

# I 5 quesiti più difficili di matematica

+ 16 da proporre in classe

a cura di

**Emanuela Botta**  
Insegnante di Matematica  
ITIS Galileo Galilei, Roma  
Collaboratrice INVALSI

# 1. Argomentare e dimostrare

AMBITO Spazio e figure

## Che cosa chiede il quesito

Il quesito chiede di **completare la dimostrazione** della verità di un'affermazione in ambito geometrico. La struttura del quesito propone per ogni spazio da riempire una risposta corretta e almeno un distrattore. La risposta è considerata corretta solo se tutti i completamenti sono corretti

Generali  
 ✓ 32,6%  
 ✗ 51,7%  
 m.r. 15,8%

Licei  
 ✓ 50,4%  
 ✗ 40,6%  
 m.r. 9,0%

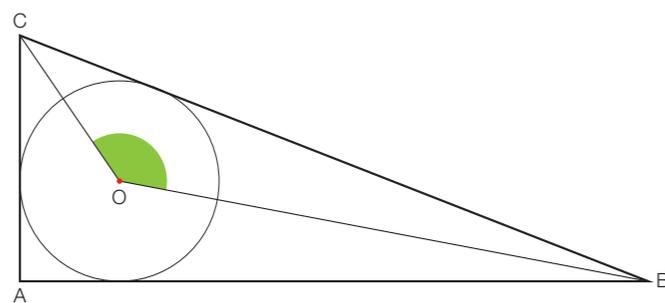
Tecnici  
 ✓ 25,7%  
 ✗ 58,1%  
 m.r. 16,2%

Professionali  
 ✓ 9,4%  
 ✗ 63,0%  
 m.r. 27,6%

## PROVA INVALSI 2017

**D15** ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC e O è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.

Risposte sbagliate  
 51,7%



Si vuole dimostrare che l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{BOC}$  (segnato in figura) è  $135^\circ$ . Completa il testo della dimostrazione scegliendo tra i seguenti termini e prestando attenzione al fatto che ogni termine può essere utilizzato una sola volta:

supplementari | alterni interni | opposti al vertice | complementari | interni di un triangolo |  $180^\circ$  |  $90^\circ$  |  $45^\circ$  |  $360^\circ$

### Dimostrazione:

Il centro O della circonferenza inscritta è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni del triangolo ABC.

Gli angoli  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{ABC}$  sono *complementari*, cioè la loro somma misura  $90^\circ$  perché sono angoli acuti di un triangolo rettangolo. Per quanto affermato

in precedenza la somma degli angoli  $\widehat{OCB}$  e  $\widehat{OBC}$  misura  $45^\circ$ .

Quindi, poiché la somma degli angoli *interni di un triangolo* misura  $180^\circ$  possiamo concludere che  $\widehat{BOC} = 135^\circ$ , che è la tesi.

## Perché hanno sbagliato

La difficoltà presentata dal quesito è duplice: da una parte occorre conoscere le definizioni e le proprietà geometriche necessarie per effettuare la dimostrazione, dall'altra è necessario essere in grado di seguire la logica di dimostrazione scelta dall'autore.

La maggior parte degli studenti che sbagliano non effettua alcun controllo di coerenza sui completamenti e quindi sulla dimostrazione nel suo insieme. Le tre affermazioni da completare sono spesso viste dagli studenti come affermazioni indipendenti.

È interessante osservare che, tranne in rari casi, i distrattori sono stati trattati come suddivisi in due gruppi, quello delle misure e quello delle definizioni o proprietà: per esempio gli studenti hanno spesso inserito, al posto di *complementari*, una voce qualsiasi fra *supplementari*, *alterni interni*, *opposti al vertice* e *interni di un triangolo*.

Gli errori più frequenti degli studenti:

- associano erroneamente le denominazioni *angoli complementari* e *angoli supplementari* alla misura della somma degli angoli presi in considerazione. Molti associano *complementari* ad angoli la cui somma è  $180^\circ$  e *supplementari* ad angoli la cui somma è  $360^\circ$
- collegano erroneamente l'informazione sulle bisettrici alla conclusione che se ne può trarre nel contesto di questa dimostrazione, cioè che la somma degli angoli  $\widehat{OCB}$  e  $\widehat{OBC}$  è  $45^\circ$ , perché ciascuno di essi è la metà di uno degli angoli acuti del triangolo rettangolo.

## Suggerimenti didattici

Le **Indicazioni nazionali per i Licei** come obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio raccomandano che lo studente sia capace di:

- conoscere i fondamenti della geometria euclidea del piano.

Le **Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali**, primo biennio, richiedono invece:

### Conoscenze:

- nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio
- le principali figure del piano e dello spazio

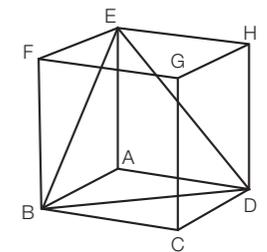
### Abilità:

- comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive.

## ► Quesiti da proporre in classe

**PROVA INVALSI 2012** [▶ percentuali delle risposte a pag. 76]

**D8** La seguente figura rappresenta in prospettiva un cubo che è stato sezionato con il piano passante per i vertici B, D, E.



Marina afferma: "Il triangolo BDE è un triangolo equilatero".

Marina ha ragione?

Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- Sì, perché .....
- .....
- .....
- No, perché .....
- .....
- .....

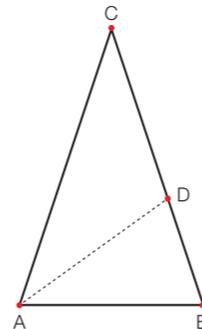
**PROVA INVALSI 2014** ▶ percentuali delle risposte a pag. 76]

**D23** Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB.

L'angolo in C è la metà dell'angolo in B e AD è la bisettrice dell'angolo BÂC.

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	Vero	Falso
a. AD è anche l'altezza relativa al lato BC	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b. L'angolo in B misura 72°	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c. L'area del triangolo ADC è il doppio dell'area del triangolo ABD	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d. $AD : AC = BD : AB$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

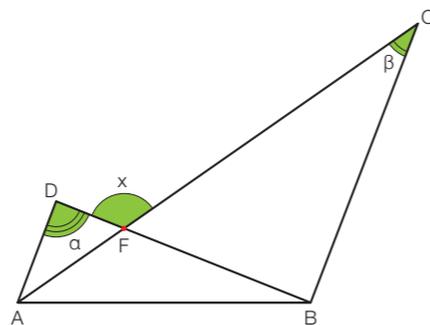


**PROVA INVALSI 2016** ▶ percentuali delle risposte a pag. 76]

**D25** Osserva la figura, in cui AD è parallelo a BC

L'angolo x è uguale a

- A.  $\alpha + \beta$
- B.  $2\beta - \alpha$
- C.  $180^\circ - \alpha$
- D.  $180^\circ - \beta$



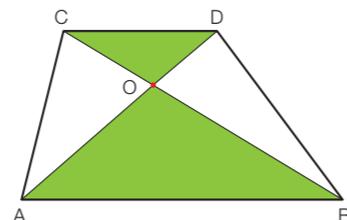
**PROVA INVALSI 2016** ▶ percentuali delle risposte a pag. 76]

**D26** Le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli.

Completa il testo, scegliendo tra i termini riportati.

alterni interni | corrispondenti | AÔB | OÔD | CÔD | DÔA | congruenti | simili

(Attenzione: ogni termine può essere usato una volta sola)



Considera i triangoli ABO e CDO. I due triangoli hanno gli angoli AÔB e.....congruenti, perché sono angoli opposti al vertice. L'angolo OÂB è congruente all'angolo.....perché sono angoli formati dalle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC. Quindi i triangoli ABO e CDO sono..... tra loro.

## 2. Formalizzare

AMBITO Relazioni e funzioni

**Che cosa chiede il quesito**

Il quesito si apre con una domanda a di esplorazione iniziale in cui si chiede allo studente di **calcolare il compenso** dell'autore relativo al **numero delle copie vendute**. Al punto b si chiede di generalizzare e **completare una formula** che esprime il compenso C in funzione del numero di copie vendute n. Al punto c il quesito richiede la risoluzione di un problema, legato allo stesso contesto. Il problema è risolvibile mediante un'equazione, per tentativi o in modo iterativo, procedendo in modo analogo al completamento della tabella dell'item a.

Generali

- ✓ a. 43,2% b. 28,8% c. 37,3%
- ✗ a. 40,3% b. 36,1% c. 32,1%
- m.r. a. 16,6% b. 35,1% c. 30,6%

Licei

- ✓ a. 54,7% b. 39,8% c. 48,5%
- ✗ a. 34,3% b. 35,0% c. 28,8%
- m.r. a. 10,9% b. 25,2% c. 22,7%

Tecnici

- ✓ a. 43,4% b. 28,4% c. 37,7%
- ✗ a. 41,9% b. 38,5% c. 33,7%
- m.r. a. 14,7% b. 33,2% c. 28,6%

Professionali

- ✓ a. 21,5% b. 9,3% c. 16,3%
- ✗ a. 49,0% b. 34,8% c. 36,0%
- m.r. a. 29,5% b. 55,9% c. 47,7%

**PROVA INVALSI 2017**

**D14** Una casa editrice propone all'autore di un libro di scegliere uno tra due diversi tipi di contratto relativi al suo compenso.

- **Contratto forfettario:** compenso di 50 000 €, indipendentemente dal numero di copie vendute.
- **Contratto a partecipazione:** compenso di 5000 € a cui si aggiunge il 10% del prezzo di copertina per ogni copia venduta.

Il prezzo di copertina del libro è di 30 €.

a. L'autore sceglie il contratto a partecipazione. Completa la tabella.

Numero di copie vendute	Contratto a partecipazione Compenso per l'autore (in euro)
0	.....5000.....
1000	.....8000.....
2000	.....11.000.....

b. Completa la formula che esprime il compenso C (in euro) dell'autore in funzione del numero n di copie vendute nel caso del contratto a partecipazione.

Risposta:  $C = \underline{5000 + 3n}$  (o formulazioni equivalenti)

c. Qual è il numero di copie che devono essere vendute perché il compenso ottenuto con il contratto a partecipazione sia uguale a quello ottenuto con il contratto forfettario?

Risposta: 15.000 copie

### Perché hanno sbagliato

La difficoltà principale del quesito è nell'item b. Per scrivere la formulazione richiesta è necessario tenere in considerazione quattro elementi:

- il compenso iniziale
- il prezzo di copertina di una copia del libro
- il numero di copie vendute e la percentuale di compenso dovuta all'autore per ogni copia venduta.

Gli errori più frequenti consistono nel trascurare uno o più degli elementi che dovrebbero comparire nella formula e nell'utilizzarli o combinarli fra loro in modo errato, come per esempio nell'item b:

Risposte sbagliate
a. 40,3%
b. 36,1%
c. 32,1%

Risposte mancate
a. 16,6%
b. 35,1%
c. 30,6%

- trascurare il numero di libri venduti,  $n$ , e sommare a 5000 soltanto la percentuale, senza indicare di cosa si sta calcolando il 10%, oppure sommare semplicemente 10 a 5000 (es.  $C = 5000 + 10\%$ )
- trascurare il numero di libri venduti,  $n$ , e aggiungere a 5000 il 10% di 30 (es.  $C = 5000 + \frac{10}{100} \times 30$ )
- trascurare il prezzo di copertina di una copia e sommare a 5000 il 10% di  $n$  o sommare a  $n$  il 10% di 5000 (es.  $C = \frac{10}{100}n + 5000$  o  $C = n + \frac{10}{100} \times 5000$ )
- trascurare il prezzo di copertina di una copia e associare a  $n$  il compenso iniziale, 5000, anziché il prezzo di copertina di una copia del libro, oppure entrambi (es.  $C = 5000n + 30$  o  $C = 5000n + \frac{10}{100} \times 30 \times n$ )
- considerare solamente il 10% del prezzo di copertina.

Alcuni studenti pur tenendo in considerazione tutti gli elementi commettono comunque errori nella trasposizione in simboli, travisando il significato della formula [es.  $C = (30 + 10\%)n + 5000$ ].

Si osserva infine che molti studenti, fra coloro che hanno dato la risposta corretta, lasciano indicato il calcolo della percentuale senza eseguirlo, probabilmente perché ritengono di dover tradurre letteralmente l'espressione verbale in un'espressione simbolica.

**Suggerimenti didattici**

Le **Indicazioni nazionali per i Licei** come obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio raccomandano che lo studente sia capace di:

- eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica
- descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni
- ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.

Le **Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali**, primo biennio, richiedono invece:

**Conoscenze:**

- le espressioni letterali e i polinomi
- equazioni e disequazioni di primo e secondo grado

**Abilità:**

- padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile
- risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica

► **Quesiti da proporre in classe**

**PROVA INVALSI 2013** [► percentuali delle risposte a pag. 76]

**D26** Una sorgente luminosa puntiforme è posta nel vuoto.  $I$  è l'intensità luminosa misurata a una distanza  $r$  dalla sorgente. Il prodotto fra l'intensità luminosa  $I$  e il quadrato della distanza  $r$  dalla sorgente è uguale a una costante  $k$ .

a. Quale fra le seguenti formule esprime la relazione tra  $I$  e  $r$ ?

- A.  $\frac{I}{r^2} = k$
- B.  $\left(\frac{I}{r}\right)^2 = k$
- C.  $I \cdot r^2 = k$
- D.  $(I \cdot r)^2 = k$

b. Se la distanza  $r$  raddoppia, allora l'intensità luminosa  $I$

- A. diventa il doppio
- B. diventa la metà
- C. diventa il quadruplo
- D. diventa un quarto

**PROVA INVALSI 2015** [► percentuali delle risposte a pag. 76]

**D13** Un palo verticale è piantato in uno stagno. Un quinto del palo è interrato nel fondale, un sesto è immerso in acqua e la parte del palo che esce dall'acqua è lunga 8,9 metri.

a. Quale delle seguenti equazioni consente di determinare la lunghezza totale  $x$  del palo?

- A.  $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + 8,9 = x$
- B.  $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = x + 8,9$
- C.  $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + x = 8,9$
- D.  $\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + 8,9 = x$

b. Qual è la lunghezza totale  $x$  del palo?

Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

.....

.....

.....

.....

Risultato:.....m

**PROVA INVALSI 2016** [► percentuali delle risposte a pag. 76]

**D4** Il contratto con l'Internet *provider* di Carlo prevede, ogni mese, un costo fisso  $F$  e un costo variabile, proporzionale al tempo  $t$  di connessione espresso in ore. Il costo in euro per ogni ora di connessione viene indicato con  $k$ .

a. Quale delle seguenti formule esprime il costo  $C$  che Carlo deve sostenere, ogni mese, in funzione delle ore di connessione?

- A.  $C = F \cdot t + k \cdot t$
- B.  $C = F + k \cdot t$
- C.  $C = k + F \cdot t$
- D.  $C = F \cdot k \cdot t$

b. Nel mese di gennaio Carlo si è connesso per 185 ore e nel mese di febbraio il tempo di connessione è cresciuto del 60% rispetto a gennaio.

Quale delle seguenti espressioni fornisce il costo che Carlo deve sostenere nel mese di febbraio?

- A.  $F + k \cdot 185$
- B.  $F + k \cdot (1 + 0,6 + 185)$
- C.  $F + k \cdot 1,6 \cdot 185$
- D.  $F + k \cdot 60 \cdot 185$

### 3. La probabilità

AMBITO Dati e previsioni

**Che cosa chiede il quesito**  
 Il quesito chiede di calcolare una probabilità totale tramite la corretta lettura di un diagramma ad albero.

- Generali  
 ✓ 18,7%  
 ✗ 68,3%  
 m.r. 13,0%
- Licei  
 ✓ 26,5%  
 ✗ 64,4%  
 m.r. 9,2%
- Tecnici  
 ✓ 17,2%  
 ✗ 70,7%  
 m.r. 12,1%
- Professionalisti  
 ✓ 6,6%  
 ✗ 72,0%  
 m.r. 21,4%

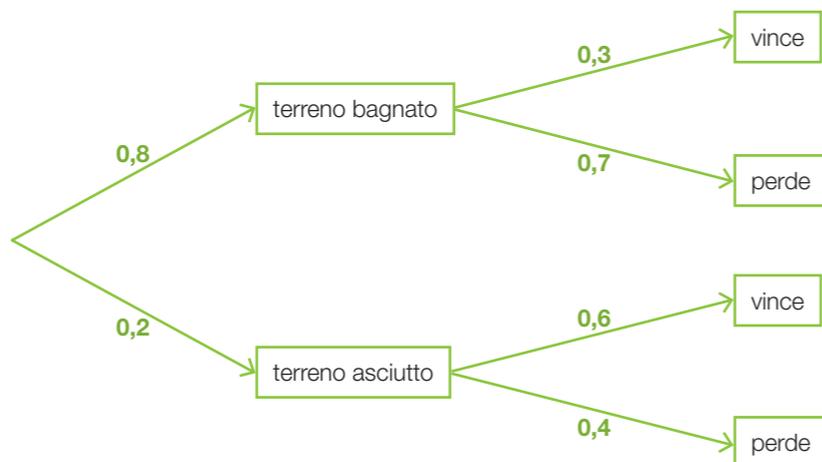
**PROVA INVALSI 2017**

**D17** In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara:

- 0,3 se il terreno è bagnato;
- 0,6 se il terreno è asciutto.

✗ Risposte sbagliate 68,3%

La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



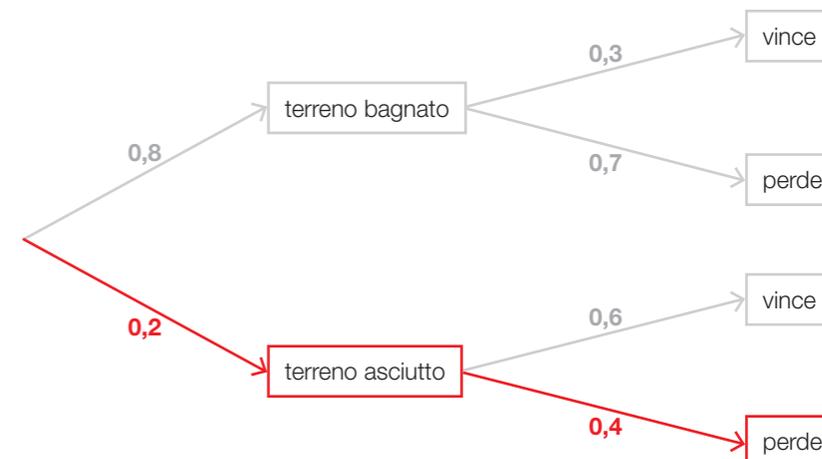
Il diagramma può aiutare a determinare, per esempio, la probabilità che il terreno sia asciutto e che la moto M perda la gara. Essa è  $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$ .

Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara?

Risposta: 0,36

Risoluzione:

*La probabilità che la moto vinca la gara dipende dalla probabilità che il terreno sia asciutto o bagnato. La modalità corretta per calcolare la probabilità composta che il terreno sia in una certa condizione e la moto vinca o perda la gara è fornita nel testo e illustrata nell'esempio che segue:*



*Si legge il diagramma seguendo il percorso evidenziato per calcolare la probabilità che il terreno sia asciutto e la moto perda la gara:*

*$P = 0,2 \times 0,4 = 0,08$*

*Siano allora:*

*A) l'evento: "Il terreno è bagnato e la moto M vince la gara"*

*B) l'evento: "Il terreno è asciutto e la moto M vince la gara"*

*E) l'evento: "La moto M vince la gara".*

*La probabilità che "la moto vinca la gara" è data dalla somma della probabilità che "il terreno sia asciutto e la moto vinca la gara" con la probabilità*

*che "il terreno sia bagnato e la moto vinca la gara", entrambe calcolate*

*come illustrato nell'esempio:*

*$P(E) = P(A) + P(B) = 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,24 + 0,12 = 0,36$*

**Perché hanno sbagliato**

I risultati mostrano che gli studenti hanno avuto molte difficoltà a trovare una strategia risolutiva soddisfacente. Gli errori sono molto diversificati, non sempre riconducibili a processi noti.

La maggior parte degli studenti sbaglia perché esegue la somma delle probabilità riportate sui rami finali dell'albero e corrispondenti alla vittoria della moto M (0,9 o 90%), senza comporre tali probabilità con quelle relative alle condizioni del terreno.

Altri studenti calcolano solamente una delle due probabilità:

- la probabilità composta che il terreno sia asciutto e la moto M vinca la gara,  $0,2 \cdot 0,6 = 0,12$
- la probabilità che il terreno sia bagnato e la moto M vinca la gara,  $0,8 \cdot 0,3 = 0,24$

Altri infine riportano solamente la probabilità che la moto ha di vincere la gara se il terreno è asciutto, 0,6 o 60%, o bagnato, 0,3 o 30%, considerando le condizioni del terreno un evento certo.

**Suggerimenti didattici**

Le **Indicazioni nazionali per i Licei** come obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio raccomandano che lo studente sia capace di utilizzare:

- la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Le **Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali**, primo biennio, richiedono invece:

**Conoscenze:**

- significato della probabilità e sue valutazioni
- semplici spazi (discreti) di probabilità: eventi disgiunti, probabilità composta, eventi indipendenti
- probabilità e frequenza.

**Abilità:**

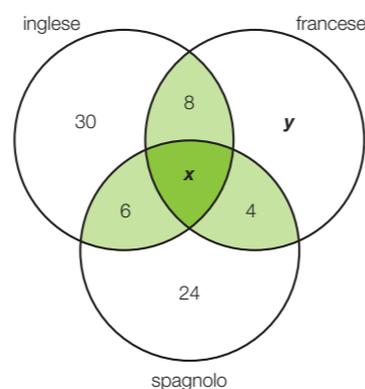
- calcolare la probabilità di eventi elementari.

► **Quesiti da proporre in classe**

**PROVA INVALSI 2016** [▶ percentuali delle risposte a pag. 76]

**D8** Nelle classi prime di una scuola ci sono 100 studenti. Tutti studiano almeno una lingua straniera.

- 50 studiano inglese
- 40 studiano francese
- 40 studiano spagnolo
- 8 studiano solo l'inglese e il francese
- 6 studiano solo l'inglese e lo spagnolo
- 4 studiano solo il francese e lo spagnolo



a. Il numero  $x$  di studenti che studiano tutte e tre le lingue è

.....

Il numero  $y$  di studenti che studiano solo il francese è

.....

b. Qual è la probabilità che uno studente, preso a caso dall'elenco delle classi prime della scuola, studi solo l'inglese?

Risposta: .....

**PROVA INVALSI 2016** [▶ percentuali delle risposte a pag. 76]

**D10** La seguente tabella riporta i dati relativi alla popolazione  $P$  dei diciannovenni residenti in Italia nel 2012 (fonte: ISTAT). Alcuni dati sono stati tolti.

a. Completa tu la tabella

Popolazione residente all'1 gennaio 2012 - Età 19 anni			
	Maschi	Femmine	Totale
Mai sposati	308 653	288 014	596 667
Sposati	325	.....	4067
Divorziati	.....	25	.....
Vedovi	2	.....	6
Totale	308 994	291 785	600 779

b. Utilizzando i dati della tabella, scrivi la frazione corrispondente alla probabilità che un individuo estratto a caso dalla popolazione  $P$  sia una femmina mai sposata.

Risposta: .....

c. Dalla popolazione  $P$  è stato estratto a caso un individuo che non si è mai sposato. Utilizzando i dati della tabella, scrivi la frazione corrispondente alla probabilità che sia un maschio.

Risposta: .....

**PROVA INVALSI 2017** [▶ percentuali delle risposte a pag. 76]

**D20** Due urne A e B contengono ciascuna tre bigliettini numerati con i numeri 1, 2 e 3. Si estrae un bigliettino dall'urna A e poi un bigliettino dall'urna B.

a. Completa l'elenco di tutti i possibili esiti che si possono ottenere:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), .....

b. Si estrae un bigliettino dall'urna A e poi un bigliettino dall'urna B e si esegue la somma dei due numeri estratti. Fra tutte le possibili somme che si possono ottenere, qual è la più probabile?

Risposta: la somma più probabile è .....

# 4. Le rette

AMBITO Spazio e figure

**Che cosa chiede il quesito**  
Il quesito chiede di individuare la pendenza di una retta utilizzando le coordinate di due dei suoi punti, A e B.

- Generali**  
A. 23,7%  
B. 18,1%  
**C. 29,6%**  
D. 24,1%  
m.r. 4,5%

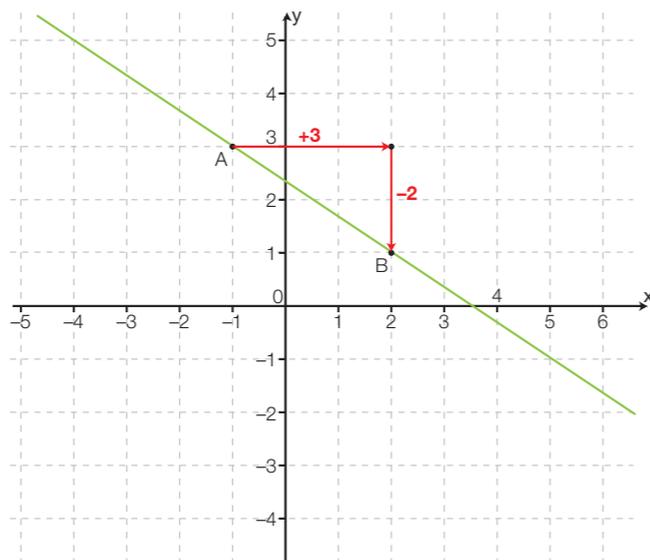
- Licei**  
A. 18,7%  
B. 15,3%  
**C. 37,9%**  
D. 23,4%  
m.r. 4,7%

- Tecnici**  
A. 24,7%  
B. 17,9%  
**C. 27,1%**  
D. 26,0%  
m.r. 4,3%

- Professionali**  
A. 31,4%  
B. 23,6%  
**C. 17,7%**  
D. 22,5%  
m.r. 4,8%

**PROVA INVALSI 2017**

**D21** Considera la retta passante per i punti A (-1; 3) e B (2; 1).



**X** Risposte sbagliate 65,9%

La pendenza (o coefficiente angolare) della retta AB è

- A.  $\frac{3}{2}$
- B.  $\frac{2}{3}$
- C.  $-\frac{2}{3}$
- D.  $-\frac{3}{2}$

**Risoluzione:**

*Per rispondere correttamente alla domanda lo studente deve conoscere il concetto di pendenza come rapporto tra variazioni o almeno la formula per poterla calcolare.*

*Esistono tre strategie per risolvere l'esercizio:*

*1. utilizzo la formula per calcolare la pendenza sostituendo in essa le coordinate dei punti A e B:  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 3}{2 - (-1)} = -\frac{2}{3}$*

*2. muovendomi da A a B osservo la variazione nella direzione delle ascisse, tre quadretti verso destra, e quella nella direzione delle ordinate, due quadretti verso il basso. In relazione al verso di percorrenza dato per l'asse delle ascisse e per quello delle ordinate, assegno a ciascuna variazione il segno corretto e calcolo il rapporto fra le due variazioni:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$*

*3. in alternativa, se sono in grado di associare a rette decrescenti pendenze negative, posso escludere le opzioni A e B e ragionare sulle variazioni indipendentemente dal segno ma non dalla direzione.*

### Perché hanno sbagliato

I distrattori rappresentano tutte le possibili combinazioni del rapporto fra i valori 2 e 3, sia con segno positivo sia con segno negativo. In generale le risposte errate sono distribuite in modo abbastanza uniforme fra le risposte. Quella corretta risulta la più attrattiva in tutti gli indirizzi tranne nei professionali.

### Suggerimenti didattici

Le **Indicazioni nazionali per i Licei** come obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio raccomandano che lo studente sia capace di:

- conoscere i fondamenti della geometria euclidea del piano
- conoscere funzioni del tipo  $f(x) = ax + b$
- usare il metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitato alla rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità
- passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale).

Le **Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali**, primo biennio, richiedono invece:

**Conoscenze:**

- le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica)
- funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa)
- nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio
- perimetro e area dei poligoni.

**Abilità:**

- rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate
- studiare le funzioni  $f(x) = ax + b$  e  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area e volume delle principali figure geometriche del piano e dello spazio.

► Quesiti da proporre in classe

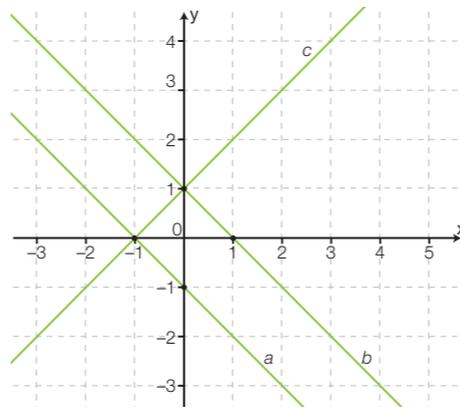
PROVA INVALSI 2016 [▶ percentuali delle risposte a pag. 77]

D16 In figura sono rappresentate le tre rette *a*, *b*, *c* e sono date quattro equazioni.

- A.  $y = x + 1$
- B.  $y = x - 1$
- C.  $y = -x + 1$
- D.  $y = -x - 1$

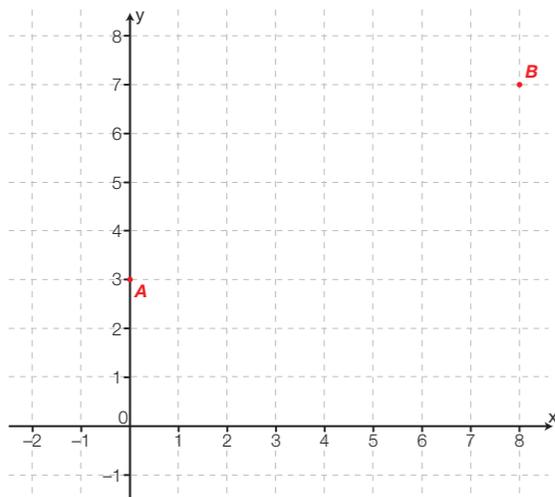
Completa la seguente tabella associando a ogni retta il numero dell'equazione corrispondente.

Retta	Equazione corrispondente
<i>a</i>	
<i>b</i>	
<i>c</i>	



PROVA INVALSI 2016 [▶ percentuali delle risposte a pag. 77]

D17 Sul piano cartesiano in figura sono assegnati i punti *A* e *B* di coordinate intere.



Il coefficiente angolare della retta *AB* è .....

PROVA INVALSI 2017 [▶ percentuali delle risposte a pag. 77]

D13 Considera l'equazione  $y = 2x + k$ . Per quale valore di *k* essa rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate (1; 5)?

Risposta:  $k = \dots\dots\dots$

## 5. La variazione percentuale

AMBITO Dati e previsioni

**Che cosa chiede il quesito**

Il quesito chiede di stabilire la verità di alcune affermazioni relative alla serie storica della **variazione percentuale** della produzione di un'azienda da un anno all'altro, in un intervallo di sei anni. La risposta è considerata corretta solo se lo studente ha risposto bene ad almeno due delle affermazioni. Per rispondere non sono necessari calcoli, ma lo studente deve comprendere che le cifre riportate nella tabella in corrispondenza di un certo anno rappresentano la variazione percentuale della produzione rispetto all'anno precedente.

<b>Generali</b>	<b>Tecnici</b>
✓ 28,9%	✓ 28,0%
✗ 71,1%	✗ 72,0%
m.r. 0,0%	m.r. 0,0%
<b>Licei</b>	<b>Professionali</b>
✓ 36,0%	✓ 17,4%
✗ 64,0%	✗ 82,6%
m.r. 0,0%	m.r. 0,0%

PROVA INVALSI 2017

D11 La seguente tabella indica di quanto è aumentata ogni anno in percentuale la produzione di un'azienda rispetto all'anno precedente negli anni dal 2010 al 2015.

✗ Risposte sbagliate 71,1%

Anno	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Aumento percentuale annuo	+2%	+5%	+12%	+8%	+4%	+8%

Basandoti sui dati della tabella indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	Vero	Falso
A. Dal 2012 al 2013 la produzione è diminuita	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
B. Dal 2014 al 2015 la produzione è raddoppiata	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
C. Nel periodo 2010-2015 il massimo di produzione si è avuto nel 2015	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Perché hanno sbagliato**

La difficoltà principale di questo quesito sta probabilmente nella corretta interpretazione dei dati riportati in tabella. Gli studenti che sbagliano considerando vera l'affermazione A, interpretano un aumento percentuale della produzione inferiore a quello dell'anno precedente come un calo nella produzione. Leggono i dati pensando che nel 2012 la produzione sia stata pari al 12%, considerato o come valore assoluto di una qualche grandezza rappresentativa della produzione, o come il 12% di una grandezza di riferimento. In entrambi i casi i valori ottenuti per l'anno successivo risultano inferiori a quelli del 2012.

Questo tipo di interpretazione dei dati porta a sbagliare anche l'attribuzione di verità dell'affermazione C. Questa affermazione suggerisce, infatti, l'idea che nei sei anni in oggetto la produzione abbia avuto un andamento altalenante aumentando fino al 2012, diminuendo poi fino al 2014, per crescere infine nel 2015.

La corretta interpretazione dei dati chiarisce invece che la produzione negli anni è aumentata sempre: tutte le variazioni percentuali riportate sono infatti positive, e l'affermazione C risulta dunque vera.

È probabile che gli studenti che sbagliano, considerando vera l'affermazione B, confondano un raddoppio dell'aumento percentuale in due anni consecutivi, con un raddoppio della produzione. Per ottenere il raddoppio bisognerebbe invece avere, dal 2014 al 2015, un aumento percentuale del 100%. In questo caso va osservato che per molti studenti l'associazione fra la relazione di raddoppio di una grandezza e un aumento percentuale del 100% risulta di difficile comprensione.

È da osservare, inoltre, che analizzando le tre affermazioni separatamente gli studenti commettono lo stesso numero di errori su ciascuna affermazione. Coloro che sbagliano una sola affermazione si distribuiscono in maggioranza e all'incirca equamente fra la prima e la seconda affermazione.

**Suggerimenti didattici**

Le **Indicazioni nazionali per i Licei** come obiettivi specifici di apprendimento del primo biennio raccomandano che lo studente sia capace di conoscere:

- le definizioni e le proprietà dei valori medi e delle misure di variabilità, nonché l'uso di strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo) per analizzare raccolte di dati e serie statistiche.

Le **Linee guida per gli Istituti Tecnici e Professionali**, primo biennio, richiedono invece:

**Conoscenze:**

- approssimazioni
- valori medi e misure di variabilità.

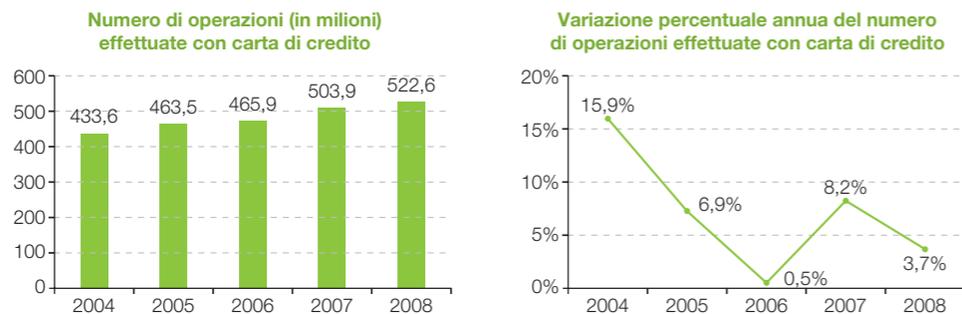
**Abilità:**

- utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, a macchina) per calcolare espressioni aritmetiche e risolvere problemi
- utilizzare correttamente il concetto di approssimazione
- calcolare i valori medi e alcune misure di variabilità di una distribuzione.

► **Quesiti da proporre in classe**

**PROVA INVALSI 2012** [▶ percentuali delle risposte a pag. 77]

**D9** Osserva i seguenti grafici relativi alle operazioni effettuate con carte di credito dal 2004 al 2008.



(Fonte: Osservatorio sulle carte di credito. Assfin - Crif Decision Solutions - GfK Eurisko)

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	Vero	Falso
a. Il numero di operazioni effettuate con carte di credito è diminuito dal 2004 fino al 2006, poi è aumentato e, successivamente, è di nuovo diminuito fino al 2008.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b. I due grafici sono in contraddizione perché il primo mostra una continua crescita nel tempo, mentre il secondo no.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c. L'aumento del numero di operazioni effettuate con carte di credito che si è avuto dal 2006 al 2007 è stato superiore all'aumento che si è avuto dal 2007 al 2008.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d. Nel 2006 il numero di operazioni effettuate con carte di credito si è quasi azzerato.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

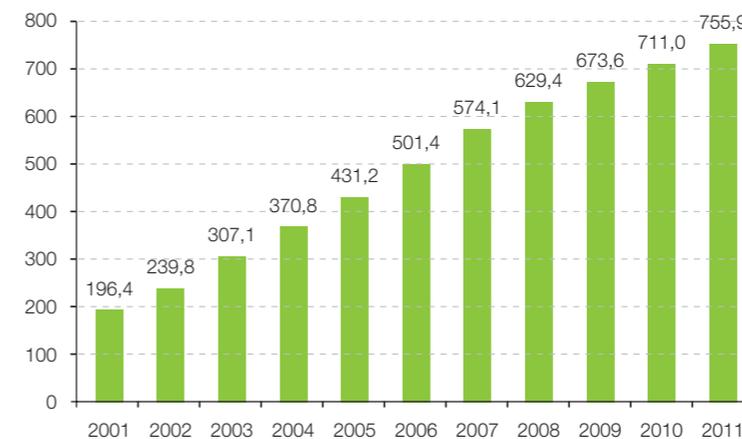
**PROVA INVALSI 2016** [▶ percentuali delle risposte a pag. 77]

**D11** A novembre il prezzo di un paio di scarpe è di 100 €. A dicembre il prezzo aumenta del 10%. A gennaio, nel periodo dei saldi, il prezzo viene scontato del 10% rispetto al prezzo di dicembre. Qual è il prezzo delle scarpe in saldo?

- A. 100 €
- B. 99 €
- C. 90 €
- D. 91 €

**PROVA INVALSI 2017** [▶ percentuali delle risposte a pag. 77]

**D26** Il seguente grafico mostra il numero di studenti stranieri presenti in Italia dal 2001 al 2011, espresso in migliaia.



a. Di quanto sono aumentati gli studenti stranieri tra il 2002 e il 2004?

Risposta: ..... migliaia

b. Di quanto sono aumentati in percentuale gli studenti stranieri nel 2008 rispetto al 2006?

- A. Circa del 26%
- B. Circa del 20%
- C. Circa dell'80%
- D. Circa del 64%

## Percentuali delle risposte dei quesiti da proporre in classe

### 1. Argomentare e dimostrare

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova INVALSI 2012 D8	Sì, perché i lati sono diagonali delle facce del cubo	✓ 47,2% ✗ 41,4% m.r. 10,3%
Prova INVALSI 2014 D23	a. F b. V c. F d. V	a. ✓ 60,7% ✗ 34,5% m.r. 4,7% b. ✓ 58,8% ✗ 34,8% m.r. 6,2% c. ✓ 45,1% ✗ 48,5% m.r. 6,2% d. ✓ 43,2% ✗ 50,6% m.r. 6,1%
Prova INVALSI 2016 D25	<b>A</b>	<b>A. 45,9%</b> B. 8,9% C. 22,6% D. 16,7% m.r. 5,9%
Prova INVALSI 2016 D26	Considera i triangoli ABO e CDO. I due triangoli hanno gli angoli AOB e COD congruenti, perché sono angoli opposti al vertice. L'angolo OAB è congruente all'angolo OCD perché sono angoli alterni interni formati dalle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC. Quindi i triangoli ABO e CDO sono simili tra loro.	✓ 27,2% ✗ 58,9% m.r. 13,9%

### 2. Formalizzare

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova INVALSI 2013 D26	a. <b>C</b> b. <b>D</b>	a. A. 9,8% B. 8,3% <b>C. 69,2%</b> D. 8,4% m.r. 4,3% b. A. 30,6% B. 33,7% C. 13,7% <b>D. 17,1%</b> m.r. 4,9%
Prova INVALSI 2015 D13	a. <b>D</b> b. Si accetta un qualunque risultato compreso tra 14 e 14,8 - estremi inclusi espressi in qualunque forma - anche lasciando il calcolo incompiuto ( $x = 8,9 \cdot 30/19$ ).	a. A. 25,0% B. 10,4% C. 8,0% <b>D. 49,4%</b> m.r. 7,1% b. ✓ 39,0% ✗ 26,1% m.r. 34,9%
Prova INVALSI 2016 D4	a. <b>B</b> b. <b>C</b>	a. A. 12,8% <b>B. 66,3%</b> C. 9,0% D. 9,4% m.r. 2,6% b. A. 14,4% B. 32,1% <b>C. 27,9%</b> D. 19,8% m.r. 5,8%

### 3. La probabilità

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova INVALSI 2016 D8	a. 6 e 22 b. 0,3 o scritte equivalenti	a. ✓ 42,6% ✗ 44,7% m.r. 12,7% b. ✓ 41,0% ✗ 35,3% m.r. 23,8%
Prova INVALSI 2016 D10	a. 3742; 14; 39; 4 288 014 b. $\frac{600\ 779}{308\ 653}$ c. $\frac{596\ 667}{308\ 653}$	a. ✓ 19,2% ✗ 14,2% m.r. 66,6% b. ✓ 37,0% ✗ 30,0% m.r. 33,0% c. ✓ 37,8% ✗ 31,7% m.r. 30,5%
Prova INVALSI 2017 D20	a. (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) b. 4	a. ✓ 77,2% ✗ 11,6% m.r. 11,2% b. ✓ 58,8% ✗ 22,4% m.r. 18,8%

### 4. Le rette

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova INVALSI 2016 D16	a. D b. C c. A	✓ 21,3% ✗ 62,5% m.r. 16,2%
Prova INVALSI 2016 D17	$\frac{1}{2}$ o risposte equivalenti	✓ 18,4% ✗ 40,0% m.r. 41,5%
Prova INVALSI 2017 D13	3	✓ 32,8% ✗ 25,7% m.r. 41,6%

### 5. La variazione percentuale

Quesito	Risposta corretta	Percentuali risposte
Prova INVALSI 2012 D9	a. F b. F c. V d. F	a. ✓ 54,7% ✗ 43,9% m.r. 1,1% b. ✓ 32,9% ✗ 65,3% m.r. 1,5% c. ✓ 67,6% ✗ 30,5% m.r. 1,6% d. ✓ 39,3% ✗ 58,6% m.r. 1,9%
Prova INVALSI 2016 D11	<b>B</b>	A. 49,3% <b>B. 35,4%</b> C. 9,9% D. 3,7% m.r. 1,7%
Prova INVALSI 2017 D26	a. 131 b. <b>A</b>	a. ✓ 67,8% ✗ 24,9% m.r. 7,3% b. <b>A. 44,7%</b> B. 33,7% C. 7,9% D. 10,1% m.r. 3,6%