,4344 = 164^\circ,7352$$

$$X_p = +1995,70 + 4358,653 \cdot \sin 164^\circ,7352 = +4288,52 \text{ m}$$

$$Y_p = +5550,85 + 4358,653 \cdot \cos 164^\circ,7352 = +1843,99 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{PA} &= 4358,653 \cdot \cotg 101^\circ,3455 + 1,48 - 2,50 + \frac{1 - 0,13}{2 \cdot 6377000} 4358,653^2 \\ &= -91,858 \text{ m} \end{aligned}$$

$$Q_p = 608,00 - (-91,858) = 699,858 \text{ m}$$

## 9. La stazione libera (intersezione inversa con distanze)

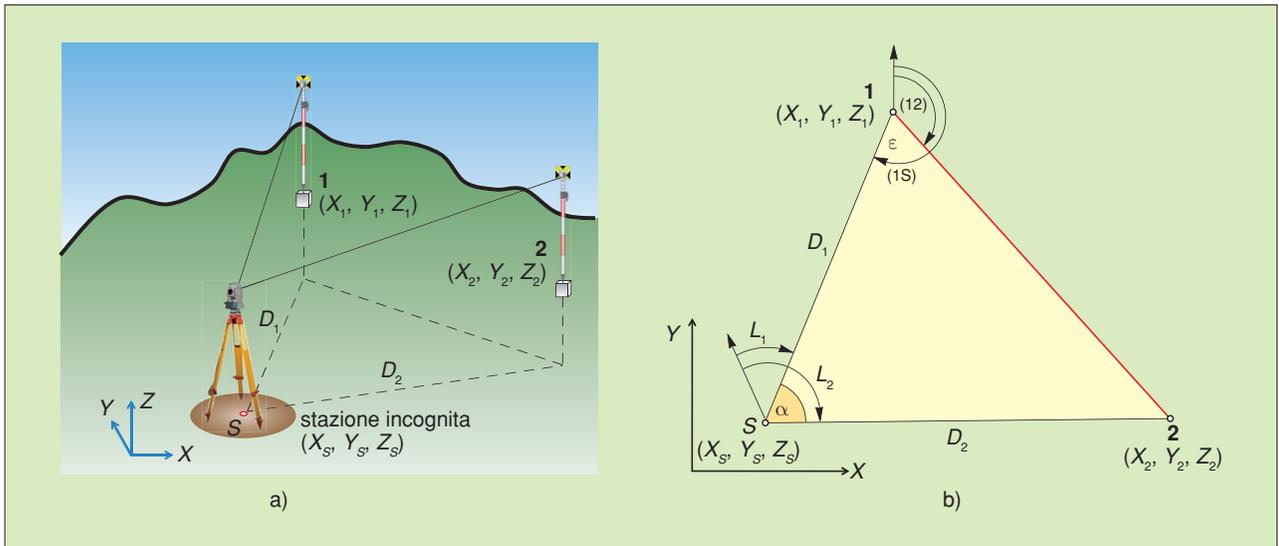
Nella concezione classica, i metodi di rilievo per intersezione visti in precedenza si basano esclusivamente sulle **misure angolari** in quanto, in passato, e in particolare per punti a distanze significative, erano decisamente meno impegnative della **misura delle distanze**.

Attualmente, dopo la comparsa sul mercato delle *stazioni totali* (per non dire dei *ricevitori GPS*), tale postulato è stato riconsiderato, in quanto la misura delle distanze è divenuta una operazione facilmente accessibile da parte degli operatori.

Di conseguenza, anche nei metodi di *intersezione*, sono comparse nuove procedure, che perseguono gli stessi obiettivi delle *intersezioni classiche* viste in precedenza, cioè il calcolo delle **coordinate** di un punto incognito, avendo a disposizione **due, o più punti**, di coordinate note, ma combinando sia **misure angolari** sia **misure di distanze**.

La più nota di queste procedure, in quanto disponibile su tutte le stazioni totali più recenti, è quella conosciuta come «stazione libera» (o con altre denominazioni simili), essa, di fatto, è un'**intersezione inversa** classica, con l'aggiunta anche di misure di **distanze**, e consente di ottenere le coordinate del punto su cui si è collocata la stazione con le seguenti configurazioni di misura:

- **due punti noti:** con misure **angolari** e **distanze** su entrambi i punti noti (► FIGURA 22), che, dunque, devono essere accessibili all'operatore portaprisma (in teoria basterebbe la distanza a un solo punto, ma ciò non consentirebbe alcun controllo);
- **tre o più punti noti:** con sole misure **angolari** (in questo caso si riproduce il problema di Snellius);
- **tre o più punti noti:** sia con misure **angolari** sia con misure di **distanze**; è il caso preferibile, nel quale, oltre alle coordinate incognite *mediate* e all'orientamento della stazione, vengono anche determinati gli *scarti*, che consentono di valutare l'attendibilità delle misure eseguite.



**FIGURA 22** a) Procedura detta della «stazione libera» nella configurazione con due punti di coordinate note. b) Schema planimetrico del problema.

I punti noti possono essere appartenenti a una **rete pubblica** (trigonometrici IGM o catastali), ma anche punti definiti in precedenza nell'ambito dello stesso rilievo; in questo caso, tuttavia, occorre scegliere punti **attendibili** in quanto errori presenti in questi punti si ripercuoterebbero inevitabilmente sulle coordinate del punto di stazione, e successivamente su quelle di tutti i punti rilevati da quest'ultima.

■ **La geometria della stazione libera (con due punti noti)**

Il problema geometrico della stazione libera, nella **configurazione minima** con due soli punti noti (► FIGURA 22), è relativamente semplice; in pratica il software della stazione totale risolve un triangolo noti due lati e l'angolo compreso. In effetti dalla stazione incognita S, collimando i punti noti 1 e 2, vengono effettuate le misure angolari  $L_1$  e  $L_2$  (dunque  $\alpha = L_2 - L_1$ ), le distanze  $D_1$  e  $D_2$  e i dislivelli  $\Delta_{S1}, \Delta_{S2}$ .

Inoltre, essendo anche disponibile la lunghezza del lato 12 (estremi di coordinate note), il problema è *iperdeterminato* e consente di eseguire il **controllo** della procedura, confrontando questo valore con quello corrispondente ottenuto dalle misure eseguite:

$$\left[ \left( \sqrt{D_1^2 + D_2^2 - 2D_1D_2 \cos \alpha} \right) - \left( \frac{X_2 - X_1}{\sin(12)} \right) \right] = \pm \delta \leq T$$

La differenza al primo membro (teoricamente nulla), è diversa da zero per la presenza di *errori di misura*. Affinché le misure siano accettabili tale valore dovrà essere inferiore alla **tolleranza T** assegnata; se ciò non avviene occorre rieseguire le misure o riconsiderare i punti noti utilizzati.

Il calcolo delle **coordinate incognite** di S, dopo aver determinato l'angolo  $\epsilon$  (con il teorema di Carnot), necessario a ottenere l'azimut  $(1S) = (12) + \epsilon$ , viene eseguito con le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} X_S &= X_1 + D_1 \cdot \sin(1S) \\ Y_S &= Y_1 + D_1 \cdot \cos(1S) \\ Z_S &= Z_1 - \Delta_{S1} \end{aligned}$$

I calcoli precedenti possono essere sviluppati manualmente, ma in realtà, nelle stazioni più recenti, vengono eseguiti dal **software applicativo** in dotazione alla stazione (ricordiamo l'unità G2, paragrafo 6), e i risultati sono visualizzati sul display durante la sessione di misura.

Lo stesso software, poi, è in grado di **orientare** correttamente il cerchio orizzontale della stazione imponendo allo stesso cerchio, dopo la **collimazione** a 1 (o a 2), il corretto *azimut* ( $S1$ ) (o ( $S2$ )). A questo punto dalla stazione possono essere eseguite le misure previste nelle operazioni di *rilievo* o di *tracciamento*.

Quando sono disponibili **tre o più** punti noti, situazione sempre consigliabile, l'aspetto teorico **diventa più complesso** (qui non viene trattato), ma ciò consente di determinare le coordinate della stazione in modo **mediato**, coinvolgendo **diverse misure** (dunque con risultati più affidabili) che consentono anche, attraverso i conseguenti **scarti**, di valutare l'attendibilità della procedura.

## 10. Livellazione fondamentale dell'IGM

### ■ La rete di alta precisione

Analogamente a quanto prodotto con le reti di **inquadramento planimetrico** (triangolazioni, intersezioni), l'IGM realizzò, a partire dal 1880, una rete di **inquadramento altimetrico** del territorio costituita da 70 linee livellate che formavano un insieme di 20 poligoni chiusi. Presto però questa rete originaria si mostrò insufficiente per estensione e precisione.

Una nuova rete di inquadramento altimetrico, eseguita con livellazioni di **alta precisione**, ed estesa a tutto il territorio nazionale, è stata realizzata, dal 1951 al 1970, sempre a cura dell'IGM e secondo le norme stabilite dall'*Association Internationale de Géodésie*. Essa è tuttora in fase di controllo, conservazione e rifacimento delle misure su alcune linee livellate.

La rete è costituita da numerose **linee di livellazione principali e secondarie** (► FIGURA 23), lungo le quali sono state determinate le quote di punti (**capisaldi**) opportunamente materializzati con appropriati **segnali** altimetrici. Essa è costituita da 35 poligoni chiusi, i cui perimetri hanno sviluppi compresi tra 400 e 600 km, e da alcune *bretelle* (linee aperte) necessarie al collegamento ai mareografi. La livellazione si sviluppa per quasi 18000 km, lungo le grandi vie di comunicazione nazionali, in modo che su tutto il territorio del paese sono distribuiti migliaia di capisaldi. Le quote assolute dei capisaldi che si trovano nel continente e in Sicilia sono riferite al **mareografo** di Genova, mentre le quote di quelli della Sardegna sono riferite al mareografo di Cagliari.

Le **quote assolute dei capisaldi** sono state determinate mediante **livellazioni geometriche composte dal mezzo**, eseguite in andata e ritorno su tratte frazionate di 10-20 km, con strumentazione costituita da livelli di alta precisione, provvisti di lamina a facce piane e parallele, e stadie di invar graduate al mezzo centimetro. L'errore medio probabile è risultato di  $\pm 0,70$  mm/km.

La lunghezza delle battute è stata limitata a 40 m nelle livellazioni di alta precisione e a 55 m nelle livellazioni di precisione semplice.

### ■ La materializzazione dei capisaldi

I segnali che materializzano i **capisaldi** possono essere **orizzontali** o **verticali** (► FIGURA 24).

I capisaldi orizzontali generalmente sono costituiti da *pozzetti interrati* protetti da chiusini apribili in ghisa, quelli verticali sono costituiti da piccole *mensole metalliche* murate sui paramenti esterni dei fabbricati.

#### FAQ

##### ► Che cos'è la livellazione fondamentale italiana?

È una livellazione di inquadramento di alta precisione che copre tutto il territorio nazionale, realizzata dall'IGM dal 1950 al 1970. Essa è costituita da numerose *linee di livellazione* sviluppate su poligoni chiusi di lunghezza 400-500 km, seguendo il percorso delle principali vie di comunicazione. Le *quote dei capisaldi* sono state determinate mediante livellazioni geometriche *composte dal mezzo*, eseguite in andata e ritorno su tratte frazionate di 10-20 km.

#### FAQ

##### ► Quali precisioni sono state raggiunte nella livellazione fondamentale italiana?

È stato raggiunto un errore medio probabile di  $\pm 0,70$  mm/km.



**FIGURA 23** Schema della rete di livellazione di alta precisione realizzata dall'IGM.



**FIGURA 24** Esempi di segnali per capisaldi di livellazione: a) di tipo verticale murato a parete (il punto C costituisce il riferimento del caposaldo), b) di tipo orizzontale protetto da chiusino in ghisa.

Nello stesso caposaldo possono essere presenti entrambi i tipi di contrassegno. Quelli orizzontali (abbreviazione: Cso) possono essere di quattro categorie:

- **I categoria**, o **capisaldi nodali**, posti nell'incontro di più linee di livellazione;
- **II categoria**, o **capisaldi fondamentali**, ubicati ogni 25 km di linea;
- **III categoria**, o **capisaldi principali**, due ogni 5 km di linea;
- **IV categoria**, o **capisaldi di linea**, ubicati ogni chilometro di linea.

I contrassegni verticali (Csv) non hanno categoria e sono realizzati con diverse forme; spesso si tratta di centrini metallici costituiti da un manicotto, che deve essere murato: il manicotto termina con una superficie torica, che rimane a vista e la cui parte superiore costituisce il caposaldo (► FIGURA 24a).

Tutti i dati relativi a ogni caposaldo sono riportati su appositi **cataloghi** pubblicati dall'IGM, dunque disponibili a tutti i cittadini. In effetti, per ogni caposaldo, è stata redatta una **monografia** contenente le informazioni connesse al segnale (► FIGURA 25).

#### FAQ

##### ► Esistono diversi tipi di segnali per capisaldi di quota?

Sì, i segnali che materializzano i **capisaldi** possono essere **orizzontali**, solitamente costituiti da pozzetti interrati protetti da chiusini in ghisa, o **verticali**, costituiti da piccole mensole metalliche da murare sulle pareti esterne dei fabbricati.

Istituto Geografico Militare		mod. 282/G-AR	
Comando Regione Militare Nord Ovest - Torino			
Staz. C.C. Bormio			
Comune Valle di Sotto		(Prov. Sondrio)	
Proprietario Autorità Ecclesiastica			
Quota		Coordinate Gauss-Boaga	
H = 1123,5311		N	
Riferita a: cso C		E	
		Coordinate geografiche	
		φ	
		λ	
		46°25'50" - 2°05'52"	
MONOGRAFIA (1952)		Pianta o Prospettivo	
043559 CEPINA - Chiesetta S. Rocco		Iv-III-008-56/42	
● A 1123	alla base della facciata, spigolo di sinistra		
□ 1126	sulla facciata suddetta, in corrispondenza del cso		
■ 1125	sulla facciata suddetta, a destra della porta d'ingresso		
Nome		Cl.	Cat. F2 N.º
CEPINA - Chiesetta S. Rocco		Iv	III 008 ● 56/42

**FIGURA 25** Esempio di scheda descrittiva di un caposaldo della livellazione fondamentale dell'IGM.

# Riassumendo



**Rilievo topografico:** è l'insieme delle misure eseguite sul terreno e delle procedure attuate a tavolino, occorrenti per realizzare la rappresentazione grafica e numerica di una porzione di territorio.

- Le procedure operative di misura sul terreno vengono chiamate *operazioni di campagna*.
- La redazione dei disegni e lo sviluppo dei calcoli viene chiamata *restituzione del rilievo*.

**Le operazioni di campagna** vengono sviluppate *dal generale al particolare*. Tale principio si concretizza in due fasi distinte delle operazioni, dette di *inquadramento* e di *rilievo dei dettagli* topografici.

- Il lavoro di *inquadramento* consiste nella copertura dell'intera zona di terreno da rilevare, con una serie relativamente limitata di punti, ma opportunamente scelti, dei quali occorrerà determinare con cura le posizioni. Essi, nel loro insieme, costituiscono la rete di base e di appoggio per la successiva definizione dei dettagli del terreno.
- Dai punti di inquadramento si parte poi per rilevare i *particolari topografici* del terreno. Questi sono in numero decisamente superiore a quelli di inquadramento, ma possono essere rilevati con minor precisione. Essi andranno riportati sul disegno per realizzare la rappresentazione grafica del terreno.

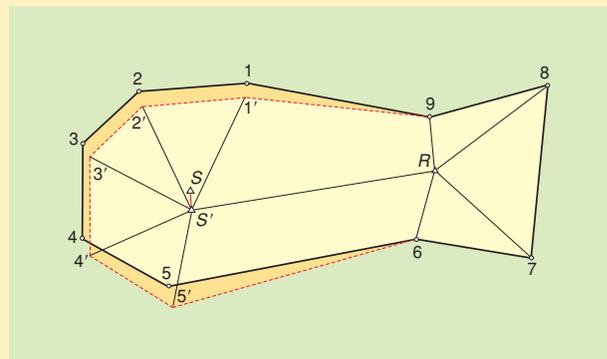
**L'inquadramento del rilievo** può essere realizzato con diversi schemi. In relazione alle modalità con le quali vengono tra loro collegati i punti di inquadramento, si può formulare la seguente classificazione:

- triangolazioni;
- intersezioni;
- poligonazioni;
- GPS.

Questi metodi non sono alternativi, ma al contrario sono complementari. In effetti per il rilievo delle grandi estensioni di territorio possono anche essere utilizzati tutti, sfruttando di ciascuno le relative particolarità.

Per estensioni limitate, invece, si impiega uno solo dei metodi precedenti, scelto in base alle esigenze del rilievo.

**Gli errori che si commettono nelle misure** nella fase di *inquadramento* sono assai più temibili di quelli commessi nel rilievo dei *dettagli topografici*. Quindi, mentre si possono tollerare incertezze nella determinazione dei punti di dettaglio, questa incertezza non deve sussistere nella determinazione dei punti di inquadramento. Questo perché nei punti di dettaglio gli effetti degli errori rimangono *localizzati* sul punto stesso, mentre nei punti di inquadramento gli effetti degli errori si propagano a tutti i punti rilevati partendo da quel punto.

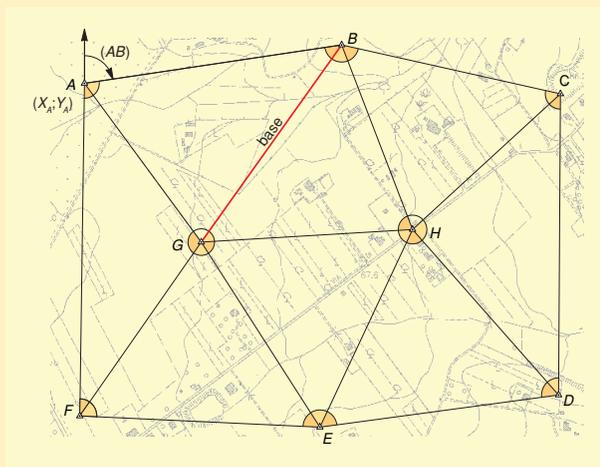


**Ridondanza delle misure:** nelle reti di inquadramento, per migliorare le precisioni nella determinazione dei punti, è necessario eseguire un numero di misure superiori allo stretto necessario. Questo consente il *controllo* del lavoro eseguito e la *compensazione* degli errori.

**La compensazione delle misure** è la tecnica che consente la redistribuzione degli errori, con segno invertito e con appropriate regole, sulle grandezze che li hanno generati.

- Con la compensazione non si ottiene tanto un incremento della precisione delle *singole misure* interessate, quanto un miglioramento *globale* del rilievo.

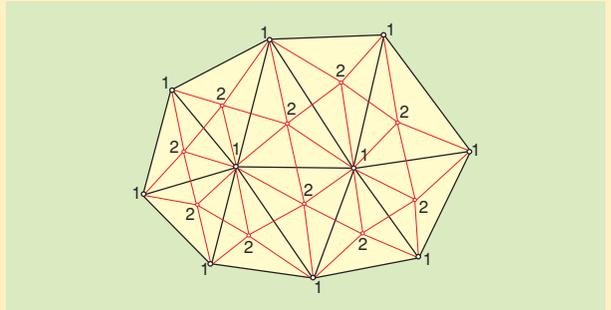
**Le triangolazioni** sono uno schema in cui i punti di inquadramento vengono idealmente collegati a due a due in modo da ottenere una serie di triangoli (vicini a essere equilateri) aventi via via un lato in comune. Viene poi misurato almeno un lato di questi triangoli, detto *base* della triangolazione, e tutti gli *angoli interni* di ciascun triangolo.



- Le triangolazioni vengono utilizzate nei rilievi di medie e grandi estensioni di territorio. Esse non forniscono la densità di punti necessaria, pertanto verranno impiegati altri metodi (intersezioni, poligonali) per integrare e raffittire il numero dei punti di inquadramento.
- Il calcolo di una triangolazione inizia con il calcolo sequenziale dei lati di ciascun triangolo applicando il teorema dei seni, partendo dal triangolo che contiene la base. Successivamente vengono calcolati gli azimut dei lati e infine le coordinate dei vertici.
- Le triangolazioni sono procedure complicate da realizzare, sia per la laboriosità della misura diretta delle *basi*, sia per l'individuazione dei vertici che, richiedendo una grande *visibilità* a  $360^\circ$ , si trovano in genere in scomode posizioni *dominanti*.

**La propagazione degli errori:** in una triangolazione, man mano che si procede con il calcolo lungo il *percorso ideale*, che dalla *base* porta all'ultimo *lato della triangolazione*, passando per tutti i triangoli intermedi, la precisione con la quale si definisce la lunghezza dei lati *diminuisce* progressivamente per l'effetto dell'accumulo degli errori. È evidente che, più numerosi sono i triangoli intermedi, maggiore sarà l'entità del *degrado* della precisione.

- Per limitare la propagazione degli errori si possono misurare più basi, allo scopo di ridurre i percorsi ideali che si devono compiere da ciascuna di esse.
- Un'altra tecnica per limitare la propagazione degli errori è quella di distribuire i punti su *più livelli* chiamati ordini. Il I ordine riguarda tutta l'area con il minor numero di triangoli possibile; il II ordine e quelli successivi sono rigidamente collegati col I e via via aumentano il numero dei punti di inquadramento fino a raggiungere la densità desiderata.



**La triangolazione italiana dell'IGM:** a partire dalla seconda metà dell'Ottocento l'IGM ha realizzato una rete di inquadramento per l'appoggio al rilievo di dettaglio finalizzato a rappresentare graficamente l'intero territorio nazionale (Carta d'Italia in scala 1:100.000). Questa rete è essenzialmente costituita da una triangolazione a rete strutturata su 3 ordini di punti, raffittiti da un IV ordine realizzato con intersezioni. Particolarmente impegnativa è stata la realizzazione del livello di I ordine, costituito da circa 300 punti distribuiti sull'intero paese, con la misura di 8 basi.

- L'IGM pubblica attualmente numerosi elaborati; tra questi segnaliamo i cataloghi dei punti trigonometrici che, raggruppati per ciascuno dei 284 fogli della Carta d'Italia, riportano la descrizione dei segnali e delle coordinate dei vertici.

Comando Regione Militare Tosco-Emiliana, Firenze									
Staz. C. C. Parma									
Comune Parma	(Prov. Parma)								
Proprietario									
(1958) Campanile della chiesa. Asse geometrico del campanile.									
MIDVOSAFIA									
Coordinate geografiche									
$\varphi$	$\omega$								
44°48'05"954	2°05'05"870								
Coordinate Gauss - Boaga									
N	E								
4 961 918,47	1 608 145,91								
Quota al PP H = 70,85									
PP = Parapetto finestroni.									
<table border="1"> <tr> <td>TRIG. Nome</td> <td>Ord</td> <td>F#</td> <td>N#</td> </tr> <tr> <td>CERTOSA</td> <td>III</td> <td>073</td> <td>044</td> </tr> </table>		TRIG. Nome	Ord	F#	N#	CERTOSA	III	073	044
TRIG. Nome	Ord	F#	N#						
CERTOSA	III	073	044						

**Le intersezioni:** sono procedure operative necessarie per determinare la posizione di punti isolati, dunque non collegati tra loro, eseguendo unicamente *misure angolari*. Il nome deriva dal fatto che graficamente esse permettono di stabilire la posizione incognita dei punti interessati tramite l'intersezione grafica di due o più semirette uscenti da *punti noti*.

- Classicamente le intersezioni vengono utilizzate come metodo di raffittimento finale per rilievi da rappresentare a piccola scala (per esempio 1:25 000 ÷ 1:100 000).
- Talvolta questi metodi vengono utilizzati per determinare la posizione di punti al fine di *orientare* una determinata struttura topografica.

**Le intersezioni dirette:** il punto incognito viene determinato partendo da *due punti* di coordinate note. Possono essere distinte in *intersezioni in avanti* e *intersezioni laterali o miste*. Entrambe presentano uno schema geometrico costituito da un semplice triangolo in cui un lato presenta gli estremi di coordinate note e due angoli misurati. Si tratta quindi di una soluzione numerica elementare. Tuttavia per entrambi gli angoli misurati (intersezione in avanti), o almeno per uno (intersezione laterale), è necessario eseguire la stazione su punti di coordinate note. Spesso ciò non è possibile, costringendo a eseguire laboriose stazioni fuori centro.

- In definitiva le intersezioni dirette presentano calcoli facili e brevi, ma richiedono impegnative sessioni di misura in campagna.

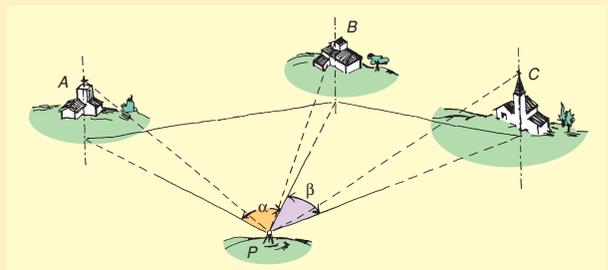
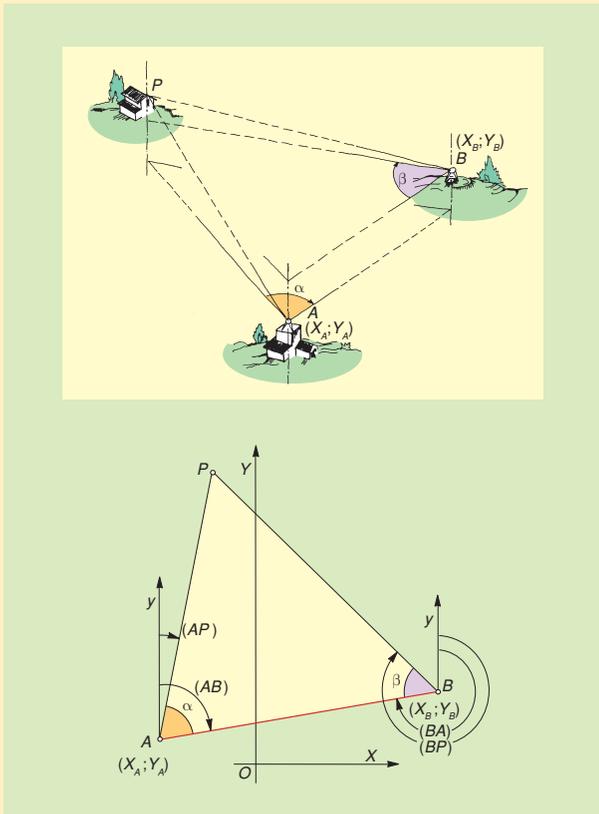
**L'intersezione in avanti** viene usata per determinare le coordinate di un punto *P* isolato ma visibile da due punti *A* e *B* di coordinate note, che a loro volta devono essere visibili reciprocamente. L'intersezione in avanti viene usata in genere quando il punto isolato *P* da determinare è *inaccessibile*. La procedura prevede la misura degli angoli  $\widehat{PAB} = \alpha$  e  $\widehat{PBA} = \beta$ .

Elementi noti	Elementi misurati	Incognite
$A \equiv (X_A; Y_A)$	$\alpha, \beta$	$P \equiv (X_P; Y_P)$
$B \equiv (X_B; Y_B)$		

**Le intersezioni inverse:** il punto incognito viene determinato partendo da *due o da tre punti* di coordinate note. Possono essere classificate in due metodi denominati *problema di Snellius-Pothenot* e *problema di Hansen*. Nel primo problema sono necessari tre punti di coordinate note, nel secondo soltanto due. Entrambe le procedure prevedono la misura di angoli dai punti incogniti, che, dunque, devono essere accessibili. In questo modo la probabilità di dover eseguire delle stazioni fuori centro è ridottissima.

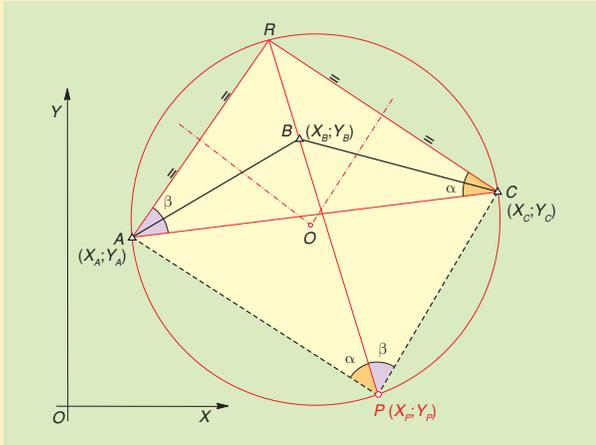
- In definitiva le intersezioni indirette sono relativamente semplici da eseguire in campagna, tuttavia richiedono una procedura numerica più complessa rispetto alle intersezioni dirette.

**Il problema di Snellius-Pothenot** prevede lo stazionamento del goniometro solo sul punto *P* incognito, dal quale, però, devono essere visibili almeno *tre punti* *A*, *B*, *C* di coordinate note, per consentire la misura dei due angoli orizzontali  $\alpha$  e  $\beta$  compresi tra le tre direzioni che escono da *P* e che passano per gli stessi punti noti.

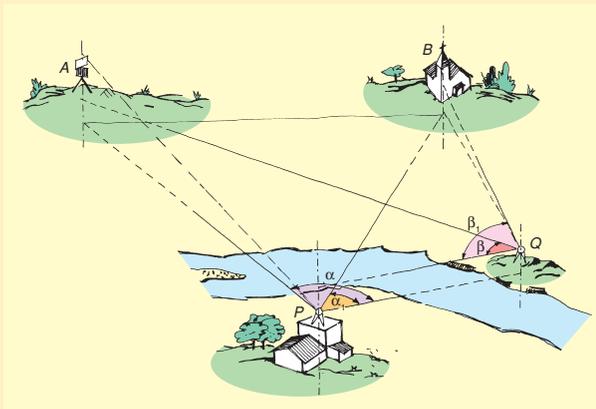


Elementi noti	Elementi misurati	Incognite
$A \equiv (X_A; Y_A)$	$\alpha, \beta$	$P \equiv (X_P; Y_P)$
$B \equiv (X_B; Y_B)$		
$C \equiv (X_C; Y_C)$		

- Il problema prevede numerose soluzioni analitiche e grafiche, tra queste particolarmente snella e rapida è quella proposta da J. Collins, basata sulla individuazione di un punto ausiliario  $R$  e sulla costruzione di un cerchio passante per  $A$ ,  $C$  e  $R$ , su cui si trova anche il punto  $P$  cercato.



**Il problema di Hansen** prevede la conoscenza di *due* punti noti  $A, B$ . È poi necessario lo stazionamento del goniometro sul punto incognito  $P$  e su un punto ausiliario  $Q$  scelto arbitrariamente. Devono essere misurati gli angoli:  $\widehat{APQ} = \alpha$  e  $\widehat{BPQ} = \alpha_1$  da  $P$  e  $\widehat{PQA} = \beta$  e  $\widehat{PQB} = \beta_1$  da  $Q$ .

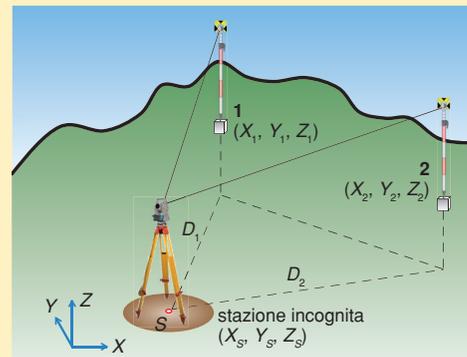


Elementi noti	Elementi misurati	Incognite
$A \equiv (X_A; Y_A)$	$\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$	$P \equiv (X_P; Y_P)$
$B \equiv (X_B; Y_B)$		

- Questo problema può essere risolto assegnando al segmento  $PQ$ , detto *base*, un valore arbitrario. Utilizzando questo valore fittizio dato a  $PQ$  e gli angoli misurati in  $P$  e in  $Q$ , possiamo costruire il quadrilatero

$A'B'Q'P'$ , simile al quadrilatero reale  $ABQP$  in quanto risulteranno uguali, per costruzione, tutti gli angoli. La risoluzione di questo quadrilatero porta alla soluzione del problema.

**La stazione libera.** Si tratta di una particolare *intersezione inversa*, utilizzata con le stazioni totali, nella quale, oltre alle *misure angolari* (le sole coinvolte nell'intersezione inversa classica), vengono utilizzate anche misure di *distanze*, e che consente di ottenere le *coordinate* del punto su cui si è collocata la stazione totale. La procedura richiede la presenza di *almeno due* punti di coordinate note; con un numero maggiore di punti noti le coordinate incognite possono essere calcolate in diversi modi, consentendo, attraverso l'adozione della loro media, di migliorare l'attendibilità della procedura.



**Una rete di inquadramento altimetrico**, estesa a tutto il territorio nazionale, è stata realizzata a cura dell'IGM dal 1951 al 1970. Per questo lavoro sono state utilizzate livellazioni di alta precisione, eseguite in corrispondenza di numerose *linee di livellazione* classificate in *principali* e *secondarie*, lungo le quali sono state determinate le quote di punti (*capisaldi*) materializzati con *segnali* altimetrici. Essa è essenzialmente costituita da 35 poligoni chiusi, i cui perimetri hanno sviluppi compresi tra 400 e 600 km, che si snodano lungo le grandi vie di comunicazione.

- Le quote dei capisaldi che si trovano nel continente e in Sicilia sono riferite al mareografo di Genova, mentre le quote di quelli della Sardegna sono riferite al mareografo di Cagliari.
- La lunghezza delle battute è stata limitata tra i 40 e i 55 m. L'errore medio probabile commesso è risultato di circa  $\pm 0,70$  mm per km di linea livellata.

**I segnali** utilizzati per materializzare i *capisaldi* di quota possono essere *orizzontali*, in genere costituiti da pozzetti interrati protetti da chiusini apribili in ghisa, o *verticali*, costituiti da piccole mensole metalliche da murare sui paramenti esterni dei fabbricati.

# AutoCAD

## Sviluppo del problema di Snellius-Pothenot

### DI COSA CI OCCUPIAMO

In questa esercitazione svilupperemo la costruzione grafica di Collins di uno dei più classici problemi della topografica: il problema di Snellius-Pothenot, la cui procedura è stata illustrata nella parte teorica di questa unità.

Il problema di *Snellius-Pothenot* costituisce uno dei più noti problemi della topografia classica; esso si propone di determinare le coordinate di un punto  $P$ , incognito, ma accessibile, quando da esso siano visibili tre punti  $A, B, C$  di coordinate note, sotto gli angoli misurati  $\widehat{APB} = \alpha$  e  $\widehat{BPC} = \beta$ . Per sviluppare questa esercitazione faremo riferimento al seguente problema pratico.

### Problema

Si devono calcolare le coordinate cartesiane di un punto  $P$ , dal quale si vedono i trigonometrici  $A, B, C$ , di coordinate note (► FIGURA A):

$$X_A = +419,023 \text{ m} \quad X_B = +486,811 \text{ m} \quad X_C = +344,650 \text{ m}$$

$$Y_A = +494,908 \text{ m} \quad Y_B = +291,606 \text{ m} \quad Y_C = +74,988 \text{ m}$$

In  $P$ , con un teodolite centesimale, si sono misurati gli angoli:

$$\alpha = \widehat{APB} = 44^\circ,9198 \quad \beta = \widehat{BPC} = 47^\circ,4725$$

Calcolare per via grafica le coordinate del punto incognito  $P$  che si trova alla destra di  $AB$ .  
(Dati contenuti nel tema della seconda prova scritta proposto agli Esami di Stato nel giugno 2004.)

### 1. Preparazione del foglio virtuale

Iniziamo l'esercitazione con alcune operazioni da considerare preliminari e preparatorie al disegno vero e proprio. Come già detto in altre analoghe esercitazioni, queste operazioni riguardano i seguenti aspetti:

- creazione di un **nuovo** foglio per il disegno;
- **estensioni** del foglio;
- **visualizzazione** dell'intero foglio;
- personalizzazione delle **unità di misura**.

#### • Creazione di un nuovo disegno: comando nuovo (new)

È noto che per creare un **nuovo foglio** per il disegno, dopo essere entrati nell'ambiente AutoCAD, sono disponibili quattro possibilità; una di queste è la seguente:

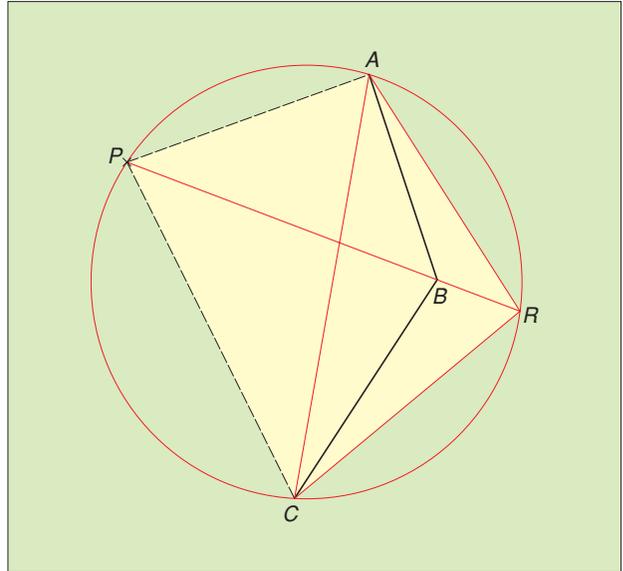


FIGURA A La soluzione grafica di Collins del problema proposto nell'applicazione.

Comando: nuovo (new) ↴  
(selezionare un **disegno modello** tra quelli proposti nella finestra di dialogo: es. acad.dwt)



Il comando **nuovo** richiede la selezione di un **disegno modello**; immaginando di non disporre di un **modello** preparato in precedenza, per il nostro disegno sceglieremo il modello generico **acad.dwt**, che è possibile selezionare dalla **finestra di dialogo** che appare dopo avere attivato il comando. Esso contiene anche alcune **impostazioni** iniziali predefinite (*dimensioni del foglio, unità di misura, layer* ecc.) che successivamente modificheremo adattandole alle esigenze di un contesto topografico.

#### • Estensioni del foglio: comando limiti (limits)

Per impostare le dimensioni rettangolari del foglio virtuale sul quale verrà poi creato il disegno è necessario **valutare approssimativamente** le dimensioni dello spazio rettangolare necessario per contenere il disegno (nel nostro caso, valutando i dati del problema: 600 m × 600 m), quindi occorre lanciare da tastiera il comando **limiti** (oppure utilizzando **Limiti disegno** del menu a tendina **Formato**). Nella **finestra di comando** collocata nella parte inferiore dello schermo (o nel **riquadro di dialogo** prossimo al cursore se è attivata la modalità **DIN: inserimento dinamico**) scorreranno le seguenti informazioni:

## LABORATORIO INFORMATICO

Comando: **limiti** (limits) ↵  
 Ripristino dell'impostazione dei limiti dello Spazio modello:  
 Specificare angolo inferiore sinistro  
 o [ON/OFF] <0.0000,0.0000>: ↵  
 Specificare angolo superiore destro  
 <420.0000,297.0000>: **600,600** ↵

Al comando **limiti** seguono due linee con le *opzioni* connesse allo stesso comando. La prima richiede le coordinate dell'**angolo inferiore sinistro** del rettangolo che rappresenta le dimensioni del foglio; con il **tasto invio** (↵) si accettano le coordinate proposte dal sistema (0.000,0.000).

Dopo aver definito l'angolo inferiore sinistro, compare la seconda riga, che richiede l'immissione delle coordinate dell'**angolo superiore destro** del foglio virtuale. Se digitiamo 600,600 (cioè  $X = 600$  e  $Y = 600$ ), si avrà un foglio di lavoro le cui dimensioni sono 600 unità (nel nostro caso metri) di disegno in orizzontale e 600 unità di disegno in verticale.

Tali numeri, tuttavia, non indicano una unità di misura predefinita, ma solo i rapporti di misura esistenti tra le varie entità che saranno disegnate; sarà poi in fase di formazione dei **layout** di **stampa** che occorrerà ricordare a cosa corrisponde l'unità di disegno utilizzata.

- **Visualizzazione di tutto il foglio: comando zoom (zoom)**

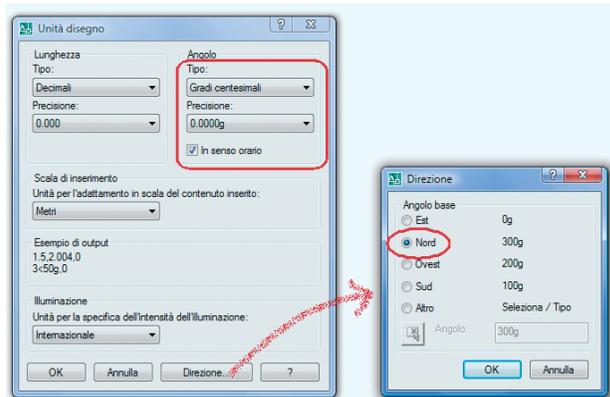
Il comando **zoom** permette, tra l'altro, di visualizzare sullo schermo tutto lo spazio definito in precedenza con il comando **limiti**. Nella **finestra di comando** scorreranno le seguenti righe:

Comando: **zoom** (zoom) ↵ Icona   
 Specificare un angolo della finestra,  
 digitare un fattore di scala (nX o nXP)  
 o [Tutto/Centrato/Dinamico/Estensioni/  
 Precedente/scAla/Finestra/Oggetto]  
 <tempo reale>: **T** ↵  
 Rigenerazione modello in corso

L'opzione **T** (Tutto) del comando **zoom** consente di visualizzare l'intero spazio, dimensionato nella fase precedente, sullo schermo (allo stato attuale del disegno, questo comando non produrrà effetti visibili direttamente).

- **Personalizzazione delle unità di misura: comando unita (units)**

La nostra disciplina fa riferimento a una modalità di trattare gli **angoli** che differisce da quella usata da AutoCAD. In effetti, in topografia, è opportuno che l'*origine degli angoli* coincida con l'asse delle **ordinate** e che il senso positivo sia quello **orario** (in matematica l'origine della misura degli angoli si trova sull'asse delle *ascisse* e il senso positivo è quello *antiorario*). Inoltre il sistema di misura più fre-



**FIGURA B** Finestre di dialogo per la personalizzazione delle unità di misura utilizzate per riportare gli *angoli*.

quentemente usato è il sistema **centesimale**, e non quello *decimale*.

Tutte queste informazioni, oltre a quelle relative al **numero di cifre decimali** da utilizzare, vengono fornite al sistema dal comando **unita** digitato da tastiera nella *finestra di comando*, oppure, dallo stesso comando, ma selezionato dal menu a tendina **Formato**. Esso prevede due *finestre di dialogo* nelle quali stabilire le caratteristiche del **sistema di misura** che si vuole adottare. Nel nostro caso le indicazioni dovranno essere quelle visualizzate ed evidenziate nella ► **FIGURA B**.

## 2. Inserimento dei punti A, B, C di coordinate note

I tre punti di coordinate note del problema possono essere riportati sul disegno a mezzo del comando **punto**. Affinché tali punti siano meglio individuabili sullo schermo, è opportuno adottare un simbolo il cui aspetto e le cui dimensioni siano adeguate.

Il sistema AutoCAD rende disponibili 20 **simboli** grafici (numerati da 0 a 19), ciascuno dei quali può essere poi dimensionato, da utilizzare nell'ambito del comando **punto**. La scelta e la dimensione del simbolo da utilizzare per l'inserimento dei punti nel disegno, può avvenire nella *finestra di dialogo* che compare attivando il comando **Stile punto...** del menu a tendina **Formato** nella barra dei menu, oppure modificando con la *tastiera* i valori delle due **variabili di sistema** **pdmode** e **psdsize** come riportato in seguito.

Tra questi simboli, per la nostra esercitazione, viene scelto quello a forma di X, a cui corrisponde il numero 3. Nella stessa finestra di dialogo è possibile assegnare un valore per la **dimensione** di questi simboli; nel nostro caso adotteremo il valore **assoluto** di 7 unità di disegno.

Comando: **pdmode** (pdmode) ↵  
 Nuovo valore per PDMODE <0>: **3** ↵  
 Rigenerazione modello in corso. ►

LABORATORIO INFORMATICO

Comando: **pdsi** (pdsi) ↵  
 Nuovo valore per PDSIZE <0>: **7** ↵  
 Rigenerazione modello in corso.  
 Comando:

Ripetendo per tre volte il comando **punto** vengono inseriti nel disegno i punti che corrispondono ad *A*, *B* e *C*. Con esso viene posizionato sul foglio virtuale del disegno, per ciascun punto, il simbolo selezionato in precedenza, utilizzando le coordinate cartesiane riportate nel testo del problema:

Comando: **punto** (point) ↵   
 Modalità del punto corrente:  
 pdmode=3 pdsi=7  
 Specificare un punto: **419.023,494.908** ↵  
 (punto A)  
 Comando: ↵  
 Modalità del punto corrente:  
 pdmode=3 pdsi=7  
 Specificare un punto: **486.811,291.606** ↵  
 (punto B)  
 Comando: ↵  
 Modalità del punto corrente:  
 pdmode=3 pdsi=7  
 Specificare un punto: **344.650,74.988** ↵  
 (punto C)  
 Comando:

• **Collegamento dei punti A, B, C**

Possiamo ora costruire le linee che collegano a due a due i tre punti introdotti. Per questa operazione è possibile utilizzare il comando **linea**, il quale richiede l'immissione delle **coordinate cartesiane** dei **punti estremi** oppure, come nel nostro caso, la selezione degli estremi direttamente sul disegno. Per la selezione precisa dei punti ricorriamo alla modalità **osnap** per la «cattura» degli oggetti sul disegno. Gli oggetti da catturare, nel nostro caso, sono gli oggetti **punto** visualizzati col simbolo X e la modalità di **osnap** da usare sarà: **Nodo**. Tuttavia cogliamo l'occasione per attivare anche la modalità di cattura **Intersezione** che ci servirà in seguito.

Comando: **osnap** (osnap) ↵   
 (Spuntare le scelte **Nodo** e **Intersezione** nella finestra di dialogo che appare a video)  
 Comando:

In questo modo le modalità di cattura selezionate hanno effetto **permanente**, dunque faranno sentire i relativi effetti fintanto che non vengono disabilitate.

Il comando **osnap** non provoca nessun cambiamento al disegno; tuttavia, quando successivamente si richiama il

comando **linea**, insieme al cursore apparirà un piccolo quadratino chiamato **mirino**, col quale è possibile la **cattura** esatta dei punti introdotti quando essi appariranno, anche solo in parte, all'interno di questo quadratino. Dunque il tracciamento dei tre segmenti *AB*, *BC* e *CA* potrà avvenire nel modo seguente:

Comando: **linea** (line) ↵   
 Specificare primo punto:  
 (posizionare il mirino sul simbolo del punto A e cliccare il tasto sinistro del mouse)  
 Specificare punto successivo o [Annulla]:  
 (posizionare il mirino sul simbolo del punto B e cliccare)  
 Specificare punto successivo o [Annulla]:  
 (posizionare il mirino sul simbolo del punto C e cliccare)  
 Specificare punto successivo  
 o [Chiudi/Annulla]: **C** (segmento CA)  
 Comando:

Occorre poi considerare che il segmento *AC* rappresenta di fatto una linea di costruzione, e quindi, è opportuno che esso venga rappresentato con un tipo di tratto diverso da quello continuo usato i segmenti *AB* e *BC*. Possiamo, per esempio, rappresentare il segmento *AC* con una linea **tratteggiata** di colore **rosso** ricorrendo al comando di **modifica** degli oggetti **cambia** (oppure richiamando la tavolozza **Proprietà** con l'apposita icona presente nella **barra degli strumenti** o, ancora, con la combinazione di tasti **Ctrl+1**) nel seguente modo:

Comando: **cambia** (change) ↵  
 Selezionare oggetti: (selezionare la linea AC)  
 trovato(i) 1 totale  
 Selezionare oggetti: ↵ (invio per ultimare la selezione)  
 Specificare punto di modifica  
 o [Proprietà]: **P** ↵  
 Digitare la proprietà da modificare  
 [Colore/Elev/Layer/Tipolinea/Scalatl/  
 SPesslin/Altezza/Materiale/annotatiVo]: **T** ↵  
 (per modificare il tipo della linea)  
 Digitare nome del nuovo tipo di linea  
 <DaLayer>: **TRATTEGGIATA** ↵  
 Digitare la proprietà da modificare  
 [Colore/Elev/Layer/Tipolinea/Scalatl/  
 SPesslin-/Altezza/Materiale/annotatiVo]: **C** ↵  
 (per modificare il colore)  
 Nuovo colore [Truecolor/Catalogocolori]  
 <DALAYER>: **ROSSO** ↵  
 Digitare la proprietà da modificare  
 [Colore/Elev/Layer/Tipolinea/Scalatl/  
 SPesslin-/Altezza/Materiale/annotatiVo]: ↵  
 (invio per ultimare il comando)  
 Comando:

## LABORATORIO INFORMATICO

Naturalmente è necessario che il tipo linea **tratteggiata** sia stata **caricata** preventivamente nel disegno. Eventualmente può essere opportuno aggiustare il **fattore di scala** nella rappresentazione delle linee non continue modificando la **variabile di sistema ltscale**, sostituendo il valore per difetto 1 con il valore che assegna alla linea l'aspetto giudicato più adeguato.

Possiamo poi usare il comando **testo** per posizionare le lettere *A*, *B*, *C* in prossimità dei relativi punti, con caratteri di altezza di 15 unità:

Comando: **testo** (text) ↵ Icona   
 Stile di testo corrente:  
 "Standard" Altezza del testo: 2.500  
 Annotativo: No  
 Specificare punto iniziale del testo  
 o [Giustificato/Stile]: (portare il mirino del cursore  
 in prossimità di A e selezionare...)  
 Specificare altezza <2.500>: **15** ↵  
 Specificare angolo di rotazione del testo  
 <100.0000g>: ↵  
 Digitare testo: **A** ↵  
 (nella finestra dei comandi o in un riquadro direttamente sull'area  
 di lavoro)  
 Comando:

Si ripete poi il comando, in modo analogo, per inserire le lettere in prossimità dei punti *B* e *C*. La ► **FIGURA C** rappresenta lo stato del disegno a questo punto dell'esercitazione.

### 3. Individuazione del punto ausiliario di Collins

Per l'individuazione del punto ausiliario di Collins (che chiameremo *R*) è necessario eseguire le seguenti operazioni grafiche:

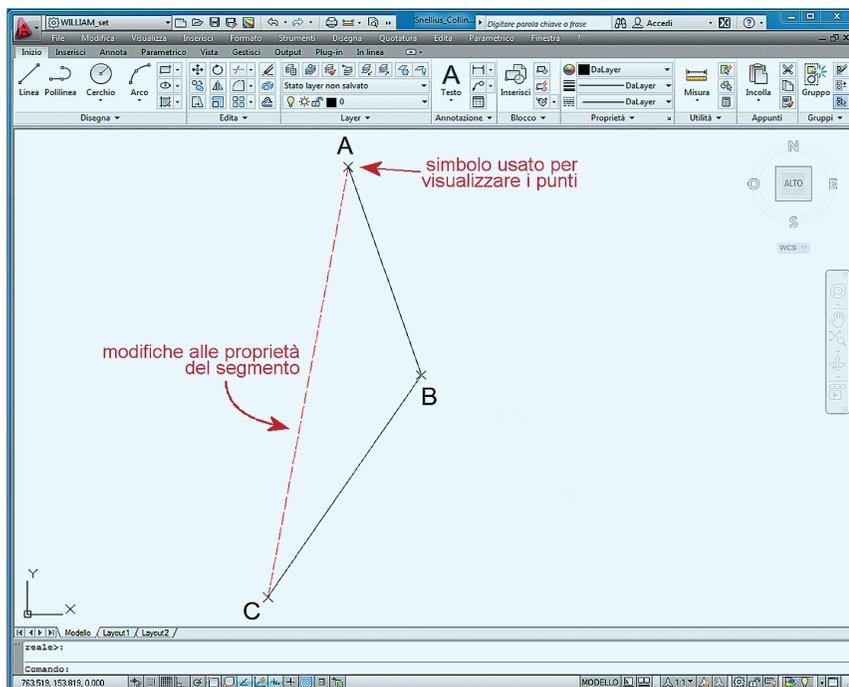
- **rotazione** attorno ad *A* del segmento *AC* dell'angolo  $\beta$  dalla parte opposta del punto incognito *P*;
- **rotazione** attorno a *C* del segmento *AC* dell'angolo  $\alpha$  dalla parte opposta del punto incognito *P*.

#### • Rotazione di AC attorno ad A

Per non perdere, dopo la rotazione, il **segmento AC** tracciato in precedenza, è opportuno tracciare **di nuovo** lo stesso segmento, che poi verrà ruotato. Ricordando che è ancora attiva la funzione di cattura **Nodo** selezionata in precedenza con il comando **osnap**, possiamo utilizzare il solito comando **linea**:

Comando: **linea** (line) ↵ Icona   
 Specificare primo punto:  
 (posizionare il mirino sul simbolo del punto A e cliccare  
 il tasto sinistro del mouse)  
 Specificare punto successivo o [Annulla]:  
 (posizionare il mirino sul simbolo del punto C e cliccare)  
 Specificare punto successivo  
 o [Chiudi/Annulla]: **Esc**  
 Comando:

Ciò permette di catturare esattamente gli estremi *A* e *C* del segmento già disegnato, quindi di creare un **nuovo segmento** perfettamente **sovrapposto** a quest'ultimo. Si tratta ora



**FIGURA C** Aspetto del disegno dopo aver inserito e collegato i tre punti *A*, *B*, *C*. Osserviamo anche l'effetto della modifica delle proprietà (colore e tipo linea) del segmento *AC*.

LABORATORIO INFORMATICO

di ruotare il nuovo segmento, in senso **antiorario**, attorno al punto *A* di un angolo  $\beta$  di  $-47^{\circ},4725$  (il segno  $-$  tiene conto della rotazione antioraria) per definire la prima direzione lungo la quale si trova *R*. Il comando da assegnare sarà **ruota**; in effetti si ha:

```
Comando: ruota (rotate) ↵
Angolo positivo corrente in UCS:
ANGDIR=orario ANGBASE=100.0000g
Selezionare oggetti: T ↵ (NOTA: U equivale
a selezionare l'ultimo oggetto tracciato)
trovato(i) 1 (un oggetto selezionato)
Selezionare oggetti: ↵ (per interrompere la selezione
premere il tasto invio)
Specificare punto base: (selezionare col puntatore
il punto A ...)
Specificare angolo di rotazione o
[Copia/Riferimento] <100.0000g>: -47.4725 ↵
Comando:
```

• **Rotazione di AC attorno a C**

Come in precedenza, è opportuno disegnare un **nuovo segmento AC** che si vada a **sovrapporre** ancora al precedente, salvo poi farlo **ruotare**, *questa volta in senso orario*, attorno a *C*. Per tracciare di nuovo un segmento esattamente **sovrapposto** al precedente *AC* dovremo utilizzare ancora il comando **linea** esattamente come riportato al passo precedente.

Occorre ora ruotare il nuovo segmento, *questa volta in senso orario*, attorno al punto *C* di un angolo  $\alpha$  pari a  $44^{\circ},9198$  per definire la seconda direzione lungo la quale si trova *R*, dunque lo stesso punto *R* come intersezione delle due direzioni. Il comando da assegnare sarà ancora come il seguente:

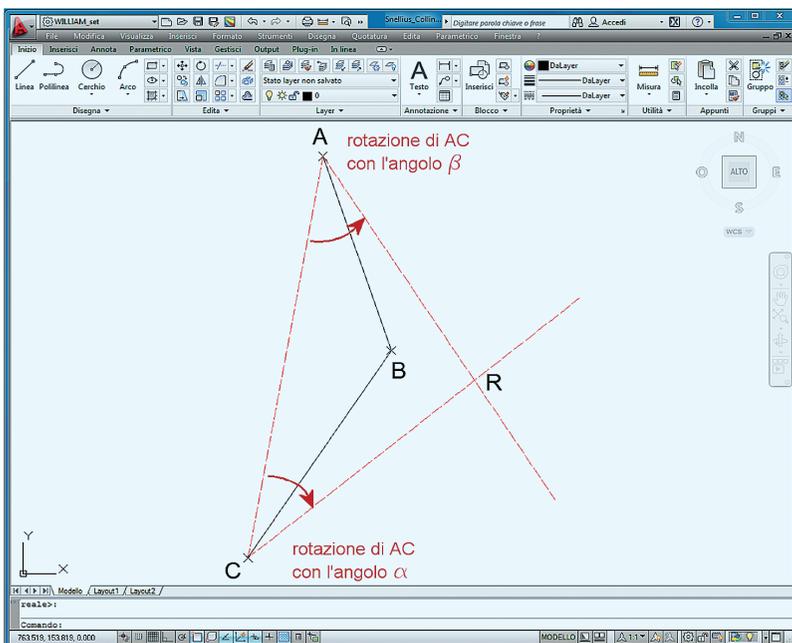
```
Comando: ruota (rotate) ↵
Angolo positivo corrente in UCS:
ANGDIR=orario ANGBASE=100.0000g
Selezionare oggetti: T ↵ (NOTA: U equivale
a selezionare l'ultimo oggetto tracciato)
trovato(i) 1 (un oggetto selezionato)
Selezionare oggetti: ↵ (per interrompere la selezione
premere il tasto invio)
Specificare punto base: (selezionare col puntatore
il punto C ...)
Specificare angolo di rotazione o
[Copia/Riferimento] <100.0000g>: 44.9198 ↵
Comando:
```

Con il comando **cambia**, esattamente come visto in precedenza, è poi possibile assegnare alle nuove linee *AR* e *CR* le stesse proprietà del segmento *AC* (colore rosso e tipo linea tratteggiata). È anche possibile riutilizzare il comando **testo** per inserire la lettera *R* in prossimità dell'intersezione delle due linee precedenti, come illustrato in ► FIGURA D.

**4. Tracciamento del cerchio passante per A, C, R**

La costruzione di Collins a questo punto richiede la costruzione del cerchio passante per i punti *A*, *C* ed *R*.

Il comando da utilizzare è **cerchio**, che contiene l'opzione **3P** che consente di selezionare i tre punti con cui tracciare il cerchio. Ricordando che è sempre attiva la funzione di cattura **Nodo** del comando **osnap**, si ha:



**FIGURA D** Individuazione del punto ausiliario *R* per intersezione di due segmenti ottenuti con opportune rotazioni di *AC* su *A* e su *C*.

## LABORATORIO INFORMATICO

Comando: **cerchio** (circle) ↵ 

Specificare centro del cerchio  
o [3P/2P/Ttr  
(tangente tangente raggio)]: **3P** ↵

Specificare primo punto sul cerchio:  
(selezionare col puntatore il punto **A** ...)

Specificare secondo punto sul cerchio:  
(selezionare col puntatore il punto **R** ...)

Specificare terzo punto sul cerchio:  
(selezionare col puntatore il punto **C** ...)

Comando:

Eventualmente è possibile assegnare anche a questo cerchio le stesse proprietà del segmento  $AC$  (colore rosso e tipo linea tratteggiata).

## 5. Individuazione del punto incognito $P$

Per terminare la costruzione, colleghiamo ora con un segmento il punto  $R$  e il punto  $B$ , utilizzando ancora il comando **linea** (e ricordando che sono sempre attive le modalità di cattura **Nodo** e **Intesezione**) come segue:

Comando: **linea** (line) ↵ 

Specificare primo punto:  
(posizionare il mirino sul simbolo del punto  $R$  e cliccare il tasto sinistro del mouse)

Specificare punto successivo o [Annulla]:  
(posizionare il mirino sul simbolo del punto  $B$  e cliccare)

Specificare punto successivo  
o [Chiudi/Annulla]: **Esc**

Comando:

Si tratta ora di **prolungare** questo segmento fino a **intersecare**, dalla parte opposta di  $R$ , il **cerchio** tracciato al punto precedente. Ricorriamo allora al comando **estendi** come illustrato di seguito:

Comando: **estendi** (extend) ↵ 

Impostazioni correnti:  
Proiezione=UCS Spigolo=nessuno  
Selezionare limiti di estensione...  
(selezionare su un punto qualunque del **cerchio**)

Selezionare oggetti o <seleziona tutto>:  
trovato(i) 1

Selezionare oggetti: ↵ (invio per terminare la selezione)

Selezionare oggetto da estendere ..... (selezionare il mirino sul segmento  $BR$  in **prossimità di B**)

Selezionare oggetto da estendere .....

**Esc**

Comando:

L'intersezione tra il **cerchio** e il precedente **prolungamento** è il punto  $P$  cercato (► FIGURA E). Per ottenere le sue **coordinate** interroghiamo AutoCAD con il comando **id** come segue:

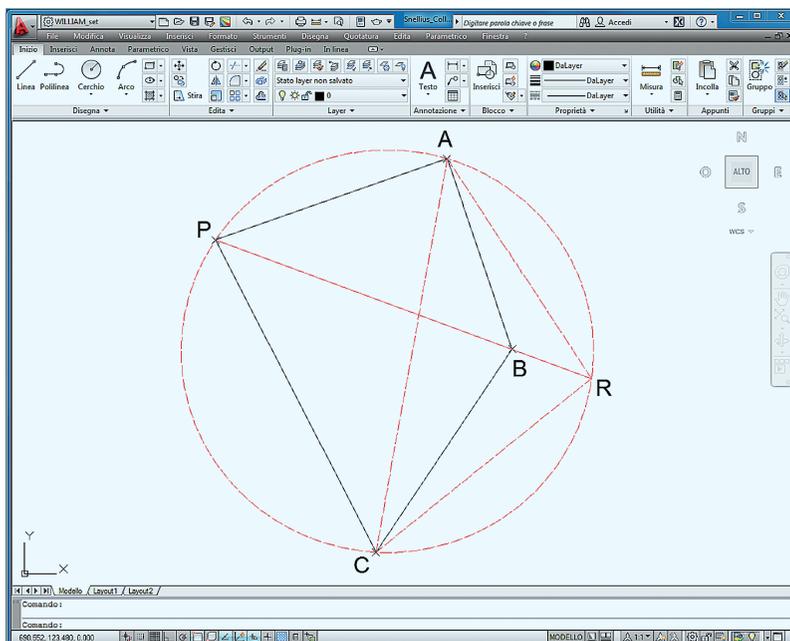
Comando: **id** (id) ↵ 

Specificare punto: (selezionare il punto **P**)

X = 177.663 Y = 408.131 Z = 0.000

Comando:

Le coordinate di  $P$  così ottenute ( $X_p = 177,663$ ;  $Y_p = 408,131$ ) hanno la stessa **precisione** del calcolo numerico.



**FIGURA E** Aspetto della costruzione di Collins del nostro problema. Interrogando il programma si possono ottenere i valori numerici delle coordinate del punto incognito  $P$ .

# Autovalutazione

## A. Verifica delle conoscenze

### QUESITI VERO/FALSO

- |   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| <b>1</b> La rete di inquadramento deve sempre seguire il rilievo d'appoggio   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>2</b> La rete di inquadramento coinvolge l'intera zona del rilievo   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>3</b> Triangolazioni e intersezioni sono metodi di rilievo alternativi   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>4</b> I punti costituenti la rete di inquadramento devono essere riportati sul disegno                           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>5</b> La scala di rappresentazione condiziona il numero dei punti della rete di inquadramento                    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>6</b> Gli errori commessi sui punti di dettaglio sono più temibili di quelli commessi sui punti di inquadramento | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>7</b> La sovrabbondanza di misure permette di migliorare la precisione del rilievo                               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>8</b> Le triangolazioni possono essere a rete o a catena   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>9</b> In una triangolazione deve essere misurata una sola base   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>10</b> Le triangolazioni di grandi estensioni sono organizzate in livelli chiamati ordini                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>11</b> Nelle triangolazioni la propagazione degli errori è trascurabile  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>12</b> La triangolazione di I ordine realizzata dall'IGM è costituita da circa 300 punti                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>13</b> Il IV ordine della rete geodetica realizzata dall'IGM non è una triangolazione                            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>14</b> Nella triangolazione realizzata dall'IGM i punti di III ordine sono rappresentati da un quadratino rosso  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>15</b> Nelle intersezioni classiche è necessaria la misura di distanze   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>16</b> Nelle intersezioni sono sempre necessari alcuni punti di coordinate note                                  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>17</b> L'intersezione laterale è un'intersezione inversa   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- |  |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|
| <b>18</b> Nelle intersezioni dirette è probabile la necessità di effettuare stazioni fuori centro                      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>19</b> Le intersezioni dirette sono semplici da eseguire  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>20</b> Il problema di Snellius-Pothenot ammette sempre soluzioni  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>21</b> La livellazione fondamentale realizzata dall'IGM si sviluppa lungo linee aperte                              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>22</b> La livellazione fondamentale realizzata dall'IGM si sviluppa seguendo le vie di comunicazione nazionali      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>23</b> I capisaldi della livellazione fondamentale realizzata dall'IGM sono divisi in 6 categorie                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>24</b> La livellazione fondamentale dell'IGM è stata realizzata con livellazioni geometriche composte da un estremo | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>25</b> I segnali altimetrici possono essere di tipo verticale o di tipo orizzontale                                 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### QUESITI A RISPOSTA SINGOLA

- |   |  |
|---|--|
| <b>26</b> Enunciare la definizione di rilievo topografico.  |  |
| <b>27</b> Quale significato ha il modo di dire «dal generale al particolare» nel contesto del rilievo topografico?                |  |
| <b>28</b> Quale elemento condiziona più di ogni altro la scelta del metodo per realizzare la rete di inquadramento di un rilievo? |  |
| <b>29</b> Elencare i metodi per realizzare le reti di inquadramento.  |  |
| <b>30</b> Perché è necessario che nelle reti di inquadramento le misure siano sovrabbondanti?                                     |  |
| <b>31</b> Per quale ragione le triangolazioni sono strutturate in livelli chiamati ordini?  |  |
| <b>32</b> Per quale finalità è stata realizzata la triangolazione geodetica dell'IGM?   |  |
| <b>33</b> Per quale ragione in una triangolazione viene misurata più di una base?   |  |
| <b>34</b> In cosa consiste la compensazione empirica di una triangolazione tecnica?   |  |
| <b>35</b> Che cosa sono i cataloghi pubblicati dall'IGM?  |  |

- 36** Qual è il compito assegnato alle intersezioni in un rilievo a piccola scala?
- 37** Elencare i metodi di intersezioni diretta.
- 38** Quali caratteristiche posseggono le intersezioni inverse?
- 39** Descrivere le modalità con cui è stata realizzata la livellazione fondamentale dell'IGM.
- 40** Descrivere le caratteristiche salienti dei segnali altimetrici.
- 41** Quali elementi dei capisaldi della livellazione fondamentale sono riportati nei fascicoli pubblicati dall'IGM?

### QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

- 42** Da che cosa è costituita una rete di inquadramento?
- a da un insieme di punti, opportunamente collegati, che coprono l'intero territorio da rilevare
- b dall'insieme dei punti caratteristici del terreno da rilevare
- c da un insieme di punti da riportare nella rappresentazione grafica del terreno
- d nessuno dei precedenti
- 43** Quale dei seguenti elementi condiziona il numero di punti che andranno a costituire una rete di inquadramento?
- a la scala di rappresentazione del rilievo
- b l'andamento morfologico del terreno da rilevare
- c l'estensione del territorio da rilevare
- d tutti i precedenti
- 44** Quale tra le seguenti situazioni non incide direttamente sulla precisione di una rete di inquadramento?
- a l'esecuzione di misure sovrabbondanti
- b la morfologia del terreno
- c l'impiego di strumenti sofisticati
- d nessuno dei precedenti
- 45** Una triangolazione può essere
- a a intreccio                       b a catena
- c a nastro                             d tutti i precedenti
- 46** Le triangolazioni vengono strutturate in ordini per
- a rendere più rapido il rilievo
- b poter controllare le misure eseguite
- c ridurre la propagazione degli errori
- d nessuno dei precedenti
- 47** Una triangolazione è classificata di tipo tecnico quando
- a richiede particolari procedure di rilievo
- b presenta lati di lunghezza superiore a 10 km
- c è interessata a estensioni di territorio medio-piccole
- d nessuno dei precedenti
- 48** Indicativamente da quanti punti è costituita la triangolazione geodetica di I ordine eseguita dall'IGM?
- a 3000                                 b 1000
- c 50                                      d 300
- 49** Quale simbolo grafico rappresenta i vertici di II ordine nei fogli della Carta d'Italia?
- a un cerchietto                     b un punto
- c un quadratino                    d un triangolino
- 50** Per quale funzione è scorretto l'impiego delle intersezioni?
- a per raffittire una rete nell'ambito di un rilievo a piccola scala
- b per raffittire una rete nell'ambito di un rilievo a grande scala
- c per orientare una poligonale
- d nessuna delle precedenti
- 51** Quale elemento caratterizza maggiormente il posizionamento dei punti con le intersezioni?
- a per il fatto che si determinano le coordinate dei punti rapidamente
- b per il fatto che si determinano le coordinate di punti incogniti
- c per il fatto che non sono necessari punti di coordinate note
- d per il fatto che si eseguono solo misure angolari
- 52** Quale eventualità diviene assai probabile nell'impiego delle intersezioni dirette?
- a la misura di angoli su punti di coordinate note
- b l'esecuzione di stazioni fuori centro
- c la misura di angoli su punti di coordinate incognite
- d nessuna delle precedenti
- 53** Cosa caratterizza le intersezioni inverse?
- a la relativa semplicità delle sessioni di misura
- b la misura di angoli solo su punti di coordinate incognite
- c l'assenza di stazioni fuori centro
- d tutte le precedenti

## B. Verifica delle conoscenze

### ● Esercizi e problemi

#### Esercizi sulle triangolazioni

- 54** Per dare le direzioni di attacco di una galleria ad asse rettilineo dai suoi imbocchi *A* ed *E*, si sono collegati questi due punti con una catena di tre triangoli *ACB*, *BCD*, *DCE*. Gli angoli compensati dei singoli triangoli risultano i seguenti:

Triangolo ACB	Triangolo BCD	Triangolo DCE
$\widehat{A} = 85^{\circ},3306$	$\widehat{B} = 84^{\circ},0735$	$\widehat{C} = 69^{\circ},3306$
$\widehat{B} = 61^{\circ},9018$	$\widehat{C} = 62^{\circ},9534$	$\widehat{D} = 51^{\circ},0914$
$\widehat{C} = 52^{\circ},7676$	$\widehat{D} = 52^{\circ},9731$	$\widehat{E} = 79^{\circ},5781$

Il vertice  $C$  è alla destra di un osservatore che da  $A$  guardi verso  $B$  e il vertice  $E$  è alla destra di un osservatore che da  $C$  guardi verso  $D$ . La base  $AB$  risulta di 1114,09 m. Si riferisca la triangolazione a un sistema di assi con l'origine in  $A$  e il semiasse positivo delle ordinate posto secondo  $AB$ . Calcolare la distanza  $AE$  e gli angoli  $\widehat{BAE}$  e  $\widehat{AED}$ .

$$[AE = 2691,29 \text{ m}; \widehat{BAE} = 77^{\circ},2682; \widehat{AED} = 72^{\circ},6920]$$

**55** Per effettuare il rilievo di una zona si è stabilita sul terreno una catena di triangoli:  $ABC, CBD, DBE$ . Il lato  $CD$  è stato misurato più volte direttamente e, facendo la media delle misure fatte, è risultato di 375,50 m. I valori misurati per gli angoli sono stati i seguenti:

Triangolo ABC	Triangolo CBD	Triangolo DBE
$\widehat{A} = 73^{\circ},1600$	$\widehat{B} = 70^{\circ},5416$	$\widehat{B} = 57^{\circ},6809$
$\widehat{B} = 76^{\circ},5567$	$\widehat{C} = 55^{\circ},2600$	$\widehat{D} = 49^{\circ},2500$
$\widehat{C} = 50^{\circ},2800$	$\widehat{D} = 74^{\circ},2083$	$\widehat{E} = 93^{\circ},0558$

Si conoscono le coordinate del vertice  $A$  rispetto al sistema di assi esistente nella zona, nonché l'azimut ( $AC$ ):

$$\begin{aligned} X_A &= -1650,39 \text{ m} \\ Y_A &= +6436,03 \text{ m} \\ (AC) &= 287^{\circ},6064 \end{aligned}$$

Calcolare le coordinate dei vertici  $B, C, D, E$ .

$$[X_B = -1823,90 \text{ m}; Y_B = +6681,01 \text{ m}; \dots X_E = -1939,84 \text{ m}; Y_E = +6873,93 \text{ m}]$$

**56** Per collegare due punti  $M$  ed  $N$  con una galleria si è tracciata la catena di triangoli  $MAC, CAB, CBN$ . Si sono misurati tutti gli angoli dei triangoli, nonché il lato  $AB$  che è risultato di 3517,00 m.

Triangolo MAC	Triangolo CAB	Triangolo CBN
$\widehat{M} = 77^{\circ},8008$	$\widehat{C} = 57^{\circ},3706$	$\widehat{C} = 44^{\circ},8920$
$\widehat{A} = 71^{\circ},4496$	$\widehat{A} = 60^{\circ},1143$	$\widehat{B} = 85^{\circ},8191$
$\widehat{C} = 50^{\circ},7446$	$\widehat{B} = 82^{\circ},5110$	$\widehat{N} = 69^{\circ},2963$

Calcolare la lunghezza della galleria e gli angoli  $\widehat{CMN}$  e  $\widehat{MNC}$ . I vertici  $A$  e  $B$  risultano a destra di un osservatore che da  $M$  guardi verso  $N$ ; il vertice  $C$  resta invece alla sinistra.

$$[MN = 7591,80 \text{ m}]$$

**57** Per il rilievo di una vasta zona di terreno è stato necessario effettuare la triangolazione a catena tra i due trigonometrici  $O$  e  $P$ , aventi le seguenti coordinate:

$$\begin{aligned} X_O &= 0,00 \text{ m} & X_P &= +15\,910,20 \text{ m} \\ Y_O &= 0,00 \text{ m} & Y_P &= +10\,101,80 \text{ m} \end{aligned}$$

La triangolazione si sviluppa con i vertici intermedi  $A, B, C, D$ . I valori degli angoli misurati sono i seguenti:

Triangolo OAB	Triangolo ACB
$\widehat{O}_1 = 61^{\circ},1176$	$\widehat{A}_2 = 94^{\circ},0167$
$\widehat{A}_1 = 75^{\circ},4667$	$\widehat{C}_2 = 53^{\circ},0592$
$\widehat{B}_1 = 63^{\circ},4157$	$\widehat{B}_2 = 52^{\circ},9241$

Triangolo CDB	Triangolo CDP
$\widehat{C}_3 = 53^{\circ},7383$	$\widehat{C}_4 = 57^{\circ},5790$
$\widehat{D}_3 = 90^{\circ},8879$	$\widehat{P}_4 = 61^{\circ},4484$
$\widehat{B}_3 = 55^{\circ},3738$	$\widehat{D}_4 = 80^{\circ},9726$

Calcolare le coordinate dei vertici  $A, B, C, D$ , sapendo che i punti  $A$  e  $C$  si trovano alla sinistra della congiungente  $OP$ , mentre i punti  $B$  e  $D$  sono alla destra della stessa congiungente.

*Nota.* Fissare una figura fittizia  $OA'B'C'D'P'$  simile a quella assegnata, dando un valore arbitrario a  $OA'$  e  $(OA')$ ...

$$\begin{aligned} [X_A &= 2970,40 \text{ m}; Y_A = 5870,65 \text{ m}; \\ X_B &= 7190,12 \text{ m}; Y_B = 1030,50 \text{ m}; \\ \dots X_D &= 12\,620,95 \text{ m}; Y_D = 4640,60 \text{ m}] \end{aligned}$$

**58** Tra i due trigonometrici  $M$  ed  $N$  sono stati inseriti i vertici  $A, B, C$  mediante una catena di tre triangoli  $MAC, CAB, CBN$ . I vertici  $A$  e  $B$  sono alla destra di un osservatore che, posto in  $M$ , guarda verso  $N$ . Il vertice  $C$  sta invece alla sinistra della direzione  $MN$ . Le coordinate di  $M$  ed  $N$  sono:

$$\begin{aligned} X_M &= -1200,70 \text{ m} & X_N &= +4900,76 \text{ m} \\ Y_M &= +2001,48 \text{ m} & Y_N &= +6519,14 \text{ m} \end{aligned}$$

Con un teodolite si sono misurati gli angoli orizzontali dei tre triangoli, ottenendo i seguenti valori:

Triangolo MAC	Triangolo CAB	Triangolo CBN
$\widehat{M} = 70^{\circ}01'14''$	$\widehat{C} = 51^{\circ}38'00''$	$\widehat{C} = 40^{\circ}24'10''$
$\widehat{A} = 64^{\circ}18'16''$	$\widehat{A} = 54^{\circ}06'10''$	$\widehat{B} = 77^{\circ}14'14''$
$\widehat{C} = 45^{\circ}40'12''$	$\widehat{B} = 74^{\circ}15'35''$	$\widehat{N} = 62^{\circ}22'00''$

Calcolare le coordinate dei vertici  $A, B, C$  dopo avere compensato gli angoli di ciascun triangolo.

*Nota.* Fissare una figura fittizia  $MA'B'C'N'$  simile a quella assegnata, dando un valore arbitrario a  $MC'$  e  $(MC')$ ...

$$\begin{aligned} [X_A &= +2004,60 \text{ m}; Y_A = +1276,90 \text{ m}; \\ X_B &= +4318,88 \text{ m}; Y_B = +3925,20 \text{ m}; \\ X_C &= +1036,57 \text{ m}; Y_C = +5484,31 \text{ m}] \end{aligned}$$

**59** Dovendosi costruire una galleria in rettilineo tra i punti  $A$  e  $B$ , si è tracciata la triangolazione formata dai tre triangoli  $ACD$ ,  $CDE$ ,  $EDB$ . Sono stati misurati la distanza  $CD = 227,54$  m e gli angoli interni dei triangoli:

Triangolo $ACD$	Triangolo $CDE$	Triangolo $EDB$
$\widehat{A} = 31^\circ 12' 40''$	$\widehat{C} = 28^\circ 16' 30''$	$\widehat{E} = 42^\circ 15' 00''$
$\widehat{C} = 107^\circ 05' 10''$	$\widehat{D} = 126^\circ 09' 00''$	$\widehat{D} = 106^\circ 01' 20''$
$\widehat{D} = 41^\circ 42' 10''$	$\widehat{E} = 25^\circ 34' 30''$	$\widehat{B} = 31^\circ 43' 40''$

Inoltre, facendo stazione in  $A$  e collimando in  $D$ , si è misurato l'angolo zenitale  $\varphi_{AD} = 88^\circ 13' 20''$  e facendo stazione in  $B$  si è misurato, sempre collimando in  $D$ , l'angolo zenitale  $\varphi_{BD} = 91^\circ 32' 10''$ . Le altezze dello strumento e della mira in  $A$ ,  $B$ , e  $D$  sono uguali. Calcolare la lunghezza e la pendenza della galleria  $AB$  ( $K = 0,14$ ;  $R = 6370$  km).

$$[AB = 509,86 \text{ m}; p_{AB} = +4,234\%]$$

**60** Per poter dare la direzione di attacco di una galleria ad asse rettilineo dai suoi due imbocchi  $A$  ed  $E$ , si sono collegati questi due punti con una catena di tre triangoli  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDE$ , i cui angoli misurati e compensati sono i seguenti:

Triangolo $ABC$	Triangolo $BCD$	Triangolo $CDE$
$\widehat{A} = 76^\circ 47' 51''$	$\widehat{B} = 75^\circ 39' 58''$	$\widehat{C} = 62^\circ 23' 51''$
$\widehat{B} = 55^\circ 42' 42''$	$\widehat{C} = 56^\circ 33' 29''$	$\widehat{D} = 45^\circ 58' 56''$
$\widehat{C} = 47^\circ 29' 27''$	$\widehat{D} = 47^\circ 46' 33''$	$\widehat{E} = 71^\circ 37' 13''$

La base  $AB$  misurata risulta  $AB = 1114,13$  m. Le quote dei punti  $A$  ed  $E$  sono note e hanno i seguenti valori:  $Q_A = 110,20$  m e  $Q_E = 163,97$  m. Determinare gli angoli  $\widehat{BAE}$  e  $\widehat{DEA}$  necessari per poter dare le direzioni di attacco della galleria, la lunghezza  $AE$  della galleria e la sua pendenza. Tenendo conto che il punto  $C$  è stato collimato a terra con un goniometro sul punto  $A$  con altezza strumentale  $h = 1,40$  m, misurando l'angolo zenitale  $\varphi_C = 81^\circ 40' 50''$ , determinare la quota di  $C$  ( $K = 0,14$ ;  $R = 6370$  km).

$$[AE = 2688,76 \text{ m}; p_{AE} = +2\%; Q_C = 294,30 \text{ m}]$$

### Esercizi sulle intersezioni in avanti

**61** Si conoscono le coordinate di due punti  $A$  e  $B$ :

$$\begin{aligned} X_A &= +2410,70 \text{ m} & X_B &= -675,30 \text{ m} \\ Y_A &= -1074,36 \text{ m} & Y_B &= +2741,40 \text{ m} \end{aligned}$$

Per trovare le coordinate di un punto  $C$  si è fatta stazione in  $A$  e in  $B$  e sono stati misurati i due angoli  $\widehat{CAB}$ ,  $\widehat{ABC}$ :

$$\widehat{CAB} = \alpha = 76^\circ,1978 \quad \widehat{ABC} = \beta = 57^\circ,4036$$

Calcolare le coordinate di  $C$  con appoggio al punto  $A$ , e al punto  $B$  per controllo. Il punto  $C$  si trova alla sinistra di un osservatore che dal punto  $A$  guarda verso  $B$ .

$$[X_C = -1837,79 \text{ m}; Y_C = -2417,33 \text{ m}]$$

**62** Risolvere i problemi di intersezione in avanti, utilizzando i dati riportati nel prospetto a fondo pagina, e pensando il punto incognito  $P$  alla sinistra di un osservatore che da  $A$  guardi verso  $B$ .

**63** Si deve determinare la posizione di un punto  $P$  per intersezione in avanti da due trigonometrici  $A$  e  $B$  di coordinate note:

$$\begin{aligned} X_A &= -1241,70 \text{ m} & X_B &= +2936,50 \text{ m} \\ Y_A &= +2570,30 \text{ m} & Y_B &= +5531,20 \text{ m} \end{aligned}$$

Il punto  $P$  è alla destra di un osservatore che da  $A$  guarda verso  $B$ . Non si è potuto fare stazione in  $A$  e la si è fatta invece in un punto  $A'$  distante 3,25 m da  $A$ . Dalla stazione  $A'$  si sono collimati i punti  $B$ ,  $P$ ,  $A$ :

$$l'_A = 1^\circ,2469 \quad l'_B = 17^\circ,0031 \quad l'_P = 119^\circ,1636$$

Non si è potuto fare stazione nemmeno nel punto  $B$  e si è fatta in un punto  $B'$  distante 5,45 m da  $B$ . Dalla stazione  $B'$  si sono collimati i punti  $P$ ,  $A$ ,  $B$ :

$$l'_P = 194^\circ,8025 \quad l'_A = 268^\circ,2870 \quad l'_B = 346^\circ,8024$$

Calcolare le coordinate del punto  $P$ .

*Suggerimento.* Utilizzare gli angoli  $\alpha'$  e  $\beta'$ , misurati in  $A'$  e  $B'$ , per ottenere valori approssimati di  $AP$  e  $BP$  da utilizzare nella procedura di riduzione al centro di stazione.  $[X_P = +5646,37 \text{ m}; Y_P = -7886,45 \text{ m}]$

	Punto $A$	Punto $B$	Angoli	Risultati
1	$X = -1236,76$ m $Y = -985,44$ m	$X = +298,86$ m $Y = +678,24$ m	$\alpha = 52^\circ,76$ $\beta = 44^\circ,82$	$X_P = -1358,88$ m $Y_P = +476,04$ m
2	$X = -872,18$ m $Y = +1036,55$ m	$X = +379,34$ m $Y = +123,42$ m	$\alpha = 41^\circ,88$ $\beta = 48^\circ,36$	$X_P = +206,96$ m $Y_P = +1066,25$ m
3	$X = +1892,88$ m $Y = +1208,04$ m	$X = +3254,12$ m $Y = +1347,76$ m	$\alpha = 58^\circ,12$ $\beta = 49^\circ,63$	$X_P = +2404,41$ m $Y_P = +2031,41$ m

**Esercizi sul problema di Snellius-Pothenot**

**64** Si conoscono le coordinate cartesiane di  $A, B, C$ :

$$\begin{aligned} X_A &= -2100,00 \text{ m} & X_B &= +785,00 \text{ m} \\ Y_A &= +1450,00 \text{ m} & Y_B &= +2398,00 \text{ m} \\ & & X_C &= +2970,00 \text{ m} \\ & & Y_C &= +705,00 \text{ m} \end{aligned}$$

Da un punto  $P$  sono stati collimati i tre punti  $A, B, C$  e si sono misurati gli angoli:

$$\widehat{APB} = \alpha = 60^\circ,1852 \quad \widehat{BPC} = \beta = 43^\circ,5926$$

Calcolare le coordinate del punto  $P$ .

$$[X_P = -1080,51 \text{ m}; Y_P = -827,11 \text{ m}]$$

**65** Si devono determinare le coordinate di un punto  $P$  dal quale si sono collimati i tre punti  $A, B, C$  e il punto di controllo  $D$ :

$$\begin{aligned} X_A &= 2096,20 \text{ m} & X_B &= 2740,78 \text{ m} \\ Y_A &= 1288,97 \text{ m} & Y_B &= 1512,68 \text{ m} \\ X_C &= 3227,75 \text{ m} & X_D &= 3935,58 \text{ m} \\ Y_C &= 2095,78 \text{ m} & Y_D &= 1783,44 \text{ m} \end{aligned}$$

Si sono misurati gli angoli:

$$\begin{aligned} \widehat{APB} &= \alpha = 39^\circ,8007 & \widehat{BPC} &= \beta = 54^\circ,8256 \\ \widehat{CPD} &= \gamma = 49^\circ,3094 \end{aligned}$$

Determinare le coordinate mediate di  $P$  con gli opportuni calcoli di controllo.

$$[X'_P = 3136,81 \text{ m}; Y'_P = 1104,06 \text{ m}]$$

**66** Si devono calcolare le coordinate cartesiane di un punto  $P$  dal quale si vedono i trigonometrici  $A, B, C$  di coordinate note:

$$\begin{aligned} X_A &= +1010,30 \text{ m} & X_B &= +3717,98 \text{ m} \\ Y_A &= +4765,75 \text{ m} & Y_B &= +2503,80 \text{ m} \\ & & X_C &= +5222,25 \text{ m} \\ & & Y_C &= +902,80 \text{ m} \end{aligned}$$

In  $P$ , con un teodolite centesimale, si sono misurati gli angoli:

$$\widehat{APB} = \alpha = 67^\circ,6448 \quad \widehat{BPC} = \beta = 33^\circ,7562$$

Eeguire i calcoli e fare la figura alla scala 1:50 000.

$$[X_P = +1010,30 \text{ m}; Y_P = +995,50 \text{ m}]$$

**67** Da un punto  $P$  si vedono i quattro punti  $A, B, C, D$  di cui si conoscono i seguenti dati:

$$\begin{aligned} X_A &= 0,00 \text{ m} & (AB) &= 50^\circ,0000 \\ Y_A &= 0,00 \text{ m} & AB &= 3094,00 \text{ m} \\ (BC) &= 102^\circ,7188 & (CD) &= 319^\circ,5253 \\ BC &= 6257,00 \text{ m} & CD &= 5764,10 \text{ m} \end{aligned}$$

Con un teodolite posto nel punto  $P$  si sono misurati i seguenti angoli:

$$\widehat{APB} = \alpha = 86^\circ,4815 \quad \widehat{BPC} = \beta = 92^\circ,6707$$

$$\widehat{DPC} = \gamma = 74^\circ,3987$$

Calcolare le coordinate mediate di  $P$ .

$$[X_P = +2650,75 \text{ m}; Y_P = -13,33 \text{ m}]$$

**68** Per determinare le coordinate del punto  $P$ , si è fatta stazione su di esso con un goniometro e si sono collimati i vertici  $A, B, C$ , facendo le seguenti letture al cerchio orizzontale:

$$l_A = 0^\circ,0000 \quad l_B = 35^\circ,6000 \quad l_C = 125^\circ,8000$$

Le coordinate di  $A, B, C$  sono note e hanno i seguenti valori:

$$\begin{aligned} X_A &= -5783,50 \text{ m} & X_B &= -8173,35 \text{ m} \\ Y_A &= -3563,50 \text{ m} & Y_B &= +83,37 \text{ m} \\ & & X_C &= +858,94 \text{ m} \\ & & Y_C &= +5839,61 \text{ m} \end{aligned}$$

Il punto  $P$  si trova alla destra di un osservatore che dal vertice  $A$  guarda il vertice  $B$ .

$$[X_P = -1191,217 \text{ m}; Y_P = -2768,340 \text{ m}]$$

**69** Risolvere i problemi di Snellius-Pothenot utilizzando i dati riportati nel prospetto a fondo pagina; in esso si è indicato con  $\alpha$  l'angolo  $\widehat{APB}$  e con  $\beta$  l'angolo  $\widehat{BPC}$ . Inoltre, si pensi il punto incognito  $P$  alla destra di un osservatore che, posto in  $A$ , osservi  $B$  e  $C$ .

**Esercizi sul problema di Hansen**

**70** Per determinare le coordinate di un punto  $P$  sono stati osservati i due punti trigonometrici  $A$  e  $B$ , sia dal pun-

	Punto A	Punto B	Punto C	Angoli	Risultati
1	$X = -799,88 \text{ m}$ $Y = -1201,04 \text{ m}$	$X = -1304,61 \text{ m}$ $Y = +303,02 \text{ m}$	$X = -602,11 \text{ m}$ $Y = +1800,68 \text{ m}$	$\alpha = 33^\circ,18$ $\beta = 35^\circ,82$	$X_P = +1783,82 \text{ m}$ $Y_P = +447,35 \text{ m}$
2	$X = -1199,87 \text{ m}$ $Y = +1001,83 \text{ m}$	$X = +302,16 \text{ m}$ $Y = +1202,04 \text{ m}$	$X = +2003,42 \text{ m}$ $Y = +804,63 \text{ m}$	$\alpha = 29^\circ,81$ $\beta = 31^\circ,32$	$X_P = -332,31 \text{ m}$ $Y_P = -2059,71 \text{ m}$
3	$X = -1698,77 \text{ m}$ $Y = -999,84 \text{ m}$	$X = -1203,54 \text{ m}$ $Y = +1008,23 \text{ m}$	$X = +311,26 \text{ m}$ $Y = +1208,68 \text{ m}$	$\alpha = 35^\circ,78$ $\beta = 21^\circ,92$	$X_P = +2067,30 \text{ m}$ $Y_P = -640,14 \text{ m}$

	Punto A	Punto B	Angoli		Risultati	
1	$X = -1500,82$ m $Y = +799,94$ m	$X = +2001,53$ m $Y = +1290,22$ m	$\alpha = 109^{\circ},24$ $\alpha_1 = 33^{\circ},20$	$\beta = 40^{\circ},18$ $\beta_1 = 130^{\circ},22$	$X_p = -964,23$ m $Y_p = -1023,63$ m	$X_Q = +1311,51$ m $Y_Q = -700,52$ m
2	$X = -600,52$ m $Y = +1499,53$ m	$X = +2402,05$ m $Y = -303,18$ m	$\alpha = 74^{\circ},51$ $\alpha_1 = 23^{\circ},34$	$\beta = 31^{\circ},33$ $\beta_1 = 75^{\circ},88$	$X_p = -2310,57$ m $Y_p = -194,80$ m	$X_Q = +2382,51$ m $Y_Q = -2121,82$ m
3	$X = -811,86$ m $Y = -1508,62$ m	$X = +1999,74$ m $Y = +1288,97$ m	$\alpha = 110^{\circ},00$ $\alpha_1 = 33^{\circ},48$	$\beta = 40^{\circ},04$ $\beta_1 = 130^{\circ},62$	$X_p = +883,90$ m $Y_p = -2764,48$ m	$X_Q = +2692,53$ m $Y_Q = -988,59$ m

to  $P$  che da un punto ausiliario  $R$ , visibile da  $P$ . Gli elementi misurati sono:

$$A\widehat{P}R = \alpha = 121^{\circ},3800 \quad P\widehat{R}A = \beta = 45^{\circ},1740$$

$$B\widehat{P}R = \alpha_1 = 54^{\circ},7240 \quad P\widehat{R}B = \beta_1 = 99^{\circ},7430$$

Le coordinate dei punti  $A$  e  $B$  sono:

$$X_A = +1995,70 \text{ m} \quad X_B = +6710,30 \text{ m}$$

$$Y_A = +5550,85 \text{ m} \quad Y_B = +6350,74 \text{ m}$$

Eeguire i calcoli e disegnare la figura alla scala 1:100000.

*Nota.* I punti  $P$  ed  $R$  sono alla destra di un osservatore che da  $A$  guarda verso  $B$ .

$$[X_P = 4288,49 \text{ m}; Y_P = 1844,03 \text{ m}; \\ X_R = 7564,23 \text{ m}; Y_R = 2569,96 \text{ m}]$$

**71** Si conoscono le coordinate di due punti  $A$  e  $B$  inaccessibili:

$$X_A = -1468,12 \text{ m} \quad X_B = +1066,44 \text{ m}$$

$$Y_A = +1086,12 \text{ m} \quad Y_B = +1957,56 \text{ m}$$

Alla destra di un osservatore che da  $A$  guarda verso  $B$ , si sono scelti due punti  $P$  e  $Q$  sui quali si è fatto stazione con un teodolite, misurando i seguenti angoli:

$$A\widehat{P}B = 48^{\circ}19'55'' \quad P\widehat{Q}A = 29^{\circ}17'28''$$

$$B\widehat{P}Q = 63^{\circ}27'13'' \quad A\widehat{Q}B = 36^{\circ}37'03''$$

Calcolare le coordinate di  $P$  e  $Q$  e la distanza  $PQ$ .

$$[X_P = -714,60 \text{ m}; Y_P = -1156,99 \text{ m}; \\ X_Q = +2319,43 \text{ m}; Y_Q = -1327,90 \text{ m}]$$

**72** Per determinare le coordinate di due punti  $A$  e  $B$  si è posto un teodolite prima in  $A$  e poi in  $B$  e si sono collimate i due trigonometrici  $P$  e  $Q$  con le seguenti coordinate:

$$X_P = -502,70 \text{ m} \quad X_Q = +612,25 \text{ m}$$

$$Y_P = -124,15 \text{ m} \quad Y_Q = +210,70 \text{ m}$$

Il cerchio orizzontale del teodolite è a graduazione destrorsa e le letture fatte in  $A$  sono:

$$l_P = 0^{\circ}0'0'' \quad l_Q = 71^{\circ}41'20'' \quad l_B = 119^{\circ}27'10''$$

Le letture fatte al cerchio orizzontale in  $B$  sono:

$$l_A = 289^{\circ}24'10'' \quad l_P = 331^{\circ}27'40'' \quad l_Q = 39^{\circ}07'50''$$

*Nota.* I punti  $A$  e  $B$  sono alla destra di un osservatore che, posto in  $B$ , guarda verso  $Q$ .

$$[X_A = 160,81 \text{ m}; Y_A = -752,24 \text{ m}]$$

**73** Risolvere i problemi di Hansen utilizzando i dati contenuti nel prospetto in alto. In esso si è indicato con  $\alpha$  l'angolo  $A\widehat{P}Q$ , con  $\alpha_1$  l'angolo  $B\widehat{P}Q$ , con  $\beta$  l'angolo  $P\widehat{Q}A$  e con  $\beta_1$  l'angolo  $P\widehat{Q}B$ . Inoltre si pensi che i punti incogniti  $P$  e  $Q$  si trovino a destra di un osservatore che in  $A$  osservi  $B$ .

#### Risultati dei quesiti vero/falso

1F, 2V, 3F, 4F, 5V, 6F, 7V, 8V, 9F, 10V, 11F, 12V, 13V, 14V, 15F, 16V, 17F, 18V, 19F, 20F, 21F, 22V, 23F, 24F, 25V.

#### Risultati dei quesiti a risposta multipla

42a, 43d, 44b, 45b, 46c, 47c, 48d, 49a, 50b, 51d, 52b, 53d.