Le trasformazioni di Lorentz

© NASA, STS-41B

1 TRASFORMAZIONI DI GALILEO

Il principio di relatività è stato enunciato per la prima volta da Galileo Galilei nel libro *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* del 1632. Galileo afferma sostanzialmente che, eseguendo un qualunque esperimento di meccanica in un sistema di riferimento inerziale, non è possibile capire se il riferimento è in moto oppure è fermo. Il principio di relatività afferma dunque che:

- **il moto è relativo**, perché si può dire che un sistema di riferimento è in movimento solo se cambia la sua posizione rispetto a un altro sistema di riferimento;
- **le leggi fisiche sono assolute**, perché sono vere in qualunque sistema di riferimento inerziale, indipendentemente dal suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Il principio di relatività afferma dunque che, *ripetendo* uno stesso esperimento in due distinti riferimenti inerziali, l'esperimento deve dare gli stessi risultati. Tuttavia, per dimostrare matematicamente che una legge fisica rispetta il principio di relatività, occorre procedere in modo leggermente diverso anche se equivalente. Si immagina cioè che un qualunque esperimento fisico conforme alla legge in un certo sistema di riferimento inerziale S, venga osservato *contemporaneamente* sia da S che da un secondo sistema di riferimento inerziale S' in moto rettilineo uniforme con velocità V rispetto a S. Questo modo di procedere ha l'ulteriore vantaggio di garantire che l'esperimento osservato dai due sistemi sia esattamente lo stesso, anche se la legge oraria del moto dei corpi sarà diversa a causa del moto relativo tra i due riferimenti.

Un punto cruciale è la conoscenza del modo in cui i valori delle grandezze fisiche si trasformano quando si passa da un sistema di riferimento inerziale all'altro. Ciò riguarda in particolare le grandezze cinematiche tempo e posizione, da cui derivano velocità e accelerazione.

Si usano a questo scopo le **trasformazioni di Galileo**:

$$x' = x - Vt$$

$$t' = t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Sulla base della definizione di velocità, si deduce la regola di **composizione galileiana delle velocità** che, nel caso di un moto parallelo all'asse x si esprime come:

$$v' = v - V$$

o, equivalentemente:

$$v = v' + V$$

Di conseguenza, l'accelerazione rimane invariata nel passare dal sistema di riferimento S al sistema di riferimento S':

$$a' = a$$

2 TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

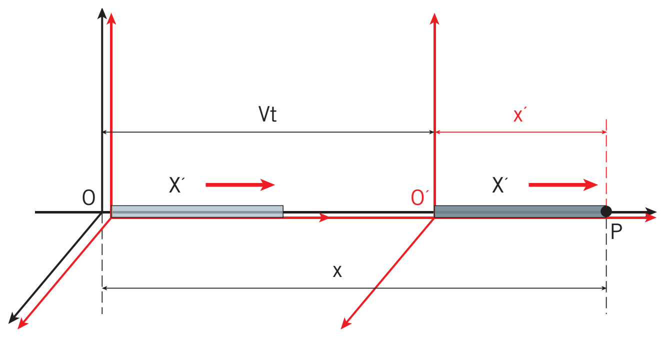
Le leggi della meccanica di Galileo Galilei e di Newton soddisfano il principio di relatività se si ammette che siano valide le trasformazioni di Galileo. Tuttavia se tali trasformazioni vengono applicate alle equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo, il principio di relatività non è più rispettato. Le equazioni di Maxwell prevedono infatti che la velocità di un'onda elettromagnetica nel vuoto abbia un certo valore c: poiché l'onda elettromagnetica si propaga nel vuoto ciò significa che le si può attribuire solamente la velocità rispetto a un sistema di riferimento e non rispetto a un mezzo materiale in cui essa si trasmette, come succede ad esempio per le onde meccaniche.

Se per la velocità dell'onda elettromagnetica valesse la regola di composizione galileiana delle velocità, allora in un sistema S' che si muove a velocità V lungo la direzione x rispetto al sistema S in cui le onde hanno velocità c, la velocità risulterebbe $c + V$. Misurando la velocità di un'onda elettromagnetica nel vuoto sarebbe allora possibile determinare la velocità assoluta di un sistema di riferimento inerziale. Poiché le equazioni di Maxwell sono state ampiamente verificate dagli esperimenti, si deve concludere che le trasformazioni di Galileo sono sbagliate.

Sulla base della proprietà di contrazione delle lunghezze in movimento, si possono dedurre le trasformazioni di coordinate che sono in accordo con i postulati della relatività ristretta. Facendo riferimento alla figura 1, per l'osservatore S il segmento X' è in movimento con velocità V per cui la sua lunghezza in movimento $x - Vt$ risulta contratta rispetto alla lunghezza a riposo x' o, equivalentemente, x' risulta dilatato rispetto a $x - Vt$:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Figura 1
L'osservatore S vede il segmento X' traslare con velocità V lungo la direzione positiva dell'asse x.



Facendo invece riferimento alla figura **2**, per l'osservatore S' è il segmento X che si muove a velocità V, per cui la sua lunghezza in movimento $x' - Vt'$ risulta contratta rispetto alla lunghezza a riposo x:

$$x' + Vt' = x\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Sostituendo x' nelle seconda equazione si ottiene:

$$\frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + Vt' = x\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Risolvendo rispetto a t' si ricava infine:

$$t' = \frac{x}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{\frac{x}{V} - t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{x}{V}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{x}{V} + t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

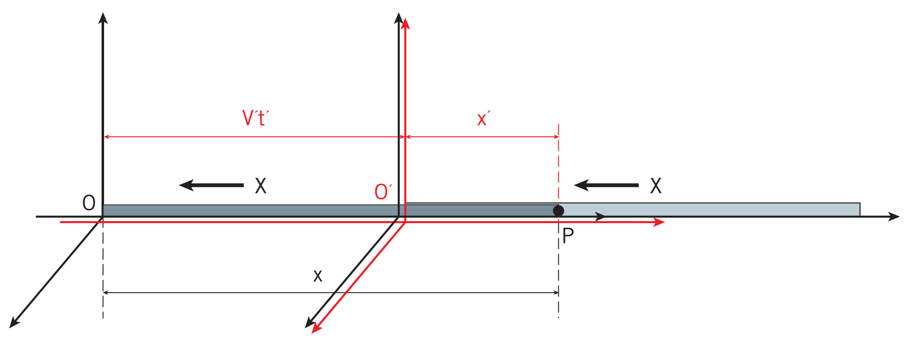


Figura 2
L'osservatore *S'* vede il segmento *X* traslare con velocità *V* lungo la direzione negativa dell'asse *x'*.

Le coordinate y e z si trasformano invece come nelle trasformazioni di Galileo, dato che per esse non si ha alcuna contrazione di lunghezza. Le trasformazioni così ottenute si chiamano **trasformazioni di Lorentz**:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Quando $V \ll c$ le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo, perché si può trascurare la contrazione delle lunghezze in movimento. Tuttavia, questa approssimazione è valida solo in una regione limitata dello spazio-tempo: se si osserva l'equazione di trasformazione della coordinata temporale si vede che, affinché risulti $t' \cong t$, occorre che sia soddisfatta anche la condizione $|ct/x| \gg |V|/c$.

Per simmetria, le **trasformazioni di Lorentz inverse** si ottengono da quelle dirette scambiando t', x', y', z' con t, x, y, z e sostituendo V con $-V$.

Si può verificare che, se si considerano due eventi E_1 e E_2 le cui coordinate in S sono (t_1, x_1, y_1, z_1) e (t_2, x_2, y_2, z_2), allora le variazioni $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$,

$\Delta z = z_2 - z_1$, delle loro coordinate si trasformano anch'esse secondo le trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

A partire da queste ultime equazioni, si ricavano le formule della composizione relativistica delle velocità.

A causa della dilatazione dei tempi e della conseguente contrazione delle lunghezze, la distanza spaziale $\Delta l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$ e quella temporale $\Delta t = t_2 - t_1$ tra due eventi (t_1, x_1, y_1, z_1) e (t_2, x_2, y_2, z_2), risultano diverse quando si passa da un sistema inerziale a un altro in moto rispetto ad esso. Esiste tuttavia un'opportuna combinazione di tali distanze che ha lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali, per cui ad essa si dà il nome di **invariante relativistico**. L'invariante relativistico viene considerato come una specie di distanza o *intervallo* tra due eventi ed è definito come:

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta l^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Applicando le trasformazioni di Lorentz, si verifica che effettivamente esso si trasforma mantenendo invariato il suo valore:

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

Benché l'invariante relativistico compaia nella definizione come elevato al quadrato, il suo valore può essere positivo, negativo, oppure nullo:

- $\Delta s^2 < 0$: si dice che l'intervallo tra i due eventi è di **tipo spazio**; in questo caso la distanza spaziale tra i due eventi è maggiore della distanza che la luce percorre nel vuoto nel corrispondente intervallo di tempo, per cui tra i due eventi non può esserci alcuna relazione di causa-effetto.
- $\Delta s^2 > 0$: si dice che l'intervallo è di **tipo tempo**; tra i due eventi può esistere una relazione di causa-effetto.
- $\Delta s^2 = 0$: si dice che l'intervallo è di **tipo luce**; tra i due eventi può esserci una relazione di causa-effetto solo se è rappresentata da un segnale elettromagnetico che viaggia nel vuoto dalla posizione spaziale del primo evento a quella del secondo.

Applicando le trasformazioni di Lorentz alle equazioni di Maxwell, queste ultime si trasformano mantenendo la stessa espressione in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Le leggi di Newton invece perdono di significato perché risultano incompatibili con i postulati della relatività. Ad esempio, una forza costante applicata a un oggetto per un tempo sufficientemente lungo, nella meccanica newtoniana potrebbe portare l'oggetto a possedere una velocità maggiore di quella della luce.

Le leggi della dinamica in relatività ristretta sono state perciò riformulate e assumono quindi una forma diversa rispetto a quelle di Newton. Questa modifica ha però reso la legge di gravitazione universale scoperta da Newton incompatibile con la relatività, perché la forza di gravitazione non si trasforma come dovrebbe quando si passa da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Inoltre la forza di gravitazione è una forza a distanza, per cui varia istantaneamente quando i corpi interagenti si muovono modificando la loro distanza: questo è incompatibile con il fatto che una qualunque causa non può produrre effetti che si trasmettono a una velocità maggiore di quella della luce. Per questi motivi è stata sviluppata la teoria della relatività generale.

Problemi

1 Trasformazioni di Galileo

1 Considera gli eventi sull'asse x del sistema S aventi le seguenti coordinate: (18 s, 87 m), (12 s, –24 m), (–40 s, 66 m).

▶ Determina le loro coordinate nel sistema S' che si muove a velocità 1,5 m/s rispetto a S.

2 Considera un evento che si verifica sull'asse x. Esso ha coordinate (12 s, 44 m) in S e (12 s, 10 m) in S'.

▶ Determina la velocità con cui si muove S' rispetto a S.

3 Il sistema S' si muove a velocità 0,45 m/s rispetto al sistema S.

▶ Scrivi le corrispondenti trasformazioni di Galileo per x e t.

▶ Come diventano se nel momento in cui O coincide con O′ l'orologio di O′ indica un tempo di 32 s anziché 0 s come invece indica l'orologio di O?

4 Le trasformazioni di Galileo esprimono x' e t' in funzione di x e t.

▶ Ricava le trasformazioni inverse, cioè ricava x e t in funzione di x' e t'.

5 Due eventi di coordinate (24 s, 12 m) e (35 s, 25 m) si verificano sull'asse x' del sistema S'.

▶ A che velocità deve traslare S' affinché i due eventi si verifichino nello stesso punto per S.

▶ Che coordinata x ha tale punto?

6 Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme nel sistema S con legge oraria $x = x_0 + vt$.

▶ Determinare la legge oraria nel sistema di riferimento S'.

7 **ESEMPIO**

Considera due eventi separati da un intervallo temporale $\Delta t = t_2 - t_1$ e che avvengono in due punti dell'asse x la cui distanza è $\Delta x = x_2 - x_1$.

▶ Utilizza le trasformazioni di Galileo per determinare le espressioni di $\Delta x' = x_2' - t_1$ e $\Delta t' = t_2' - t_1$.

La soluzione

Occorre applicare le trasformazioni di Galileo ai due eventi:

$$x_1' = x_1 - Vt_1 \qquad t_1' = t_1$$

$$x_2' = x_2 - Vt_2 \qquad t_2' = t_2$$

per cui

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = x_2 - Vt_2 - (x_1 - Vt_1) = x_2 - Vt_2 - x_1 + Vt_1 = x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1) = \Delta x - V\Delta t$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \Delta t$$

8 Considera la definizione di velocità $v = \Delta x/\Delta t$.

▶ Sulla base della soluzione dell'esercizio precedente, deduci la regola di composizione galileiana delle velocità.

9 Considera la definizione di accelerazione $a = \Delta v/\Delta t = (v_2 - v_1)/(t_2 - t_1)$ relativa a un moto che avviene parallelamente all'asse x.

▶ Considerando la regola di composizione galileiana delle velocità, determina come si trasforma l'accelerazione nel passare dal sistema S al sistema S'.

10 **ESEMPIO**

Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme con legge oraria $x = 0{,}0$ m, $y = (5{,}4\ \text{m/s})t$, $z = 0{,}0$ m nel sistema S.

▶ Determina la corrispondente legge oraria nel sistema S' che trasla parallelamente all'asse x con velocità $V = 1{,}8$ m/s.

▶ Individua l'equazione della traiettoria nel piano $x'y'$ esprimendo y' in funzione di x'.

▶ Qual è il modulo della velocità complessiva nel sistema S'?

La soluzione

▶ Applicando le trasformazioni di Galileo si ottiene:

$$x' = x - Vt = -(1{,}8\ \text{m/s})t = -(1{,}8\ \text{m/s})t'$$

$$y' = y = (5{,}4\ \text{m/s})t = (5{,}4\ \text{m/s})t'$$

$$z' = z = 0{,}0\ \text{m}$$

▶ L'equazione della traiettoria si individua eliminando il tempo t' dalle prime due equazioni:

$$t' = -\frac{x'}{(1{,}8\ \text{m/s})}$$

$$y' = (5{,}4\ \text{m/s})t' = -(5{,}4\ \text{m/s})\frac{x'}{(1{,}8\ \text{m/s})} = -(3{,}0\ \text{m/s})x'$$

Si tratta di una retta con pendenza negativa.

▶ Il moto complessivo è dato dalla composizione dei due moti lungo x' e lungo y'. La velocità complessiva $\vec{v}\,'$ è perciò uguale alla somma vettoriale della velocità $\vec{v}_x'$ e $\vec{v}_y'$. Il suo modulo è dunque:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(1{,}8\ \text{m/s})^2 + (5{,}4\ \text{m/s})^2} = 5{,}7\ \text{m/s}$$

11 Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse z con velocità $v = 2{,}8$ m/s. Il moto viene osservato anche da un sistema S' che si muove con velocità $V = 1{,}2$ m/s lungo l'asse x.

▶ Determina l'angolo che la velocità del corpo nel sistema S' forma con l'asse x'.

12 Alla velocità di 1,5 m/s rispetto al sistema S, Achille insegue una tartaruga che si muove a 0,30 m/s. Inizialmente, Achille si trova nell'origine O di S mentre la tartaruga occupa la posizione $x_0 = 7{,}0$ m. Supponi che il sistema S' si muova come la tartaruga.

▶ Determina la velocità v' di Achille rispetto alla tartaruga.

▶ Quali sono le coordinate in S' dell'evento che si verifica quando Achille raggiunge la tartaruga?

▶ E le corrispondenti coordinate in S?

13 Su una strada (sistema S), un'automobile insegue alla velocità di 95 km/h un furgone che viaggia a 70 km/h. Una motocicletta si muove alla stessa velocità che ha l'automobile rispetto al furgone. Nel determinare la velocità di un corpo rispetto a un altro corpo, considera il secondo corpo come sistema S'.

▶ Determina la velocità dell'automobile rispetto al furgone.

▶ E quella dell'automobile rispetto alla motocicletta?

▶ E infine, quella della motocicletta rispetto al furgone?

14 All'interno di un'astronave lunga 530 m e che si muove parallelamente alla direzione x viene sparato un proiettile con velocità 130 km/h lungo la direzione x. Una seconda astronave sorpassa la prima impiegando 6,4 s.

▶ A che velocità si muove il proiettile rispetto alla seconda astronave?

15 Per decollare, un certo aereo deve avere una velocità di 280 km/h rispetto all'aria.

▶ Che velocità deve raggiungere l'aereo per decollare contro un vento che viaggia a 80 km/h?

▶ E se invece viaggia a favore di vento?

16 Un nuotatore nuota in un torrente per 2,0 minuti controcorrente, poi inverte il suo moto e nuota per altri 2,0 minuti a favore di corrente. La velocità della corrente nel torrente è 0,80 km/h. Lo spazio complessivo percorso dal nuotatore rispetto alla terra ferma è 126 m.

▶ Calcola la velocità del nuotatore rispetto all'acqua del torrente;

▶ e rispetto alla terra ferma.

17 Una barca deve percorrere un tratto di 12 km verso la foce di un fiume la cui velocità è di 1,3 m/s. La barca ha una velocità di 3,5 m/s rispetto all'acqua.

▶ Quanto dura il viaggio di andata e ritorno in minuti?

18 Un corpo si muove nel sistema S di moto rettilineo uniformemente accelerato con legge oraria

$$x = x_0 + x_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

▶ Determinare la legge oraria nel sistema di riferimento S' che si muove con velocità V parallelamente all'asse x.

19 Un corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato nel sistema S con legge oraria $x = (0{,}25\ \text{m/s}^2)\ t^2$.

▶ Quanto vale la sua accelerazione?

▶ Determinare la legge oraria nel sistema di riferimento S' che si muove con velocità 1,1 m/s parallelamente all'asse x.

▶ In quale istante il corpo si viene a trovare nell'origine O′ di S'?

20 In un certo istante t, gli estremi di un righello hanno coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) nel sistema di riferimento S. La lunghezza del righello è quindi

$$L' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

▶ Verifica che la lunghezza

$$L' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}$$

nel sistema S' risulta nello stesso istante uguale a L.

2 Trasformazioni di Lorentz

21 Un evento si verifica nella posizione $x = 8{,}7$ m all'istante $t = 25$ ns.

▶ Quali sono le sue coordinate in un riferimento che si muove alla velocità $0{,}35c$ parallelamente alla direzione x?

22 **ESEMPIO**

L'antenna di una sonda spaziale si trova nella posizione $x = 0$ cm ed emette due impulsi agli istanti 0,00 ns e 0,58 ns.

▶ Determina le coordinate temporale e spaziale di questi due eventi nel sistema di riferimento di un'astronave che si muove parallelamente a x con velocità 0,60 c.

La soluzione

Le coordinate dei due eventi rispetto alla sonda sono ($t_1 = 0{,}00$ ns, $x_1 = 0$ cm) e ($t_2 = 0{,}58$ ns, $x_2 = 0$ cm). Il primo evento ha evidentemente coordinate uguali a zero anche rispetto all'astronave. Le coordinate del secondo evento rispetto all'astronave sono invece

$$x_2' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{0\text{ m} - 0{,}60 \cdot (3{,}00 \cdot 10^8\text{ m/s})(0{,}58 \cdot 10^{-9}\text{ s})}{\sqrt{1 - 0{,}60^2}} = -13\text{ cm}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \dfrac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{0{,}58 \cdot 10^{-9}\text{ s} - 0\text{ s}}{\sqrt{1 - 0{,}60^2}} = 0{,}73\text{ ns}$$

23 Una particella che si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x del sistema S passa dalla posizione 0 cm nell'istante 0,00 ns alla posizione 12 cm nell'istante 1,51 ns. Un'astronave S' si muove parallelamente a x a velocità $2{,}0 \cdot 10^8$ m/s rispetto a S.

▶ Determina le corrispondenti coordinate in S'.

▶ Calcolare la velocità della particella in S e S' sulla base degli eventi indicati.

24 Al fine di sincronizzare un orologio distante 150 km, l'osservatore che si trova nell'origine del sistema fisso invia all'istante $t_0 = 0$ s un impulso luminoso verso l'orologio. Un secondo sistema di riferimento si muove con velocità 0,79 c parallelamente alla direzione dell'impulso.

▶ Determina le coordinate nel sistema fisso e in quello mobile dell'evento di ricezione dell'impulso da parte dell'orologio.

25 All'istante $t = 0$ un impulso luminoso viene inviato verso uno specchio che dista 375 m dall'origine del riferimento, dopo di che l'impulso viene riflesso verso l'origine. Un secondo riferimento che si muove a velocità $0{,}25c$ parallelamente alla direzione dell'impulso, osserva anch'esso il fenomeno.

▶ Calcola le coordinate, sia nel riferimento «fisso» che in quello «mobile», dei due eventi di riflessione dell'impulso da parte dello specchio e di ricezione nell'origine dell'impulso riflesso.

▶ Determina, in entrambi i riferimenti, l'intervallo Δs^2 tra i due eventi di emissione e ricezione dell'impulso nell'origine del primo riferimento.

▶ Calcola di quanto differiscono in percentuale i due intervalli così calcolati.

26 Un impulso luminoso emesso dall'origine di un riferimento «fisso» all'istante $t = 0{,}0$ s raggiunge dapprima un'antenna distante 12 km e quindi una seconda antenna distante 83 km.

▶ Calcola le coordinate di tali due eventi in un riferimento che si muove a velocità $0{,}63c$ parallelamente all'impulso luminoso.

▶ Verifica che anche nel secondo riferimento la velocità con cui l'impulso viaggia tra i due eventi è uguale a c.

27 Due particelle vengono emesse a una distanza spaziale $\Delta x = 523$ m e a una distanza temporale $\Delta t = 75$ nm l'una dall'altra.

▶ A che velocità deve viaggiare parallelamente a x un secondo riferimento al fine di osservare le due particelle emesse contemporaneamente, cioè con distanza temporale $\Delta t' = 0$ (si ricordi che gli intervalli spaziale e temporale soddisfano anch'essi alle trasformazioni di Lorentz)?

28 Due eventi avvengono a una distanza spaziale $\Delta x = 17$ km e a una distanza temporale $\Delta t = 95$ µs l'uno dall'altro.

▶ A che velocità deve viaggiare parallelamente a x un secondo riferimento al fine di osservare i due eventi avvenire nello stesso punto (si ricordi che gli intervalli spaziale e temporale soddisfano anch'essi alle trasformazioni di Lorentz).

▶ Qual è la distanza temporale dei due eventi nel secondo riferimento?

29 Due particelle si muovono di moto vario lungo l'asse x mantenendo in ogni istante costante la loro distanza $\Delta x = 655$ km.

▶ Qual è la loro distanza $\Delta x'$ in un riferimento che si muove a velocità 0,230*c* parallelamente all'asse *x*?

▶ Se in un certo istante si misura nel sistema fisso la distanza tra le posizioni delle due particelle, a che distanza temporale sono visti questi due eventi nel sistema mobile?

30 Un'astronave si allontana a 0,48*c* da una stazione spaziale. All'istante 45 s dall'origine O del riferimento della stazione spaziale viene inviato verso l'astronave un segnale radio.

▶ Determina le coordinate di tale evento nel sistema di riferimento dell'astronave.

▶ Calcola inoltre l'istante in cui l'impulso arriva nell'origine O′ del riferimento dell'astronave.

31 **ESEMPIO**

Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme nel riferimento fisso con legge oraria $x = x_0 + vt$.

▶ Utilizzando le trasformazione di Lorentz inverse, determina la legge oraria nel riferimento mobile.

La soluzione

Nell'istante *t* il corpo occupa la posizione $x = x_0 + vt$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz inverse

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

la legge oraria diventa

$$\frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = x_0 + v\,\frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Risolvendo rispetto a x' si ottiene

$$x' = x_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}\,t'$$

in accordo con la contrazione delle lunghezze e con la composizione relativistica delle velocità.

32 La lunghezza di un'asta in movimento a velocità *V* si determina come differenza $\Delta x = x_2 - x_1$ delle coordinate occupate dai suoi due estremi nello stesso istante $t_1 = t_2 = t$.

▶ Applicando le trasformazioni di Lorentz, mostra che tale lunghezza è contratta rispetto alla lunghezza a riposo $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ dell'asta in un riferimento che si muove quindi a velocità *V* anch'esso.

33 Un riferimento «mobile» si muove alla velocità di $43 \cdot 10^3$ km/h $\ll c$ rispetto a quello fisso. Un certo evento si verifica nel riferimento «fisso» all'istante $t = 87$ s, quindi dopo che le origini dei due riferimenti si sono incontrate, mentre esso si verifica all'istante $t' = -t = -87$ s nel riferimento mobile, perciò prima dell'incontro.

▶ Calcola la coordinata spaziale *x* di tale evento in entrambi i riferimenti.

34 Un'astronave viaggia verso una stazione spaziale alla velocità 0,35*c*. Essa deve inviare dall'origine del suo riferimento verso la stazione un impulso elettromagnetico che deve arrivare all'origine del riferimento della stazione con un anticipo $\tau = -1{,}0$ ore rispetto all'arrivo dell'astronave.

▶ Con che anticipo τ' rispetto all'arrivo deve inviare l'impulso l'astronave? (Calcolare dapprima tale tempo dal punto di vista della stazione spaziale e poi trasformarlo tramite la trasformazioni di Lorentz; considerare inoltre che in tale riferimento sia i tempi che la posizione dell'astronave sono negativi dato che le origini dei due riferimenti si incontreranno quando l'astronave arriverà alla stazione).

Le soluzioni degli esercizi di questa sezione sono disponibili su http://online.scuola.zanichelli.it/cutnellproblemi/