

I 10 quesiti più difficili di matematica

+ 30 da proporre in classe

a cura di

Stefania Pozio

Insegnante di Matematica e Scienze

I. C. Luigi Settembrini, Roma

Collaboratrice INVALSI

1. I calcoli con i numeri grandi

AMBITO Numeri

Che cosa chiede il quesito

Il quesito chiede di mettere in relazione diversi dati presenti nel testo e di fare calcoli con numeri di ordini di grandezza diversi.

- 9,4%
- 17,4%
- 18,9%
- 42,3%
- m.r. 12%
- ✓ 20,8%
- ✗ 37,2%
- m.r. 42%

PROVA NAZIONALE INVALSI 2014

D17 In Italia, secondo gli ultimi dati forniti dall'ISTAT, ci sono circa 600 automobili ogni 1000 abitanti. Gli abitanti dell'Italia sono circa 60 milioni e un'automobile è lunga mediamente 4 metri.



Risposte sbagliate
a. 45,7%
b. 37,2%

Risposte mancate
a. 12,0%
b. 42,0%

a. Immagina di posizionare tutte le automobili che ci sono in Italia una dietro l'altra, formando un'unica fila continua: quanti chilometri sarebbe all'incirca lunga questa fila?

- A. Sarebbe all'incirca lunga come l'Italia (circa 1000 km)
- B. Sarebbe all'incirca lunga come la distanza tra l'Italia e gli USA (circa 6000 km)
- C. Sarebbe all'incirca lunga come l'equatore (circa 40000 km)
- D. Sarebbe all'incirca lunga come il diametro del pianeta Giove (circa 143000 km)

b. Scrivi i calcoli che hai fatto per arrivare alla risposta.

Con i numeri

$$60\ 000\ 000 : 1000 = 60\ 000$$

$$600 \cdot 60\ 000 = 36\ 000\ 000$$

$$36\ 000\ 000 \cdot 4\ m = 144\ 000\ 000\ m = 144\ 000\ km$$

Con le potenze di 10

$$60 \cdot 10^6 : 10^3 = 60 \cdot 10^3$$

$$6 \cdot 10^2 \cdot 60 \cdot 10^3 = 36 \cdot 10^5 \text{ numero di auto}$$

$$36 \cdot 10^6 \cdot 4\ m = 144 \cdot 10^6\ m = 144 \cdot 10^3\ km$$

Perché hanno sbagliato

È probabile che il 42% degli studenti che non ha indicato il procedimento nella domanda b abbia risposto in modo corretto alla domanda a immaginando che il risultato dovesse essere il numero più grande (143000 km), perché i dati di partenza erano numeri grandi (60 milioni).

Questi risultati fanno capire che gli studenti hanno incontrato difficoltà a:

- mettere in relazione i diversi dati del quesito
- manipolare numeri grandi
- semplificare il quesito: i calcoli sarebbero stati più facili se si fossero usate le potenze di 10.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Numeri** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- dare stime approssimate per il risultato di un'operazione e controllare la plausibilità di un calcolo
- esprimere misure utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [► percentuali delle risposte a pag. 113]

E11 La decima parte di 10^{20} è

- A. 10^{10}
 B. 1^{20}
 C. 100
 D. 10^{19}

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013 [► percentuali delle risposte a pag. 113]

D15 La distanza tra due corpi celesti è 5×10^6 km.

Qual è la distanza equivalente in metri?

- A. 5×10^{18}
 B. 5×10^9
 C. 5×10^3
 D. 5×10^2

PROVA NAZIONALE INVALSI 2014 [► percentuali delle risposte a pag. 113]

D21 Di recente, vicino alle coste americane, una piattaforma petrolifera è esplosa e ha riversato in mare diverse tonnellate di petrolio. Le rilevazioni da satellite, fatte dopo 10 giorni, mostrano l'estensione della macchia di petrolio (la parte scura in figura).

L'estensione della macchia di petrolio è compresa

- A. tra 100 e 200 km²
 B. tra 1000 e 2000 km²
 C. tra 10000 e 20000 km²
 D. tra 100000 e 200000 km²



133 km

2. Il teorema di Pitagora in contesti reali

AMBITO Spazio e figure

Che cosa chiede il quesito

Il quesito chiede di riconoscere che la sbarretta AB è l'ipotenusa di un **triangolo rettangolo**: per calcolarne la lunghezza è necessario applicare il **teorema di Pitagora**.

Il triangolo rettangolo non è direttamente visibile, ma deve essere immaginato. Le misure dei cateti del triangolo vanno dedotte guardando la figura. È necessario comprendere che al cateto maggiore vanno aggiunti 5 dm alle misure già fornite (10 dm) e che il cateto minore è uguale al lato del quadrato (5 dm), in quanto parallelo.

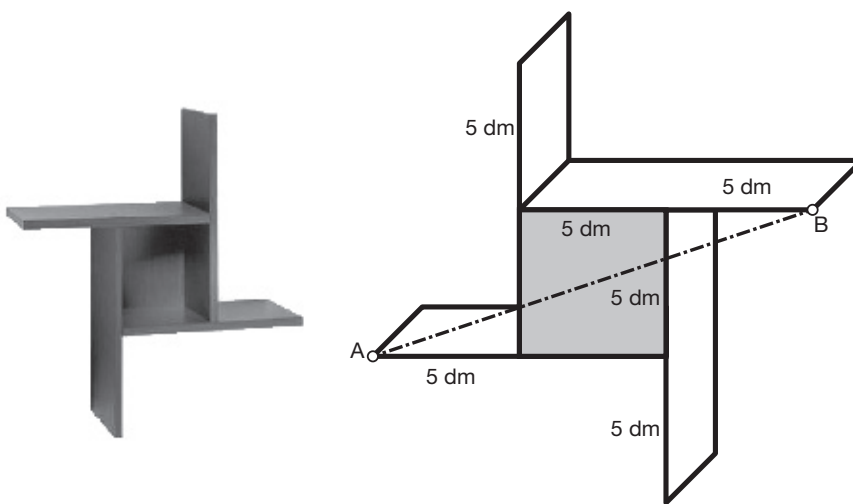
PROVA NAZIONALE INVALSI 2014

D19 Leonardo vuole costruire una mensola come quella in figura. La parte sporgente delle assi della mensola è di lunghezza uguale a quella del lato del quadrato centrale.

X

Risposte sbagliate
a. 37,3%
b. 44,5%

Qui sotto è riportato lo schema della parte posteriore della mensola con le misure. Affinché la mensola sostenga il peso dei libri è necessario mettere una sbarretta d'acciaio che colleghi il punto A con il punto B, come nello schema.



a. Quanto deve essere lunga la sbarretta?

- A. Circa 11 dm
- B. Circa 16 dm
- C. Circa 20 dm
- D. Circa 25 dm

b. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

Applico il Teorema di Pitagora al triangolo di cateti 15 dm e 5 dm.

$$\sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{225 + 25} = \sqrt{250} = \text{circa } 16 \text{ dm}$$

7,7%
56,5%
15,7%
13,9%
m.r. 6,2%

✓ 26,4%
✗ 44,5%
m.r. 29,1%

Perché hanno sbagliato

È difficile per gli studenti riuscire ad applicare il teorema di Pitagora in contesti diversi da quelli abituali, cioè da triangoli rettangoli chiaramente individuabili da subito nella figura geometrica. Il fatto che alla prima domanda abbia risposto in modo corretto più del 50% degli studenti – mentre solo un quarto sia riuscito a spiegare i calcoli effettuati per arrivare alla soluzione – dimostra che molti studenti hanno fornito una risposta basandosi su una stima della lunghezza della sbarretta AB.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Spazio e figure** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

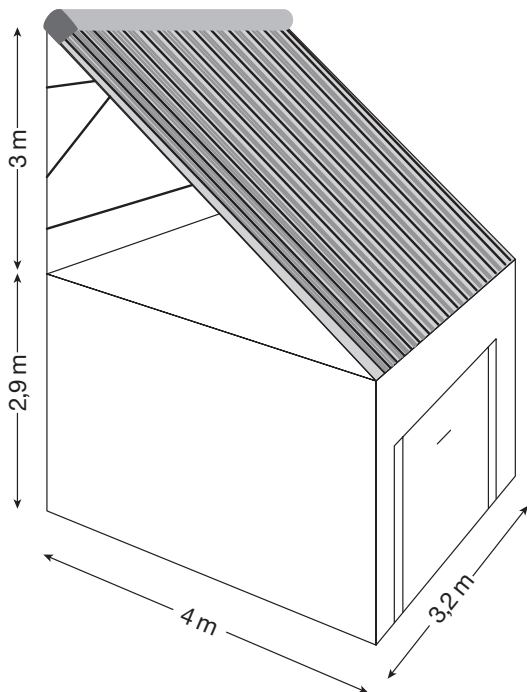
- applicare il teorema di Pitagora in matematica e in situazioni concrete
- saper riconoscere e risolvere problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza
- rafforzare un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative
- capire come gli strumenti matematici appresi siano utili per operare nella realtà.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013 [► percentuali delle risposte a pag. 113]

D3 Marco vuole installare dei pannelli solari sul tetto del suo box auto.

La superficie su cui poggeranno i pannelli deve essere inclinata per ricevere i raggi del sole nel modo più efficace. Il progetto di Marco è schematizzato nella figura.



a. La superficie che misura i pannelli solari misura

- A. 12 m^2
- B. $12,8 \text{ m}^2$
- C. 16 m^2
- D. $16,4 \text{ m}^2$

b. Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

I 10 quesiti INVALSI più difficili

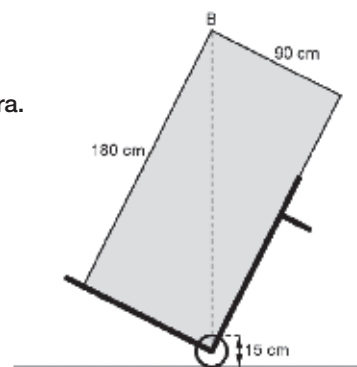
PROVA NAZIONALE INVALSI 2015 [▶ percentuali delle risposte a pag. 113]

D26 Gabriele ha comperato un nuovo frigorifero.

Per portarlo in cucina usa un carrello, come rappresentato nella figura.

Quale espressione ti permette di calcolare la massima distanza dal suolo del punto B quando il frigorifero è trasportato sul carrello?

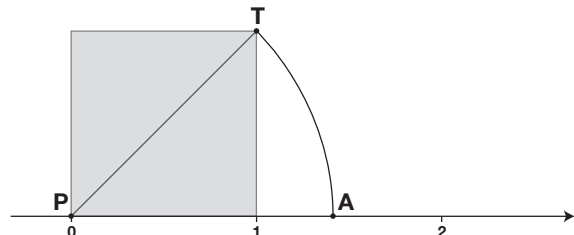
- A. $\sqrt{180^2 + 90^2} + 7,5$
- B. $\sqrt{180^2 - 90^2} + 7,5$
- C. $\sqrt{180 + 90} + 7,5$
- D. $\sqrt{180^2 + \sqrt{90^2}} + 7,5$



PROVA NAZIONALE INVALSI 2016 [▶ percentuali delle risposte a pag. 113]

D14 In figura sono rappresentati:

- la retta dei numeri sulla quale è stato disegnato un quadrato;
- un arco TA di circonferenza di centro P e raggio PT.



Completa la frase

Il punto A sulla retta dei numeri corrisponde al numero $\sqrt{\dots}$.

3. I vincoli matematici

AMBITO Relazioni e funzioni

Che cosa chiede il quesito

Il quesito chiede di tener conto che il vincolo su T – punteggio attribuito alla tesi di laurea – si traduce in un **vincolo** su V – voto di laurea.

Per rispondere lo studente deve sostituire M – media dei voti – con il valore fornito nel quesito stesso.

PROVA NAZIONALE INVALSI 2016

D23 Per calcolare il voto V di laurea in alcune facoltà viene applicata la seguente formula:

$$V = \frac{M}{3} \cdot 11 + T$$

dove:

- M rappresenta la media dei voti (variabile da un minimo di 18 a un massimo di 30)
- T è il punteggio attribuito alla tesi di laurea (variabile da un minimo di 5 a un massimo di 11 punti)

a. La media M dei voti di Irene è 24. Il suo voto di laurea può essere 90? Scegli la risposta e completa la frase.

- Sì, perché
-
-
- No, perché $\frac{24}{3} \cdot 11 + 5 = 93$ e $\frac{24}{3} \cdot 11 + 11 = 99$
quindi il voto minimo è 93 e il voto massimo è 99
-
-

X

Risposte sbagliate
39,4%

Risposte mancate
25,0%

✓ 35,7%

X 39,4%

m.r. 25%

Perché hanno sbagliato

In generale gli studenti hanno sbagliato per due motivi:

- non hanno tenuto conto dei vincoli che la domanda fornisce, cioè che il valore di T varia da un minimo di 5 a un massimo di 11. Hanno pensato, infatti, di poter utilizzare qualsiasi numero pur di ottenere 90, il risultato della risposta
- nella domanda non hanno colto la sfumatura lessicale di «può essere 90». Dal momento che 93 è maggiore di 90, hanno pensato che Laura poteva laurearsi anche con questo voto, in quanto minore.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Relazioni e funzioni** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà
- sostenere le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni
- accettare di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di un'argomentazione corretta.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [▶ percentuali delle risposte a pag. 113]

E3 All'università un esame di inglese prevede uno scritto e un orale e il voto massimo per ciascuna prova è 30. Il voto dello scritto vale il doppio rispetto al voto dell'orale.

Piero prende 24 allo scritto e 30 all'orale.

a. Quale sarà il voto finale di Piero nell'esame di inglese?

- A. 25
- B. 26
- C. 27
- D. 28

b. Marco prende 30 allo scritto e 24 all'orale. Come sarà il voto finale di Marco rispetto a quello di Piero? Scegli una delle tre risposte e completa la frase.

- Sarà più alto perché
-
- Sarà più basso perché
-
- Sarà uguale perché
-

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [▶ percentuali delle risposte a pag. 113]

D16 Elisa ha trovato lavoro in una città distante 50 km dal paese dove abita. Deve decidere tra due soluzioni:

- **soluzione A:** trasferirsi nella città dove lavora pagando un affitto di 200 euro al mese
- **soluzione B:** andare e tornare ogni giorno in auto per 22 euro al mese.

L'automobile di Elisa fa 10 km con 1 euro di benzina.

Quale delle due soluzioni le fa spendere di meno? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- La soluzione A, perché
-
- La soluzione B, perché
-

PROVA NAZIONALE INVALSI 2014 [▶ percentuali delle risposte a pag. 113]

D6 Considera il numero 15. Raddoppialo, poi raddoppia il risultato, poi continua a raddoppiare. In questo modo arrivi a trovare tutti i multipli di 15?

Scegli la risposta e completa la frase.

- Sì, perché
-
- No, perché
-

4. La probabilità

AMBITO Dati e previsioni

Che cosa chiede il quesito

Per rispondere correttamente lo studente può ricorrere a diverse strategie:

1. fare riferimento allo **spazio degli eventi** costruendo o immaginando una tabella a doppia entrata con i numeri da 1 a 6. Si renderà conto che i prodotti pari sono più di quelli dispari.
2. ricorrere alla parità o disparità del prodotto di due numeri naturali: $P \times P = P$ / $P \times D = D$ / $D \times P = P$ / $D \times D = D$. In 3 casi su 4 il risultato è pari.
3. considerare che qualunque numero naturale moltiplicato per un numero pari dà come risultato un pari, mentre solo il prodotto fra due dispari dà come risultato un numero dispari.

✓ 32,4%

✗ 55%

m.r. 12,6%

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013

D7 Anna e Daniele giocano con due dadi. Ciascuno tira i due dadi e moltiplica i numeri. Per esempio, in questo caso $4 \times 3 = 12$.

Anna vince se il prodotto è un numero pari.

Daniele vince se il prodotto è un numero dispari.

Hanno la stessa probabilità di vincere?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Sì, perché

.....

.....

.....

No, perché *ci sono più combinazioni pari, quindi si possono ottenere*

più prodotti pari che dispari: un numero pari si ottiene moltiplicando

due numeri pari, ma anche uno pari e uno dispari ($P \times P = P$ e $P \times D = P$).

.....

✗

Risposte sbagliate
55,0%



Perché hanno sbagliato

Uno degli errori più comuni è quello di pensare che la probabilità sia la stessa perché i dadi sono uguali o comunque hanno le stesse caratteristiche: entrambi hanno 6 facce, 3 pari e 3 dispari, i numeri dispari sono tanti quanti i numeri pari.

Un altro errore nasce da un ragionamento sbagliato legato al lancio del dado: se viene lanciato lo stesso numero di volte la probabilità che esca un numero pari o dispari è la stessa, senza considerare che il quesito chiedeva non la probabilità di uscita dei singoli numeri, ma del loro prodotto.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Dati e previsioni** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- intuire e spiegare in situazioni concrete qual è il più probabile di una coppia di eventi, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili
- sapersi orientare nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi) con valutazioni di probabilità
- produrre argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite.

In generale è importante che gli studenti siano capaci di individuare lo **spazio degli eventi**.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

E19 Immagina di lanciare prima una moneta e poi un dado.

- a. Completa la seguente tabella che riassume tutti i casi che possono verificarsi (alcune delle caselle sono già compilate).

		FACCE DEL DADO					
		1	2	3	4	5	6
Testa (T)	T; 1	T; 5
Croce (C)	C; 1	C; 3

- b. La probabilità che escano una croce e un numero dispari è

- A. $1/2$
- B. $3/12$
- C. $3/8$
- D. $2/12$

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

D4 Nel sacchetto A ci sono 4 palline rosse e 8 nere mentre nel sacchetto B ci sono 4 palline rosse e 6 nere.

Giovanni distribuisce fra i due sacchetti altre 6 palline rosse in modo che la probabilità di estrarre una pallina rossa sia la stessa per entrambi i sacchetti.



Quante palline rosse ha aggiunto Giovanni in ciascuno dei due sacchetti?

Sacchetto A:

Sacchetto B:

PROVA NAZIONALE INVALSI 2016 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

D7 Quaranta alunni hanno svolto una prova di Italiano e una di Matematica. In tabella sono riportate le frequenze dei voti ottenuti in ciascuna delle due prove: per esempio, 5 alunni hanno ottenuto come voti 8 in Italiano e 6 in Matematica.

		ITALIANO			
		Voto 5	Voto 6	Voto 7	Voto 8
MATEMATICA	Voto 5	0	0	2	0
	Voto 6	2	7	1	5
	Voto 7	2	1	3	9
	Voto 8	0	1	7	0

Scegliendo a caso un alunno, qual è la probabilità che abbia ottenuto 5 nella prova di Italiano?

Risposta:

5. Le percentuali

AMBITO Numeri

Che cosa chiede il quesito

L'alunno deve essere in grado di confrontare uno sconto espresso in **percentuale**. Può svolgere dei calcoli oppure riconoscere direttamente che il 4% di una spesa inferiore a 100 € è sicuramente un valore inferiore di 4 €, oppure individuare che 4 € corrispondono al 10% di 40 € e non al 4%.

✓ 37,5%
 ✗ 49,3%
 m.r. 13,2%

PROVA NAZIONALE INVALSI 2015

D18 Il signor Giorgi paga per il telefono 40 euro al mese. Decide di cambiare compagnia telefonica e prende in considerazione due offerte:

- **offerta A:** permette un risparmio del 4% rispetto alla sua tariffa attuale
- **offerta B:** permette un risparmio di 4 euro al mese rispetto alla sua tariffa attuale

Con quale delle due offerte il signor Giorgi spenderebbe di meno?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Il signor Giorgi spenderebbe di meno con l'offerta A, perché

.....

Il signor Giorgi spenderebbe di meno con l'offerta B, perché *il risparmio di 4€*

è maggiore del 4% di 40€, uguale a 1,60€. Con l'offerta B spenderebbe 36€

al mese, mentre con l'offerta A 38,40€.

.....

✗

Risposte sbagliate
49,3%

Perché hanno sbagliato

In generale gli studenti hanno sbagliato il calcolo della percentuale, pur scegliendo in molti l'opzione corretta "Il Signor Giorgi spenderebbe di meno con l'offerta B". Secondo alcuni, per esempio il 4% di 40 € è uguale a 10 € e non a 1,60 €. Altri sbagliano e scrivono 0,16 € o 0,04 € (invece di 1,60 €), credendo che sia il 4% espresso sotto forma di numero decimale.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Numeri** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- comprendere il significato di percentuale e saperla calcolare utilizzando strategie diverse
- interpretare una variazione percentuale di una quantità data come una moltiplicazione per un numero decimale
- muoversi con sicurezza nel calcolo anche con i numeri razionali, padroneggiare le diverse rappresentazioni e stimare la grandezza di un numero e il risultato di operazioni
- spiegare il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2010 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

D7 Carla, Luca e Gianni comprano un sacchetto di caramelle.
Carla ne mangia $\frac{1}{5}$ delle caramelle, Luca i due decimi, Gianni il 20%.

Chi ne mangia di più?

- A. Carla
- B. Luca
- C. Gianni
- D. Nessuno: tutti ne mangiano lo stesso numero

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

E15 Una grande azienda nel 2009 aveva 100 impiegati. Nell'anno 2010 il numero degli impiegati è diminuito del 20% rispetto al 2009 mentre nel 2011 è aumentato del 20% rispetto al 2010.

Al termine dei due anni gli impiegati dell'azienda sono

- A. diminuiti del 4%
- B. diminuiti del 10%
- C. aumentati del 4%
- D. aumentati del 10%

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

D8 La seguente tabella riporta i dati sulla cittadinanza degli alunni iscritti a un Istituto Comprensivo:

Tipo di scuola	Totale alunni	Alunni italiani	Alunni stranieri	Percentuale alunni stranieri
Infanzia	200	120	80	40%
Primaria	400	308	92	23%
Secondaria di 1° grado	400	280	120	30%
Totale	1000	708	292

Qual è la percentuale di alunni stranieri dell'intero istituto?

- A. 93%
- B. 41,2%
- C. 31%
- D. 29,2%

6. Il cerchio e la circonferenza in contesti reali

AMBITO Spazio e figure

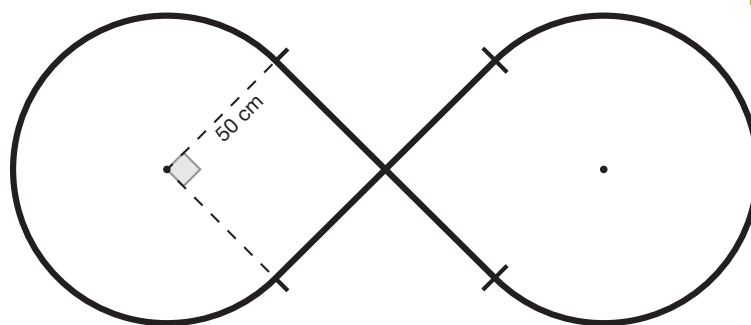
Che cosa chiede il quesito

Il quesito chiede di calcolare la lunghezza di una pista formata da due tratti rettilinei perpendicolari, ciascuno di 100 cm e due archi di circonferenza uguali tra loro e raggio di 50 cm. L'ampiezza degli archi è pari a 270° ($360^\circ - 90^\circ$). La lunghezza di ciascuno sarà quindi uguale al $\frac{3}{4}$ della lunghezza della circonferenza. Poiché gli archi sono due $\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2}\right)$, la loro lunghezza equivale a una circonferenza e mezzo a cui vanno poi sommati i due tratti rettilinei.

PROVA NAZIONALE INVALSI 2015

D17 La figura rappresenta lo schema di una pista formata da:

- due archi di circonferenza di raggio 50 cm;
- due tratti rettilinei di 100 cm ciascuno, perpendicolari tra loro nel punto medio.



Qual è la lunghezza della pista?

Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato.

$$\text{Circonferenza} = d \times \pi = 100 \times 3,14 = 314 \text{ cm}$$

$$\text{Arco corrispondente a } 270^\circ = 235,5 \text{ cm}$$

$$\text{Lunghezza pista} = 235,5 \times 2 + 200 = 671 \text{ cm}$$

Risultato: circa 671 cm

X

Risposte sbagliate
61,9%

Risposte mancate
30,1%

✓ 8%

✗ 61,9%

m.r. 30,1%

Perché hanno sbagliato

Molti studenti hanno sbagliato perché hanno avuto difficoltà nel calcolo della misura della circonferenza in particolare nell'utilizzo del π . Infatti, era necessario che il π fosse trasformato in 3,14 affinché la lunghezza della circonferenza potesse essere sommata con i 200 cm dei tratti rettilinei.

Altri studenti non hanno considerato necessario calcolare solo il $\frac{3}{4}$ della circonferenza e non la circonferenza intera. Altri ancora hanno svolto il procedimento corretto, ma all'ultimo hanno sommato i numeri con il π (lunghezza della circonferenza) con i tratti rettilinei.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Spazio e figure** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- stimare per difetto e per eccesso l'area di una figura delimitata anche da linee curve
- manipolare il numero π e le sue approssimazioni
- calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza, conoscendo il raggio, e viceversa
- spiegare il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2008 [▶ percentuali delle risposte a pag. 114]

C4 Vuoi costruire un portapenne di forma cilindrica, di volume $192\pi \text{ cm}^3$.

Se il diametro di base misura 8 cm, quanto sarà alto il portapenne?

- A. 3 cm
- B. 6 cm
- C. 9 cm
- D. 12 cm

PROVA NAZIONALE INVALSI 2010 [▶ percentuali delle risposte a pag. 114]

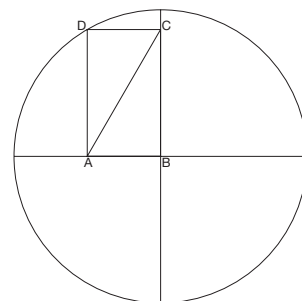
D23 La circonferenza in figura ha il raggio di 4 cm. ABCD è un rettangolo.

a. Qual è la lunghezza (in cm) del segmento AC?

Risposta:

b. Giustifica la tua risposta:

.....



PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [▶ percentuali delle risposte a pag. 114]

E8 Per scavare le gallerie di una linea metropolitana si fa uso di una macchina cilindrica che sposta la terra, come quella che vedi in figura.

La galleria che la macchina riesce a scavare ha un diametro di 6,80 m. Oggi la macchina ha scavato un tratto lungo 10 m.

Il volume di terra che è stato rimosso è

- A. circa 70 m^3
- B. circa 120 m^3
- C. circa 360 m^3
- D. circa 470 m^3



7. Le proprietà dei numeri

AMBITO Relazioni e funzioni

Che cosa chiede il quesito

Il quesito richiede di fornire un'argomentazione a supporto di un'affermazione relativa al risultato di operazioni (aggiungere 1) con **numeri naturali** legati da specifiche **proprietà**, ovvero che «la somma di questi due numeri sia pari». Poiché si tratta di generalizzare, non sono considerate corrette le risposte che si riferiscono a esempi specifici.

✓ 48%

✗ 41,1%

m.r. 10,9%

PROVA NAZIONALE INVALSI 2014

D14 La somma di due numeri naturali a e b è pari.

Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma?

✗

Risposte sbagliate
41,1%

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

La somma sarà pari perché

$$\begin{cases} (a+b)=2c \\ (a+1)+(b+1)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2c-b \\ 2c-b+1+b+1=x \end{cases} \Rightarrow x=2c+2$$

Se un'incognita è uguale a un numero pari (2c) a cui si somma 2,

allora l'incognita è pari.

La somma sarà dispari perché

Perché hanno sbagliato

La maggior parte degli studenti non è stata in grado di generalizzare, ma ha scritto casi particolari in cui dimostrava che la somma era effettivamente ancora pari. Un altro errore comune è stato di pensare che se la somma di due numeri è pari, necessariamente i due numeri sono uguali fra loro e quindi pari. La consapevolezza che una somma pari di due numeri possa essere il risultato anche di numeri dispari diversi tra loro è quasi assente nelle risposte degli studenti.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Relazioni e funzioni** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- produrre argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (per esempio saper utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).

► **Quesiti da proporre in classe**

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

E5 Se a è un numero dispari, quale delle seguenti affermazioni, relative a $3(a+1)$, è corretta?

- A. $3(a+1)$ è dispari, perché il triplo di un numero è dispari
- B. $3(a+1)$ è dispari, perché il prodotto di due numeri dispari è dispari
- C. $3(a+1)$ può essere pari o dispari, perché, per esempio, $3 \times 2 = 6$ e $3 \times 5 = 15$
- D. $3(a+1)$ è pari, perché $(a+1)$ è un numero pari

PROVA NAZIONALE INVALSI 2015 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

D23 Considera due numeri naturali qualsiasi s e t . Se $a = 3s$ e $b = 3t$, allora $a + b$ è sempre divisibile per 3 perché...

- A. $a + b = 3s + 3t = 3 \cdot (s + t)$
- B. $a + b = 3$
- C. $a + b = 6 + 9 = 15$
- D. $a + b = 3s + 3t = 3 \cdot s + t$

PROVA NAZIONALE INVALSI 2016 [► percentuali delle risposte a pag. 114]

D15 n è un numero naturale. Considera l'affermazione: "Se n è pari allora $n + 1$ è un numero primo". L'affermazione è vera o falsa?

Scegli la risposta e completa la frase.

- L'affermazione è vera perché
-
-
- L'affermazione è falsa perché
-
-

8. Gli indici statistici: media, moda e mediana

AMBITO Dati e previsioni

Che cosa chiede il quesito

Il quesito chiede allo studente di posizionare su un grafico un dato incognito di una distribuzione di cui si conoscono tutti gli altri valori registrati, la **media** e lo **scarto** dalla media.

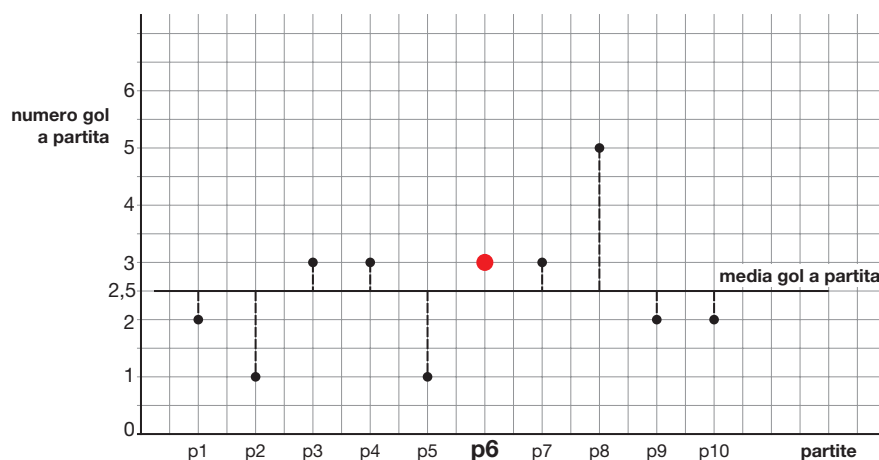
PROVA NAZIONALE INVALSI 2016

D10 Il grafico in figura rappresenta il numero di gol a partita realizzati dalla squadra di calcio del San Lorenzo durante l'ultimo campionato. La linea continua corrisponde alla media dei gol a partita per le 10 partite di campionato.

X

Risposte sbagliate
36,6%

Risposte mancate
15,1%



✓ 48,3%
X 36,6%
m.r. 15,1%

Segna sul grafico il punto corrispondente al numero di gol realizzati dal San Lorenzo nella sesta partita (p6) di campionato.

Per poter rispondere a questa domanda si possono utilizzare diverse strategie.

- *Posso risolvere il quesito con un'equazione del tipo*

$$(2+1+3+3+1+x+3+5+2+2):10=2,5 \quad (22+x):10=2,5 \quad 22+x=25 \quad x=3$$

Oppure

- *Posso considerare che la somma degli scarti deve essere uguale a 0 e quindi determinare lo scarto relativo alla sesta partita come valore che annulla la somma degli scarti.*

Oppure

- *Posso risolvere il quesito anche graficamente eliminando gli scarti relativi che si compensano fra loro.*

Perché hanno sbagliato

Gli studenti italiani non sono abituati a lavorare sulla media, e in particolare, a ragionare sull'idea che la somma degli scarti dalla media debba essere nulla. Infatti, sarebbe stato sufficiente limitarsi a osservare la disposizione dei punti rispetto alla linea della media. Molti studenti hanno sommato i dati presenti, ma hanno diviso per 9 invece che per 10.

Suggerimenti didattici

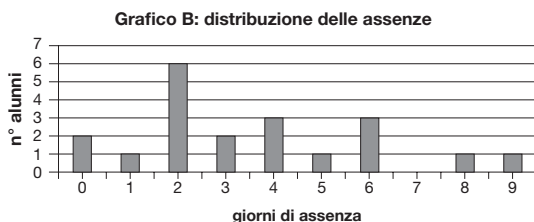
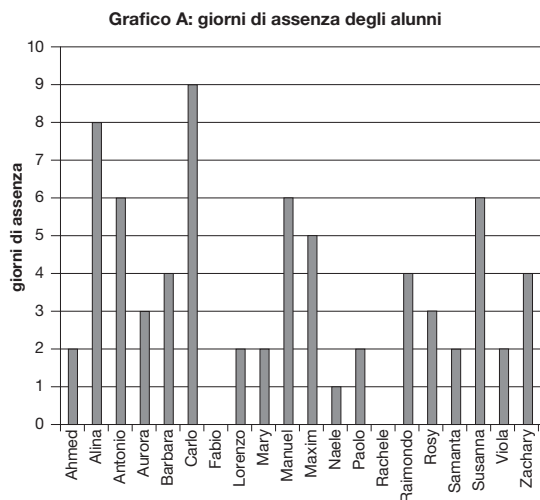
Le Indicazioni nazionali per **Spazio e figure** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- scegliere e utilizzare valori medi (moda, mediana, media aritmetica) adeguati alla tipologia e alle caratteristiche dei dati a disposizione
- riconoscere e risolvere problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza
- analizzare e interpretare rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013 [▶ percentuali delle risposte a pag. 115]

D26 Il Grafico A e il Grafico B rappresentano le assenze del primo quadrimestre di una classe di 20 alunni.



a. Qual è la moda delle assenze?

Risposta: giorni

PROVA NAZIONALE INVALSI 2014 [▶ percentuali delle risposte a pag. 115]

D15 Una scuola ha dieci classi, con una media di 22 alunni per classe.

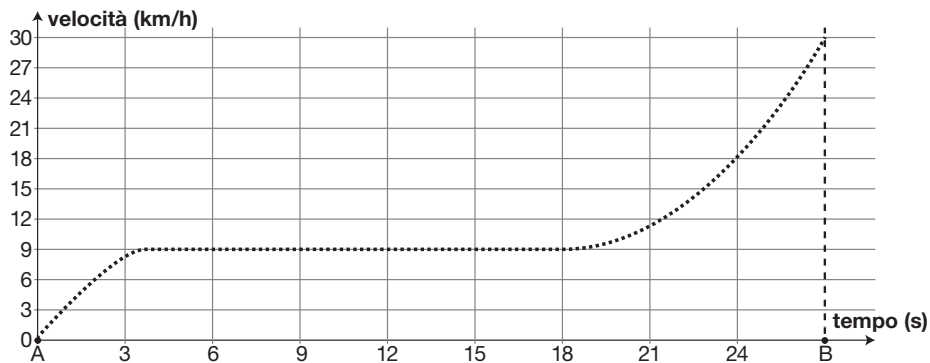
Le classi con 21 alunni sono sei; le classi con 24 alunni sono tre.

Quanti alunni ci sono nella decima classe?

- A. 20
- B. 22
- C. 23
- D. 25

PROVA NAZIONALE INVALSI 2015 [▶ percentuali delle risposte a pag. 115]

D14 Luca percorre una strada in bicicletta e, con l'aiuto del computer, registra la propria velocità ogni decimo di secondo. Il grafico in figura rappresenta le diverse velocità raggiunte da Luca al passare del tempo.



Qual è la moda delle velocità raggiunte da Luca tra l'istante A e l'istante B?

Risposta:km/h

9. Le proprietà delle figure geometriche

AMBITO Spazio e figure

Che cosa chiede il quesito

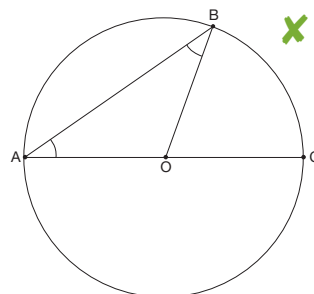
Il quesito richiede una visualizzazione "dinamica" della figura disegnata e di cogliere la relazione tra il raggio della circonferenza e i lati del triangolo. È richiesta anche un'argomentazione della risposta corretta. Non è sufficiente che lo studente si basi su un'evidenza visiva ("ho misurato e sono uguali" oppure "si vede a occhio che sono uguali"), è necessario che lo studente lo dimostri mettendo in luce le **proprietà geometriche** del triangolo isoscele.

✓ 23,7%
 ✗ 59,5%
 m.r. 16,8%

PROVA NAZIONALE INVALSI 2016

D6 Osserva la figura. AC è il diametro di una circonferenza di centro O.

Nel triangolo AOB, l'angolo $\widehat{B\hat{A}O}$ è uguale all'angolo $\widehat{O\hat{B}A}$. Immagina di muovere il punto B sulla circonferenza. Gli angoli $\widehat{B\hat{A}O}$ e $\widehat{O\hat{B}A}$ sono ancora uguali tra loro?



Risposte sbagliate 59,5%

Scegli la risposta e completa la frase.

- Sì, perché *AO e OB sono congruenti in quanto raggi della circonferenza.*
Il triangolo AOB è dunque isoscele e gli angoli alla base sono congruenti.
- La somma sarà dispari perché

Perché hanno sbagliato

Molti studenti hanno provato a rispondere, ma non hanno saputo argomentare questioni geometriche in problemi non convenzionali, perché poco abituati. L'errore commesso da alcuni è stato di concentrarsi sull'uguaglianza dei lati senza però specificare che si trattava di raggi dello stesso cerchio. Altri hanno disegnato diversi triangoli spostando il punto B sulla circonferenza, senza riuscire però a cogliere che tutti i triangoli disegnati fossero isosceli e quindi con gli angoli alla base uguali. Infatti, in generale la difficoltà più diffusa è stata quella di non riconoscere che AOB era un triangolo isoscele.

Suggerimenti didattici

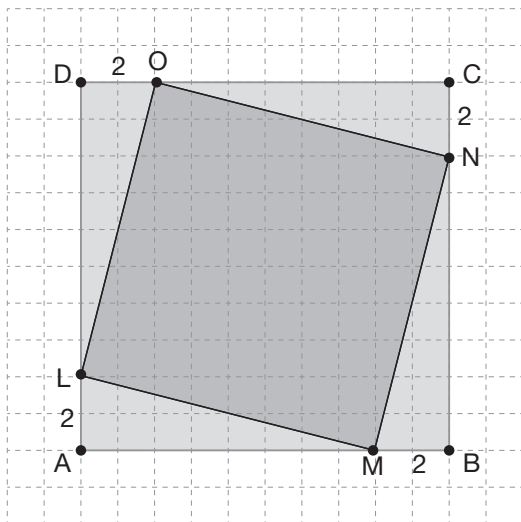
Le Indicazioni nazionali per **Spazio e figure** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

- utilizzare proprietà (angoli, assi di simmetria, diagonali, ...) delle principali figure piane (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchio)
- risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure
- produrre argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (per esempio saper utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [► percentuali delle risposte a pag. 115]

E14 In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un quadrato LMNO. I segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

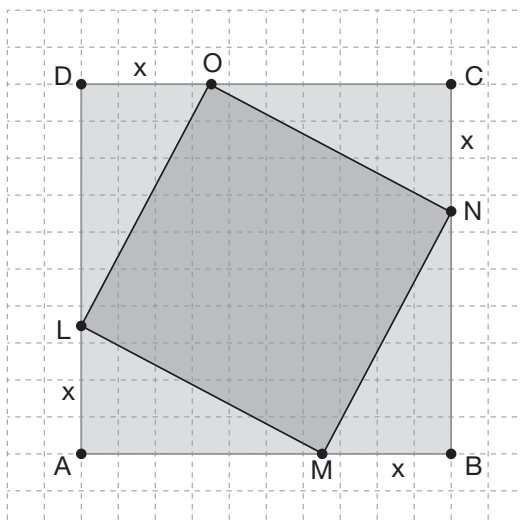


$$DO = CN = BM = AL = 2 \text{ cm}$$

a. Quanto misura l'area del quadrato LMNO?

Risposta: cm²

Immagina ora che i punti L, M, N e O si muovano lungo i lati del quadrato ABCD in modo tale che $DO = CN = BM = AL = x$. Al variare di x varia anche l'area del quadrato LMNO.



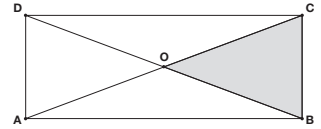
$$DO = CN = BM = AL = x$$

b. Per quale tra questi valori di x l'area del quadrato LMNO diventa minima?

- A. 1 cm
- B. 3 cm
- C. 5 cm
- D. 8 cm

PROVA NAZIONALE INVALSI 2012 [▶ percentuali delle risposte a pag. 115]

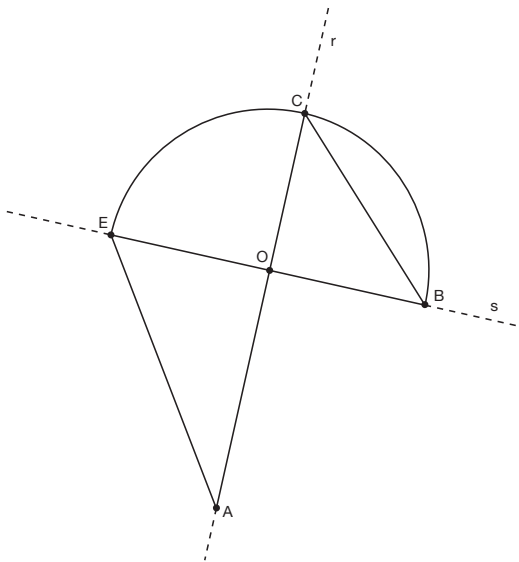
E6 In figura è rappresentato il rettangolo ABCD con le sue diagonali. Se conosci l'area del rettangolo, puoi calcolare l'area del triangolo in grigio?



- A. No, perché i quattro triangoli di vertice O non sono tutti uguali fra loro
- B. No, perché non conosco le dimensioni del rettangolo
- C. Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono equivalenti
- D. Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono isosceli

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013 [▶ percentuali delle risposte a pag. 115]

D11 Nella seguente figura le rette r ed s sono perpendicolari tra loro e BCE è una semicirconferenza di centro O. La lunghezza del segmento AO è di 18 cm e la lunghezza del segmento OB è di 12 cm.



a. Congiungi C con E.
Qual è l'area del triangolo AEC?

- A. 90 cm²
- B. 108 cm²
- C. 180 cm²
- D. 216 cm²

b. Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.

.....

.....

.....

.....

10. Le formule

AMBITO Relazioni e funzioni

Che cosa chiede il quesito

Lo scopo del quesito è verificare se gli studenti sono in grado di modellizzare, usando l'algebra, il funzionamento di una leva, oggetto già noto per i ragazzi della scuola secondaria di I grado.

In particolare, la domanda a chiede di riconoscere la relazione tra i parametri presenti nello stimolo e le caratteristiche della forbice della fotografia.

La domanda b, invece, vuole verificare la capacità di passare dalla formula alla rappresentazione verbale, questa volta immaginando il tipo di forbice a cui ci si riferisce.

PROVA NAZIONALE INVALSI 2013

D6 Quando si taglia un oggetto con una forbice, si esercita una forza (S), mentre l'oggetto che si vuole tagliare oppone una resistenza (T).

X

Risposte sbagliate
a. 45,5%
b. 37,8%

La formula

$$S = \frac{L \times T}{M}$$

permette di calcolare la forza che si esercita con una forbice, tenendo conto di due elementi: la distanza (L) tra il perno fisso intorno a cui si muovono le lame e il punto in cui viene opposta la resistenza al taglio, e la distanza (M) tra l'impugnatura e il perno fisso.

La forbice nella foto viene utilizzata per potare gli alberi.



a. Quale fra le seguenti formule descrive meglio una forbice come quella in fotografia?

10,5%

A. $S = \frac{7 \times T}{1}$

50,2%

B. $S = \frac{1 \times T}{7}$

18,2%

C. $S = \frac{2 \times T}{4}$

16,8%

D. $S = \frac{4 \times T}{2}$

m.r. 4,3%

b. Quale tra le seguenti frasi corrisponde alla forbice descritta da questa formula?

9,4%

A. Una forbice con le lame molto corte, affilate e l'impugnatura molto robusta

13,6%

B. Una forbice con le lame lunghe come la distanza fra il perno fisso e l'impugnatura

56,9%

C. Una forbice con le lame più lunghe della distanza fra il perno fisso e l'impugnatura

14,8%

D. Una forbice con le lame più corte della distanza fra il perno fisso e l'impugnatura

m.r. 5,3%

Perché hanno sbagliato

Nella *domanda a* la difficoltà maggiore degli studenti è comprendere la relazione tra M e L . La forbice della foto infatti ha manici molto lunghi rispetto alla superficie di taglio: il parametro M deve essere quindi molto più grande rispetto al parametro L . Gli studenti che scelgono l'opzione A invertono i parametri, mentre quelli che scelgono le opzioni C e D sbagliano totalmente la relazione (doppio-metà) in quanto in contraddizione con la figura. Nella *domanda b* la difficoltà risiede nel riuscire a immaginare un oggetto concreto a partire da una formula matematica. Gli studenti che scelgono l'opzione A dimostrano di non comprendere il senso della formula e quelli invece che scelgono l'opzione B o D non danno la giusta interpretazione ai numeri presenti nella formula.

Suggerimenti didattici

Le Indicazioni nazionali per **Numeri** e per i **Traguardi** da raggiungere alla fine della scuola secondaria di I grado raccomandano che lo studente sia capace di:

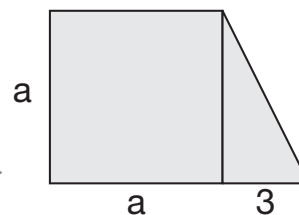
- interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà
- usare e interpretare il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto con il linguaggio naturale.

► Quesiti da proporre in classe

PROVA NAZIONALE INVALSI 2009 [► percentuali delle risposte a pag. 115]

D18 Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui a fianco, al variare della lunghezza a .

Risposta: $A = \dots\dots\dots$



PROVA NAZIONALE INVALSI 2011 [► percentuali delle risposte a pag. 115]

D17 La formula $L = L_0 + K \times P$ esprime la lunghezza L di una molla al variare del peso P applicato. L_0 rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; K indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando le si applica un'unità di peso.

Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: "È una molla molto corta e molto dura (cioè molto resistente alla trazione)"?

- A. $L = 10 + 0,5 \times P$
- B. $L = 10 + 7 \times P$
- C. $L = 80 + 0,5 \times P$
- D. $L = 80 + 7 \times P$

PROVA NAZIONALE INVALSI 2015 [► percentuali delle risposte a pag. 115]

D28 Il volume del parallelepipedo rettangolo si trova con la seguente formula: $V = a \cdot b \cdot c$ dove a , b e c sono le misure degli spigoli.

Lo spigolo c di un parallelepipedo rettangolo misura 5 cm e il volume è 45 cm³.

Quale delle seguenti formule esprime la relazione tra le misure degli spigoli a e b del parallelepipedo?

- A. $a + b = 9$
- B. $a \cdot b = 9$
- C. $a + 9 = b$
- D. $a \cdot 9 = b$

Percentuali delle risposte dei quesiti da proporre in classe

1. I calcoli con i numeri grandi

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2012 E11	D	✓ 26,2% ✗ 70,9% m.r. 2,9%
Prova nazionale INVALSI 2013 D15	B	✓ 38,9% ✗ 57,6% m.r. 3,5%
Prova nazionale INVALSI 2014 D21	C	✓ 37,7% ✗ 60,7% m.r. 1,6%

2. Il teorema di Pitagora in contesti reali

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2013 D3	A. C B. $\ell = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $5 \cdot 3,2 = 16$	✓ 44,6% ✗ 44,7% m.r. 10,7%
Prova nazionale INVALSI 2015 D26	A	✓ 62,8% ✗ 33,6% m.r. 3,6%
Prova nazionale INVALSI 2016 D14	2	✓ 34,5% ✗ 51,5% m.r. 14,0%

3. I vincoli matematici

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2012 E3	A. B B. Sarà più alto perché <ul style="list-style-type: none"> lo scritto vale il doppio lo scritto vale di più perché $30 \times 2 = 60$ $60 + 24 = 84$ $84 : 3 = 28$ 	✓ 40,3% ✗ 55,3% m.r. 4,3%
Prova nazionale INVALSI 2015 D26	La soluzione A, perché: <ul style="list-style-type: none"> con la B spende 5 € di benzina per 1 viaggio quindi $5 \times 2 = 10$ € al giorno di benzina, $10 \times 22 = 220$ € con la B di benzina paga 220 € mentre nella soluzione A spende 200 € di affitto (anche se non mostra i calcoli) paga solo 200 € mentre con la B se fa 10 km con 1 €, farà 100 km con 10 € al giorno e per 22 giorni spende 220 € con la B per la benzina spende $22 \times 50 \times 2 = 2200$ $2200 : 10 = 220$ € 	✓ 16,5% ✗ 77% m.r. 6,5%
Prova nazionale INVALSI 2014 D6	No, perché... <ul style="list-style-type: none"> sono corrette le risposte che mostrano un controesempio sono accettate le risposte che fanno riferimento al fatto che si generano solo alcuni multipli del 15 con una giustificazione di tipo generale 	✓ 24,0% ✗ 66,2% m.r. 9,8%

I 10 quesiti INVALSI più difficili

4. La probabilità

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2012 E19	A. Prima riga: T;2 / T;3 / T;4 / T;6 Seconda riga: C;2 / C;4 / C;5 / C;6 B. B	✓ 48,0% ✗ 44,5% m.r. 7,5%
Prova nazionale INVALSI 2013 D4	Sacchetto A: 4 Sacchetto B: 2	✓ 42,3% ✗ 53,9% m.r. 3,9%
Prova nazionale INVALSI 2016 D7	$\frac{4}{40}$ oppure $\frac{1}{10}$ oppure 10%	✓ 28,3% ✗ 52,6% m.r. 19,0%

5. Le percentuali

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2010 D7	D	✓ 42,6% ✗ 53,3% m.r. 4,1%
Prova nazionale INVALSI 2012 E15	A	✓ 46,6% ✗ 50,0% m.r. 3,4%
Prova nazionale INVALSI 2013 D8	D	✓ 32,6% ✗ 42,5% m.r. 24,9%

6. Il cerchio e la circonferenza in contesti reali

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2008 C4	D	✓ 67,7% ✗ 26,2% m.r. 6,1%
Prova nazionale INVALSI 2010 D23	A. 4 cm B. Perché AC è la diagonale del rettangolo come BD che è il raggio del cerchio	A. ✓ 37,2% ✗ 26,6% m.r. 36,2% B. ✓ 18,3% ✗ 35,8% m.r. 45,9%
Prova nazionale INVALSI 2012 E8	C	✓ 43,1% ✗ 52,1% m.r. 4,8%

7. Le proprietà dei numeri

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2012 E5	D	✓ 67,7% ✗ 26,2% m.r. 6,1%
Prova nazionale INVALSI 2015 D23	A	A. ✓ 37,2% ✗ 26,6% m.r. 36,2% B. ✓ 18,3% ✗ 35,8% m.r. 45,9%
Prova nazionale INVALSI 2016 D15	L'affermazione è falsa perché... <ul style="list-style-type: none"> sono corrette tutte le risposte che fanno riferimento a un contro esempio. Es. $20 + 1 = 21$ non è primo oppure affermazioni generali che fanno riferimento al fatto che con questo procedimento si trovano tutti i numeri dispari, ma non tutti i dispari sono numeri primi 	✓ 37,1% ✗ 41,4% m.r. 21,6%

8. Gli indici statistici: media, moda, mediana

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2013 D26	2	✓ 52,6% ✗ 29,3% m.r. 18,1%
Prova nazionale INVALSI 2014 D15	B	✓ 61,2% ✗ 37,2% m.r. 1,6%
Prova nazionale INVALSI 2015 D14	9	✓ 68,5% ✗ 25,3% m.r. 6,2%

9. Le percentuali

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2012 E14	A. 68 B. C	A. ✓ 24,2% ✗ 67,0% m.r. 8,8% B. ✓ 32,2% ✗ 62,8% m.r. 5,0%
Prova nazionale INVALSI 2012 E6	C	✓ 24,1% ✗ 74,1% m.r. 1,8%
Prova nazionale INVALSI 2013 D11	A. C B. Si possono calcolare le aree dei due triangoli rettangoli AOE e OEC: Area AOE = $18 \times 12 : 2 = 108 \text{ cm}^2$ Area OEC = $12 \times 12 : 2 = 72 \text{ cm}^2$ Area ACE = $108 + 72 = 180 \text{ cm}^2$ Oppure si può calcolare l'area del deltoido AECEB e dividere a metà per trovare l'area di ACE: $[(30 \times 24) : 2] : 2 = 180 \text{ cm}^2$	✓ 52,9% ✗ 33,2% m.r. 13,9%

10. Le formule

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova nazionale INVALSI 2009 D18	$\frac{(2a + 3) \cdot a}{2}$	✓ 26,8% ✗ 64,3% m.r. 8,9%
Prova nazionale INVALSI 2011 D17	A	✓ 58,3% ✗ 37,6% m.r. 4,1%
Prova nazionale INVALSI 2015 D28	B	✓ 58,3% ✗ 37,1% m.r. 4,6%