Metodo della trasformata di Laplace

Il metodo simbolico consente di affrontare l'analisi di reti contenenti componenti reattivi (condensatori e induttori) in regime sinusoidale, aggirando la complessità matematica introdotta dalle relazioni integro-differenziali (con derivate e integrali) che legano le tensioni e le correnti su quei componenti.

Se i segnali d'ingresso hanno un andamento generico o se vogliamo studiare la fase transitoria che segue l'applicazione di un segnale a una rete, dobbiamo usare un metodo più generale, di cui quello simbolico è un caso particolare: il metodo della *trasformata di Laplace*.

La FIGURA **1** riassume i metodi per l'analisi delle reti lineari nelle varie condizioni.

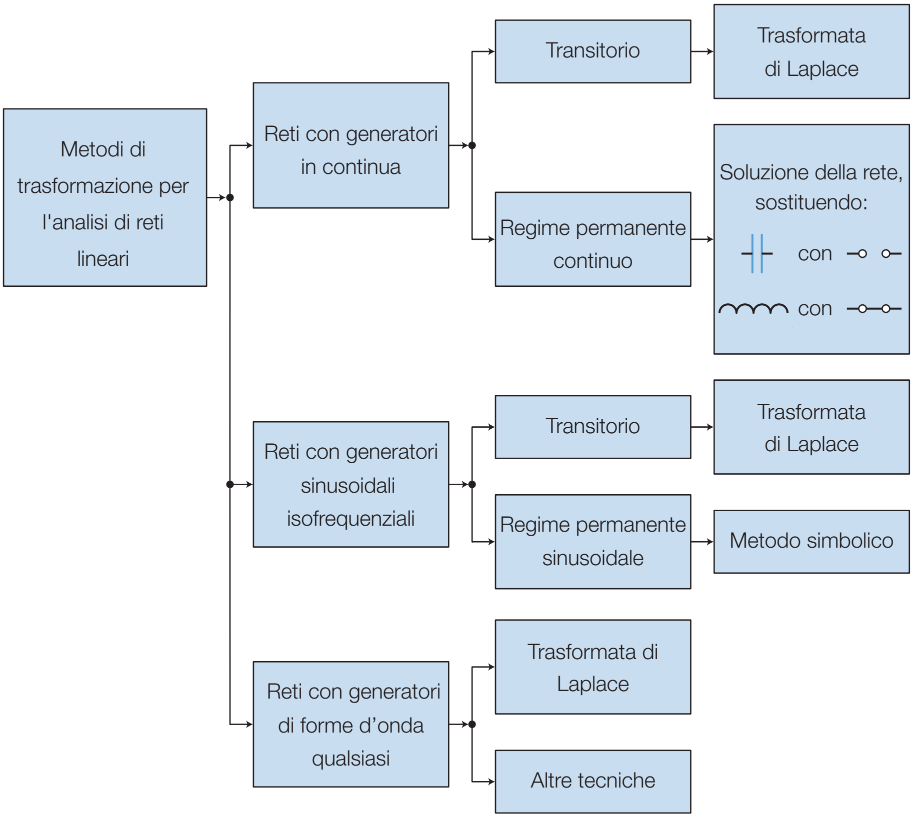


FIGURA **1** Quadro riassuntivo dei metodi per l'analisi delle reti lineari.

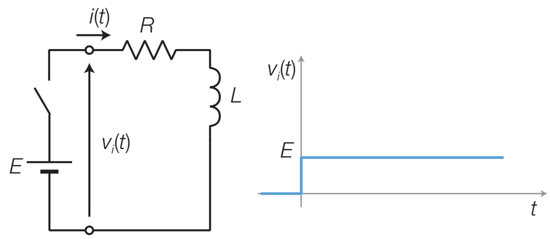
Si ricordano le formule che legano, in modo differenziale, la tensione e la corrente nei condensatori e negli induttori:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad\qquad v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Nei resistori, invece, il legame non contiene derivate: $v(t) = Ri(t)$.

ESEMPIO 1

Determinare l'espressione che lega la corrente $i(t)$, nella rete *RL* di FIGURA **2**, con la tensione d'ingresso $v_i(t)$, a partire dall'istante in cui viene chiuso l'interruttore.



A **B**

FIGURA **2**

SOLUZIONE

In base alle relazioni che legano le tensioni e le correnti nei singoli componenti, si può scrivere:

$$v_i(t) = v_R(t) + v_L(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} \qquad (\mathbf{1})$$

Considerando $i(t)$ come segnale d'uscita e $v_i(t)$ come segnale d'ingresso che nell'istante di chiusura dell'interruttore varia con un gradino da 0 V al valore E, si osserva che il legame tra il segnale d'uscita e quello d'ingresso è costituito da un'equazione differenziale.
Si pone in evidenza come anche una semplice rete contenente un solo componente reattivo sia descritta da un'equazione differenziale.
La soluzione dell'equazione differenziale **1** consente di determinare l'andamento nel tempo della corrente dopo la chiusura dell'interruttore, ovvero nella fase *transitoria* di adeguamento del circuito al segnale d'ingresso.

La *trasformata di Laplace*, come il metodo simbolico, è una *trasformazione* delle variabili del problema che consente di cambiare operazioni complesse in altre più semplici.

In particolare nella soluzione delle reti con la *trasformata di Laplace*, le variabili sono convertite da funzioni del tempo a funzioni complesse (parte reale e immaginaria), in modo che le equazioni integro-differenziali diventino espressioni algebriche. Riportando poi le variabili in funzione del tempo si trova la soluzione del problema.

▶ Si definisce **trasformata di Laplace** (*L-trasformata*) di una funzione $f(t)$, la funzione della variabile complessa: $s = \sigma + j\omega$ (operatore di Laplace con le dimensioni dell'inverso di un tempo $[t^{-1}]$), definita dalla relazione integrale:

$$L\,[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\,dt \qquad (\mathbf{2})$$

L'espressione precedente evidenzia che l'intervallo d'integrazione ha origine da 0; questo significa che la L-trasformata di una funzione $f(t)$ è indipendente dal valore che aveva prima dell'istante assunto come $t = 0$.

Il significato fisico della condizione evidenziata è che, se si assume come istante iniziale quello in cui è applicato il segnale d'ingresso a una rete, il ricorso alle L-trasformate permette di risolvere la rete trascurando lo stato precedente.

Nel caso di componenti reattivi questo equivale a non considerare, nella trasformazione, l'energia eventualmente immagazzinata nei componenti all'atto dell'applicazione del segnale.

La ricerca della risposta consiste nell'esprimere l'andamento nel tempo della grandezza elettrica incognita, in funzione del segnale di eccitazione e dei parametri caratteristici della rete; con riferimento alla FIGURA **3** si indica con:

- $s_i(t)$: il generico segnale d'ingresso (funzione del tempo);
- $s_u(t)$: il segnale funzione del tempo che rappresenta la *risposta*;
- $g(t)$: il legame tra ingresso e uscita dovuto ai parametri della rete.

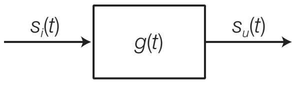


FIGURA **3** Blocco funzionale di una rete generica.

La relazione è: $g(t) = \dfrac{s_u(t)}{s_i(t)}$ e quindi l'espressione della *risposta* è:

$$s_u(t) = s_i(t)\, g(t) \tag{3}$$

Poiché generalmente è nota l'espressione del segnale $s_i(t)$, per conoscere $s_u(t)$, è sufficiente determinare $g(t)$; la presenza dei componenti reattivi fa si che $g(t)$ sia una equazione differenziale.

Nella maggior parte delle reti la funzione $g(t)$ è costante nel tempo (sistemi tempo-invarianti).

▶ Utilizzando la trasformata di Laplace, è possibile ridurre espressioni di tipo integro-differenziale in espressioni algebriche (*trasformazione*) e ricavare la risposta cercata, come schematizzato nella FIGURA **4**: in pratica si trasforma sia il segnale d'ingresso sia l'equazione integro-differenziale, poi una volta risolta l'equazione algebrica nel campo complesso (s) si *antitrasforma* il risultato per trovare la risposta $s_u(t)$ in funzione del tempo.

Per i problemi tipici dell'elettronica, la soluzione dell'equazione algebrica è relativamente semplice, perché le equazioni differenziali sono del tipo a coefficienti costanti ed è agevole risolverle in s, per poi risalire alle espressioni in funzione del tempo.

In alternativa è possibile fermarsi ad analizzare la risposta in s, senza effettuare l'antitrasformazione, in base a dei criteri che consentono di valutare il comportamento nel tempo della rete in esame.

Nei capitoli che seguono, si farà spesso ricorso agli strumenti d'analisi in s, ma in questa fase vengono descritti i metodi di trasformazione e antitrasformazione, secondo il percorso rappresentato in FIGURA **4**.

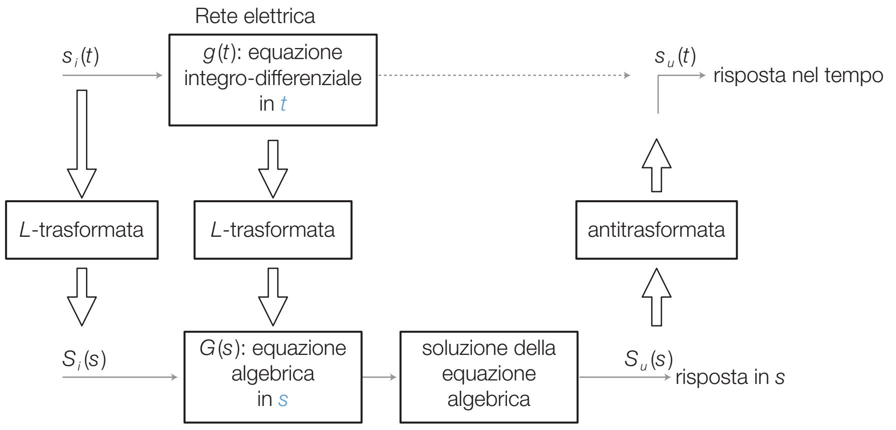


FIGURA **4** Calcolo della risposta nel tempo mediante la L-trasformata.

Per poter operare secondo lo schema di FIGURA **4**, deve esistere una relazione di tipo biunivoco tra le funzioni del tempo e quelle in s, in modo che a ciascuna $f(t)$ corrisponda una e una sola $F(s)$ e viceversa.

Questa condizione è verificata se:

- si ricerca unicamente la *risposta forzata* della rete (ovvero il valore della variabile incognita dall'istante di applicazione del segnale in poi, separando le eventuali condizioni iniziali);
- l'integrale di Laplace espresso dalla FORMULA **2** è *convergente*, ovvero ha valore finito per uno o più valori della variabile s.

La trasformazione

La trasformazione dalle funzioni nella variabile t a quelle corrispondenti nella variabile s può essere realizzata applicando la FORMULA **2**, ma normalmente nell'elettronica si fa ricorso a tabelle di trasformate notevoli: si scompone l'equazione differenziale in un insieme delle funzioni riportate nella TABELLA **1** da trasformare singolarmente, nel rispetto dei teoremi esposti nel seguito.

Si utilizzeranno le lettere minuscole per indicare le funzioni di t e quelle maiuscole per indicare le corrispondenti funzioni di s.

Le principali proprietà delle L-trasformate sono le seguenti.

1) *Trasformata del prodotto per una costante*: la L-trasformata del prodotto tra la funzione $f(t)$ e la costante a, è data dal prodotto $a \cdot F(s)$, ove $F(s)$ è la L-trasformata di $f(t)$; in formule:

$$\text{se } F(s) = L[f(t)] \quad \text{allora} \quad L[a \cdot f(t)] = a \cdot F(s)$$

2) *Trasformata di una combinazione lineare di funzioni*: la L-trasformata di una combinazione lineare di funzioni è data dalla combinazione lineare delle L-trasformate delle singole funzioni; in formule:

se $F(s) = L[f(t)]$, $G(s) = L[g(t)]$ e $a, b =$ costanti, allora:
$L[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$

3) *Trasformata della derivata prima di una funzione*: la L-trasformata della derivata prima di una funzione $f(t)$ che abbia come L-trasformata $F(s)$, vale:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s) - f(0)^{+}$$

dove $f(0)^{+}$ esprime il valore assunto da $f(t)$ dall'istante di applicazione del segnale in poi; se tale valore è 0 (questo equivale all'assenza di energia immagazzinata nel componente il cui comportamento è espresso dalla derivata), risulta:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s \cdot F(s)$$

4) *Trasformata dell'integrale di una funzione*: la L-trasformata dell'integrale di una funzione $f(t)$, che abbia come L-trasformata $F(s)$, vale:

TABELLA **1** Trasformate di Laplace per funzioni notevoli.

n°	*f(t)* funzione del tempo per $t \geq 0$	*F(s)* Trasformata di Laplace
1	$u(t) = 1$ (gradino unitario)	$\frac{1}{s}$
2	$\delta(t)$ (impulso unitario di Dirac)	1
3	t (rampa unitaria)	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (con n intero e > 0)	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s\,(s+a)}$
7	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9	$\frac{1}{(n-1)!}\left(t^{n-1}\right)e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$ (n intero e > 0)
10	$e^{-at}\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	$\mathrm{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
13	$\frac{k}{\omega}e^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$ con: $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega}{b-a}$ $k = \sqrt{(b-a)^2+\omega^2}$	$\frac{s+b}{(s+a)^2+\omega^2}$

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s}\cdot F(s) + \frac{\int_0^{0+} f(t)dt}{s}$$

dove $\int_0^{0+} f(t)dt$ rappresenta il valore delle primitiva di $f(t)$ dall'istante di applicazione del segnale in poi; se tale valore è 0 (questo equivale all'assenza di energia immagazzinata nel componente il cui comportamento è espresso dall'integrale), risulta:

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

Nell'analisi delle reti hanno particolare importanza due teoremi, che consentono di ricavare i valori della risposta $f(t)$ per $t = 0$ e per $t = \infty$, direttamente dalla espressione in s, senza ricorrere ad antitrasformazione.

5) *Teorema del valore iniziale*: se $F(s) = L[f(t)]$, risulta:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$$

6) *Teorema del valore finale*: se $F(s) = L[f(t)]$, risulta:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot F(s)$$

ESEMPIO 2

Trasformare l'equazione **1** della rete *RL* dell'ESEMPIO **1** in un'espressione algebrica, mediante la *L*-trasformata, e risolverla determinando l'espressione della trasformata della corrente *I*(*s*).

SOLUZIONE

Si suppone che non vi sia energia immagazzinata nell'induttore [$i(0) = 0$] e che l'espressione della corrente sia trasformabile, ovvero: $L[i(t)] = I(s)$.
Fino alla chiusura dell'interruttore il segnale d'ingresso $v_i(t)$ è nullo, poi assume il valore costante *E*; l'ingresso è quindi un gradino con ampiezza *E*.
Dalla TABELLA **1** (riga 1) si ricava che, nel caso di segnale a gradino di ampiezza unitaria, la *L*-trasformata vale $1/s$.
Nel caso in esame, l'ampiezza è *E*; per la proprietà del prodotto per una costante (proprietà 1), si ottiene il prodotto della trasformata per *E*:

$$L[v_i(t)] = V_i(s) = \frac{E}{s}$$

inoltre, per la proprietà 3 (*Trasformata della derivata prima di una funzione*) l'equazione **1** si trasforma così:

$$V_i(s) = \frac{E}{s} = L[R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt}] = R\,I(s) + s \cdot L \cdot I(s) \qquad (4)$$

Si ricava quindi l'espressione di *I*(*s*):

$$I(s) = \frac{E}{s \cdot (R + s \cdot L)}$$

Il risultato mostra che, con l'applicazione delle *L*-trasformate, la corrente *i*(*t*) si è ridotta a una semplice espressione algebrica nella variabile *s*.

ESEMPIO 3

Ricavare la *L*-trasformata *I*(*s*) della corrente nella rete di FIGURA **5**, a partire dall'istante in cui viene chiuso l'interruttore.

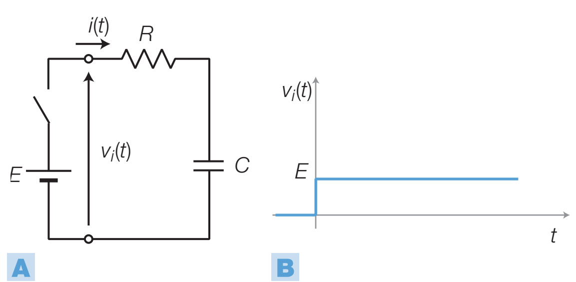


FIGURA **5**

SOLUZIONE

Dalla rete si ricava:

$$v_i(t) = v_R(t) + v_C(t) = R\,i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

Nell'ipotesi che non vi sia energia immagazzinata nel condensatore [$v_C(0) = 0$], che l'espressione della corrente sia trasformabile, ovvero: $L[i(t)] = I(s)$, e considerando la *L*-trasformata del segnale d'ingresso $v_i(t)$ come nell'esempio precedente $L[v_i(t)] = V_i(s) = E/s$, risulta:

$$V_i(s) = \frac{E}{s} = L\,[Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt] = RI(s) + \frac{1}{s \cdot C} \cdot I(s) \qquad (5)$$

Si ricava quindi l'espressione di *I*(*s*):

$$I(s) = \frac{E}{s \cdot (R + \frac{1}{sC})}$$

Analizzando le equazioni **4** e **5** degli esempi precedenti si nota che il circuito *RL* di FIGURA **2** si comporta come una serie di due impedenze, di valore *R* e *sL*, entrambe percorse dalla corrente *I*(s); analogamente il circuito *RC* di FIGURA **5A** è costituito da due impedenze in serie, di valore *R* e 1/*sC*, entrambe percorse dalla corrente *I*(s).

PROCEDIMENTO Generalizzando il risultato, si può enunciare la seguente *regola pratica*.

Per analizzare una rete contenente elementi reattivi con il metodo delle *L*-trasformate è possibile applicare le regole dell'elettrotecnica, a patto di:

1) sostituire le tensioni e le correnti con la rispettiva espressione *L*-trasformata:

$$i(t) \rightarrow I(s) \quad \text{e} \quad v(t) \rightarrow V(s)$$

2) sostituire i condensatori di capacità *C* con impedenze di valore $\frac{1}{sC}$:

$$C \rightarrow \frac{1}{sC}$$

3) sostituire gli induttori d'induttanza *L* con impedenze di valore *sL*:

$$L \rightarrow sL$$

4) sostituire i generatori di tensione costante *E* con generatori di valore $\frac{E}{s}$:

$$E \rightarrow \frac{E}{s}$$

5) sostituire i generatori di corrente costante *I* con generatori di valore $\frac{1}{s}$:

$$I \rightarrow \frac{1}{s}$$

6) i resistori mantengono il loro valore di resistenza *R* perché non hanno accumulo di energia.

La TABELLA **2**, a pagina seguente, riepiloga i concetti elencati nella regola pratica; l'eventuale energia iniziale immagazzinata nei componenti reattivi viene considerata ponendo in serie all'impedenza pura del bipolo un generatore che rappresenta:

- la d.d.p. V_0 presente tra le armature del condensatore all'atto dell'applicazione del segnale funzione del tempo;
- la corrente I_0 che circola nell'induttore all'atto della applicazione del segnale funzione del tempo. Nello schema *L*-trasformato, il generatore di corrente è stato sostituito con un generatore di tensione di valore $V_0 = sL \cdot \frac{I_0}{s} = LI_0$ (prodotto della corrente per l'impedenza *sL*).

Le reti con più componenti possono essere analizzate sostituendo a resistori, condensatori e induttori, le impedenze riportate nella colonna di destra della TABELLA **2** e poi calcolando le impedenze equivalenti serie e parallelo con le stesse formule utilizzate per le reti di resistori alimentate in continua. Si veda a proposito l'ESEMPIO **4**.

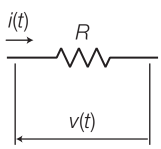
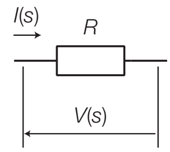
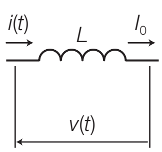
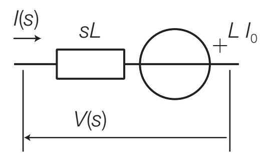
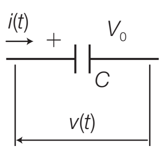
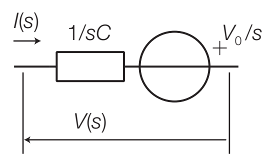
Componente	Relazioni *v* - *i* nel tempo	Relazioni *v* - *i* in *L*-trasformata	Schema equivalente in *L*-trasformata
	$v(t) = Ri(t)$ $i(t) = \frac{v(t)}{R}$	$V(s) = RI(s)$ $I(s) = \frac{V(s)}{R}$	 con $Z_R = R$
	$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)\,dt + I_0$	$V(s) = sLI(s) - \,I_0$ $I(s) = \frac{V(s) + \,L\,I_0}{sL}$	 con $Z_L = s\,L$
	$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + V_0$ $i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$	$V(s) = \frac{1}{sC}\,I(s) + \frac{V_0}{s}$ $I(s) = sC\,V(s) - \frac{V_0}{s}$ r	 con $Z_C = 1/sC$

TABELLA **2** Schemi equivalenti in *t* e in *s* dei bipoli reattivi, con generatori che considerano l'eventuale energia immagazzinata.

ESEMPIO 4

Nella rete *RLC* di FIGURA **6A**, determinare l'espressione della trasformata della corrente nel condensatore, dall'istante di chiusura dell'interruttore. Si consideri il condensatore inizialmente carico con una d.d.p. V_0.

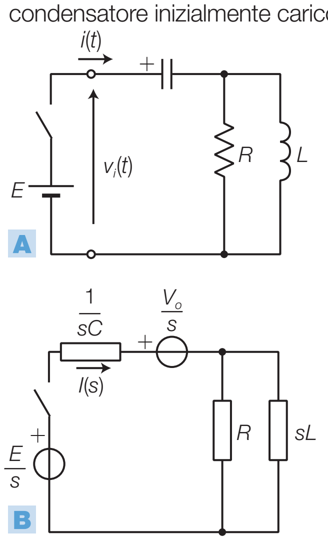


FIGURA **6**
A) Rete *RLC*.
B) Trasformazione della rete in *s*.

SOLUZIONE

Si applica la regola pratica utilizzando per il condensatore carico e per l'induttore lo schema equivalente della TABELLA **2**; si ottiene lo schema di FIGURA **6B**.

Si ricava l'espressione in *s* della corrente $I_C(s)$ utilizzando le regole note per la risoluzione delle reti.

Si ricava l'espressione del parallelo *RL*:

$$Z_p = R\,//\,sL = \frac{R \cdot sL}{R + sL}$$

La corrente *I*(*s*) che circola nella maglia è data da:

$$I(s) = \frac{E - V_0}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{sC} + Z_p} = \frac{E - V_0}{s} \cdot \frac{sC}{1 + sC \cdot Z_p}$$

L'antitrasformazione

▶ L'antitrasformazione (simbolo L^{-1}) è l'operazione che consente di ricavare l'espressione della funzione del tempo $f(t)$ corrispondente a una $F(s)$.

Il metodo più diffuso per antitrasformare consiste nel ricondurre la $F(s)$ alle espressioni della TABELLA **1** (colonna di destra), per poi risalire alla $f(t)$ (colonna di sinistra).

Raramente la $F(s)$ è immediatamente riconducibile a una delle forme di tabella, per cui la si deve trasformare in una *combinazione lineare* di alcune funzioni di tabella, per poi antitrasformare singolarmente i termini della combinazione, in base alla proprietà della combinazione lineare delle L-trasformate.

È consigliabile portare la $F(s)$ nella *forma canonica*:

1) ordinare i polinomi al denominatore e al numeratore di $F(s)$, secondo le potenze decrescenti di s;
2) raccogliere a fattore il coefficiente del termine di grado massimo in s in modo da ottenere il prodotto di una costante (rapporto dei coefficienti del termine di grado massimo in s di numeratore e denominatore) per un rapporto di polinomi in cui i termini di grado massimo in s hanno coefficiente unitario;
3) scomporre il polinomio al denominatore nel prodotto di polinomi e/o monomi in s.

ESEMPIO 5

Applicare le regole appena citate per antitrasformare l'espressione della corrente ricavata nell'ESEMPIO **2**.

SOLUZIONE

L'espressione $I(s) = \dfrac{E}{s \cdot (R + s \cdot L)}$ si può portare nella forma della riga 6 della TABELLA **1**:

$$I(s) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{s \cdot (s + R/L)}$$

per cui la soluzione in funzione del tempo si ricava dal confronto con l'espressione nella prima colonna della tabella:

$$i(t) = \frac{E}{L}\frac{1}{\frac{R}{L}}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

da cui si deduce che per $t = 0$ la corrente è nulla, perché $e^{-\frac{t}{RC}} = 1$, mentre all'aumentare di t il termine $e^{-\frac{R}{L}t}$ tende a zero e quindi la corrente tende a E/R (l'induttanza a regime si comporta da cortocircuito).

ESEMPIO 6

Antitrasformare l'espressione della corrente ricavata nell'ESEMPIO **3**.

SOLUZIONE

L'espressione $I(s) = \dfrac{E}{s \cdot (R + \frac{1}{sC})}$ si può portare nella forma della riga 5 della TABELLA **1**:

$$I(s) = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{s + 1/RC}$$

e la soluzione in funzione del tempo si ricava dal confronto con l'espressione nella prima colonna della tabella:

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

il che significa che la corrente per $t = 0$ vale E/R (perché $e^{-\frac{t}{RC}} = 1$), poi tende a zero col passare del tempo (a regime il condensatore equivale a un circuito aperto).

Per i casi in cui non è possibile individuare immediatamente la funzione $F(s)$ nella tabella, come per l'espressione dell'ESEMPIO **4**, si ricorre al metodo dello *sviluppo in frazioni parziali*.

Lo *sviluppo in frazioni parziali* si basa sulla possibilità di scomporre un polinomio, del quale si conoscono le *radici* (valori della variabile che annullano il polinomio), nel prodotto di tanti binomi quante sono le radici stesse. Se tale polinomio è il denominatore di $F(s)$, questo è scomposto in una *somma* di frazioni che hanno al numeratore delle costanti e come denominatori i binomi precedenti.

Se $F(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ è la funzione da antitrasformare e $p_1, p_2, p_3 \ldots$ sono i valori di s che annullano il denominatore $D(s)$, scomponendo questo nel prodotto di binomi, si ha:

$$F(s) = \frac{N(s)}{s \cdot (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot (s - p_3) \ldots}$$

Si ricordi che:

- un monomio in s è un binomio in cui $p = 0$;
- i valori di s che annullano il polinomio al numeratore si dicono **zeri**;
- i valori di s che annullano il polinomio al denominatore si dicono **poli**; pertanto i termini $p_1, p_2, p_3 \ldots$ vengono detti *poli reali*, mentre gli eventuali monomi in s vengono detti *poli nulli*;
- si definisce *ordine* di $F(s)$ il grado massimo della variabile s nel polinomio al denominatore;
- il metodo in esame consente l'antitrasfomazione nell'ipotesi che il grado del polinomio $N(s)$ sia *minore* di quello del polinomio $D(s)$, cioè gli zeri debbono essere in numero minore dei poli.

Per sviluppare in frazioni parziali, si determina il valore delle costanti A, B, $C \ldots$ che soddisfano l'eguaglianza:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{s \cdot (s - p_1) \cdot (s - p_2) \ldots} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2} + \ldots \qquad (6)$$

Le costanti cercate si ottengono dall'eguaglianza tra $N(s)$ e il numeratore della somma di frazioni poste alla destra della relazione **6**.

Una volta ricavati i valori di A, B, $C \ldots$ si ottiene una somma di frazioni che possono essere antitrasformate singolarmente, in base alla riga 5 della TABELLA **1** o alla riga 1 nel caso di poli nulli.

Si sviluppano ora alcuni esempi con alcuni casi particolari più frequenti. Nell'ESEMPIO **7** si descrive in dettaglio il procedimento e, dopo, si sviluppa il caso numerico riferito a una funzione $F(s)$ con numeratore costante (k).

ESEMPIO 7

PROCEDIMENTO

ANTITRASFORMAZIONE DI UNA FUNZIONE *F*(*s*)

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{s^n+as^{n-1}+...+ms^0}$$

1) Si ricavano le radici di *D*(*s*), cioè i poli di *F*(*s*), giungendo ad una forma del tipo:

$$F(s)=\frac{N(s)}{s(s-p_1)\cdot(s-p_2)...}$$

2) Si sviluppa *F*(*s*) in somma di frazioni:

$$F(s)=\frac{N(s)}{s(s-p_1)\cdot(s-p_2)...}=$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-p_1}+\frac{C}{s-p_2}+...$$

3) Si determina il valore delle costanti *A*, *B*, *C*...; si può utilizzare uno dei seguenti due metodi.

Uguaglianza dei numeratori: si calcola il denominatore comune e si sviluppa il secondo membro della uguaglianza precedente, sino a ottenere al numeratore un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti di *s*. Si realizzano poi tante eguaglianze quanto è l'ordine del polinomio, tra i coefficienti dei termini in *s* di uguale grado nel numeratore originale (*k*) e nel polinomio. Si risolve il sistema nelle incognite *A*, *B*... fino a determinarne i valori.

Metodo dei residui: ciascuno dei coefficienti *A*, *B*... *I*... può essere determinato dalla relazione:

$$I=\lim_{s\to p_i}\left[F(s)\cdot(s-p_i)\right]$$

con:
I = generico coefficiente;
p_i = polo corrispondente a I.

4) Si sostituiscono le costanti *A*, *B*... con i valori ricavati e si antitrasformano le singole frazioni utilizzando le righe 2 e 6 della TABELLA **1**.

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-p_1}+\frac{C}{s-p_2}+...$$

ESEMPIO NUMERICO

(numeratore costante, *k*)

Data: $$F(s)=\frac{3}{(s^2+5s+6)}$$

1) si ricavano i poli di *F*(*s*) risolvendo l'equazione:

$$s^2+5s+6=0$$
$$\rightarrow p_{1,2}=(-5\pm\sqrt{25-24})/2$$

da cui: $p_1=-2$ e $p_2=-3$;

si scrive quindi:

$$F(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)}$$

2) si effettua lo sviluppo in somma di frazioni:

$$F(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

3) si determina il valore delle costanti *A*, *B*:
Uguaglianza dei numeratori:

$$3=A(s+3)+B(s+2)=$$
$$=s(A+B)+3A+2B$$
$$\begin{cases}A+B=0 \leftarrow N(s)\text{ non ha termini in } s\\ 3A+2B=3 \leftarrow \text{uguaglianza dei termini noti}\end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene:

$$A=3;\ B=-3$$

Metodo dei residui:

$$A=\lim_{s\to-2}\left[\frac{3}{(s+2)(s+3)}\cdot(s+2)\right]=3$$

$$B=\lim_{s\to-3}\left[\frac{3}{(s+2)(s+3)}\cdot(s+3)\right]=-3$$

4) Si sostituiscono le costanti *A*, *B*... con i valori ricavati:

$$F(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s+2}-\frac{3}{s+3}$$

Entrambe le frazioni corrispondono alla riga 5 della TABELLA **1**, per cui l'antitrasformata di *F*(*s*) *vale*:

$$f(t)=3e^{-2t}-3e^{-3t}$$

ESEMPIO 8

FUNZIONE CON POLINOMIO IN *S* AL NUMERATORE

Antitrasformare la funzione: $F(s)=\dfrac{s+1}{3s\cdot(s+5)}$

SOLUZIONE

Si segue il procedimento dell'ESEMPIO **7**:

a-b) $$F(s)=\frac{\frac{s}{3}+\frac{1}{3}}{s\cdot(s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}$$

c)

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}=\frac{A(s+5)+Bs}{s(s+5)}=\frac{s(A+B)+5A}{s(s+5)}$$

Si uguagliano i coefficienti dei termini di identico grado in s nei due numeratori:

$$\begin{cases} A+B=1/3 & \leftarrow \text{uguaglianza coefficienti dei termini in } s \\ 5A=1/3 & \leftarrow \text{uguaglianza dei termini noti} \end{cases}$$

e risolvendo il sistema, si ottiene:

$$A=1/15; \quad B=4/15$$

per cui:

$$F(s)=\frac{1}{15}\cdot\left[\frac{1}{s}+\frac{4}{s+5}\right]$$

d) La prima frazione corrisponde alla riga 1 della TABELLA **1** e la seconda alla riga 5; l'antitrasformata di $F(s)$ vale quindi:

$$f(t)=\frac{1}{15}(1+4\cdot e^{-5t})$$

PROCEDIMENTO Un polinomio $D(s)$ contenente binomi del tipo $(s - p)^n$ si annulla per valori coincidenti di s e si dice che ha radici multiple, quindi la $F(s)$ ha poli multipli.

In tal caso, lo sviluppo in frazioni parziali prevede:

1) tante frazioni quanto è l'ordine di molteplicità del polo multiplo;

2) al numeratore di ciascuna di tali frazioni vi è una costante e i denominatori sono potenze decrescenti da n a 1 del binomio $s - p$.

ESEMPIO 9

FUNZIONE CON POLI MULTIPLI

Antitrasformare la funzione: $F(s)=\dfrac{s}{(s+2)(s+1)^2}$

SOLUZIONE

Si segue il procedimento dell'ESEMPIO **8**:

a-b) Il binomio $(s+1)$ è di secondo grado, per cui si applica la regola sopra enunciata:

$$F(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{s+1}$$

c) Si porta il secondo membro dell'espressione precedente a denominatore comune e si sviluppa il numeratore come polinomio in s:

$$F(s)=\frac{A(s+1)^2+B(s+2)+C(s+2)(s+1)}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{s^2(A+C)+s(2A+3C+B)+A+2B+2C}{(s+2)(s+1)^2}$$

Si uguagliano i coefficienti dei termini con identico grado in s nei numeratori della funzione precedente e di quella originale:

$$\begin{cases} A+C=0 & \leftarrow \text{uguaglianza coefficienti dei termini di 2° grado in } s \\ 2A+B+3C=1 & \leftarrow \text{uguaglianza coefficienti dei termini di 1° grado in } s \\ A+2B+2C=0 & \leftarrow \text{uguaglianza dei termini noti} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene: $A = -2$, $B = -1$, $C = 2$; pertanto la scomposizione è:

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1}$$

d) La prima e la terza frazione corrispondono alla riga 5 della TABELLA **1**, la seconda alla riga 8, con $a = 1$; l'antitrasformata di $F(s)$ vale quindi:

$$f(t) = -2e^{-2t} - t \cdot e^{-t} + 2e^{-t}$$

PROCEDIMENTO Quando il polinomio $D(s)$ uguagliato a 0 ha radici complesse coniugate, è opportuno portarlo alla forma normale:

$$D(s) = (s + a)^2 + \omega^2$$

dove ω costituisce il coefficiente della parte immaginaria della variabile complessa di Laplace s, e rappresenta una pulsazione (cioè $\omega = 2\pi f$), pertanto non ammette radici negative.
Lo sviluppo in frazioni parziali prevede che, se il denominatore è un polinomio di secondo grado in s, il numeratore deve essere di primo grado, cioè assuma la forma:

$$N(s) = As + B$$

Il procedimento di antitrasformazione si sviluppa poi nel modo consueto (ESEMPIO **1**).

ESEMPIO 10

POLINOMIO AL DENOMINATORE CON RADICI COMPLESSE CONIUGATE

Antitrasformare la funzione: $F(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)}$

SOLUZIONE

Il fattore $(s^2 + 2s + 5)$ ha radici complesse coniugate: $p_{1,2} = -1 \pm 2j$. Come sopra indicato, lo si porta alla forma normale: $(s + a)^2 + \omega^2 = s^2 + 2as + a^2 + \omega^2$; per individuare il valore di a e ω, si eguagliano i coefficienti dei termini di identico ordine in s del polinomio del second'ordine dato e di quello ora ricavato, cioè:

$$\begin{cases} 2a = 2 & \leftarrow \text{uguaglianza coefficienti dei termini di 1° grado in } s \\ a^2 + \omega^2 = 5 & \leftarrow \text{uguaglianza dei termini noti} \end{cases}$$

Dal sistema si ottiene: $a = 1$ e $\omega = 2$ rad/s, quindi la forma normale del polinomio a radici complesse coniugate diviene: $(s + 1)^2 + 4$.

Si segue ora il procedimento dell'ESEMPIO **7**:

a-b) Lo sviluppo in frazioni parziali della funzione da antitrasformare è:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+4}$$

c) Portando il secondo membro dell'espressione precedente a denominatore comune e sviluppando il numeratore come polinomio in s si ottiene:

$$F(s) = \frac{s^2(A+B) + s(2A+2B+C) + 5A + 2C}{(s+2)[(s+1)^2+4]}$$

Si uguagliano i coefficienti dei termini d'identico grado in s nei due numeratori:

$$\begin{cases} A+B=0 & \leftarrow \text{uguaglianza coefficienti dei termini di 2° grado in } s \\ 2A+2B+C=1 & \leftarrow \text{uguaglianza coefficienti dei termini di 1° grado in } s \\ 5A+2C=1 & \leftarrow \text{uguaglianza dei termini noti} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $A = -1/5$, $B = 1/5$, $C = 1$; quindi la scomposizione è:

$$F(s) = -\frac{1/5}{s+2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s+5}{(s+1)^2+4}$$

d) La prima frazione corrisponde alla riga 5 della TABELLA **1**, la seconda alla riga 13, con $b = 5$, $a = 1$ e $\omega =$ $= 2$ rad/s, per cui:

$$k = \sqrt{(b-a)^2+\omega^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad \text{e} \quad \varphi = \text{arctg}\frac{\omega}{b-a} \approx 0{,}47 \text{ rad}$$

L'antitrasformata di $F(s)$ vale quindi:

$$f(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot e^{-t}\text{sen}(2t+0{,}47)$$

Si noti che la funzione del tempo relativa alla seconda frazione (poli complessi coniugati) ha un andamento oscillatorio (funzione seno) smorzato esponenzialmente (e^{-t}) del tipo di quello in FIGURA **7**.

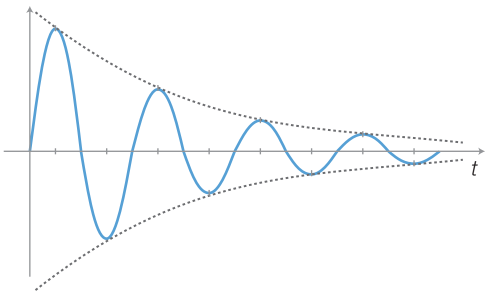


FIGURA **7**

L'equazione ricavata nell'ESEMPIO **4**, $I(s) = \dfrac{E-V_0}{s} \cdot \dfrac{sC}{1+sC \cdot Z_p}$, si può trasformare nel modo seguente:

$$I(s) = (E-V_0)C \cdot \frac{sL+R}{s^2RLC+sL+R} \rightarrow I(s) = \frac{E-V_0}{R} \cdot \frac{s+R/L}{s^2+s/RC+1/LC}$$

in cui si evidenzia l'equazione di secondo grado al denominatore; in base ai valori di R, L e C, tale equazioni può avere radici:

- reali distinte (per $R < \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$): l'antitrasformazione si effettua come nell'ESEMPIO **7**.
- complesse coniugate (per $R > \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$): l'antitrasformazione si effettua come nell'ESEMPIO **10**.

Come si è visto negli esempi precedenti, antitrasformando vari tipi di $F(s)$, nella corrispondente $f(t)$ si ha la presenza di termini in cui gli esponenti di e (numero di Nepero) contengono la variabile tempo e i poli della $F(s)$. Si ricorda che l'andamento dell'esponenziale e^{at} in funzione di t è:

- costante e di valore 1 se $a = 0$;
- esponenziale crescente se $a > 0$;
- esponenziale decrescente se $a < 0$.

Introducendo le *L*-trasformate, si è specificato che costituiscono uno strumento per esaminare il comportamento di una rete *dall'istante* (assunto come $t = 0$) *in cui viene applicato un segnale d'ingresso*.

Si ricava che, applicando un segnale d'ingresso a una rete contenente elementi a immagazzinamento d'energia (condensatori e induttori), l'uscita della rete contiene uno o più termini esponenziali funzioni del tempo.

Questi termini, oltre che dal tempo, dipendono dai poli di $F(s)$ e in particolare:

- tendono all'infinito, con legge esponenziale crescente, se i poli risultano di segno positivo;
- tendono a 0, con legge esponenziale decrescente, se i poli risultano di segno negativo.

Da questo segue che, per poter definire *transitorio* (cioè che si esaurisce nel tempo), l'effetto conseguente all'applicazione di un segnale in un circuito contenente elementi reattivi, è necessario che i poli dell'espressione $F(s)$ che descrive la *risposta* del circuito, siano tutti *negativi o con parte reale negativa*.