Dimostrazione della legge di Betz

Diamo, a puro titolo di curiosità, una dimostrazione della legge di Betz. Il vento, che prima del rotore ha velocità V_1, viene rallentato dopo il rotore alla velocità V_2; nel passaggio da 1) a 2) deve valere l'equazione di continuità, per cui, supponendo la densità dell'aria costante (FIGURA **1**):

$$\rho \cdot V_1 \cdot A_1 = \rho \cdot V_2 \cdot A_2 = \rho \cdot V \cdot A = q_m \tag{1}$$

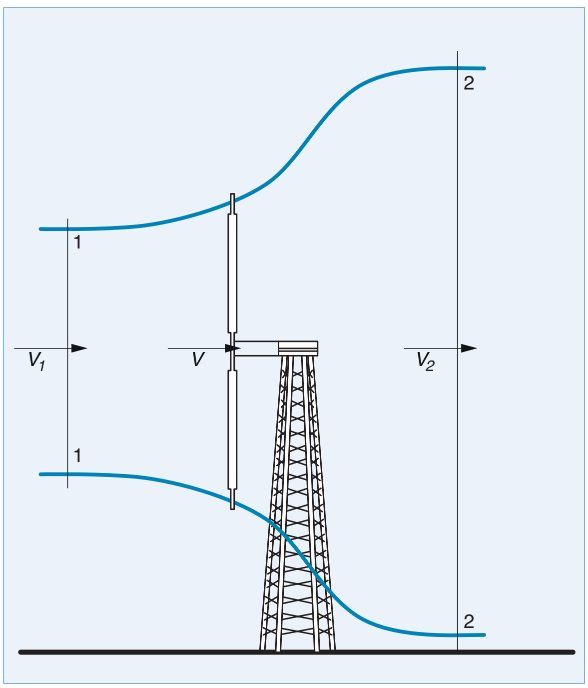

FIGURA **1** Dimostrazione della legge di Betz

essendo A l'area del rotore, V la velocità del vento attraverso lo stesso e q_m la portata massica. L'impulso impresso al rotore equivale alla variazione della quantità di moto tra le sezioni 1) e 2):

$$F \cdot t = m \cdot (V_1 - V_2) \tag{2}$$

da cui

$$F = \frac{m}{t} \cdot (V_1 - V_2) = q_m \cdot (V_1 - V_2) \quad .$$

F è la forza (orizzontale) esercitata dal vento sulla macchina (da intendersi come media temporale della forza nell'arco di una rivoluzione completa del rotore, ed è la forza che sollecita a flessione la torre di sostegno. La potenza ceduta al rotore sarà:

$$P = F \cdot V = q_m \cdot V \cdot (V_1 - V_2) \tag{3}$$

D'altronde la potenza ceduta al rotore si può trovare anche con il bilancio dell'energia cinetica della vena fluida prima e dopo il rotore:

$$P = q_m \cdot \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} \right) \tag{4}$$

e ovviamente le due potenze così calcolate (3) e (4) devono coincidere, da cui:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2} \tag{5}$$

Quindi il rallentamento della vena fluida avviene in parte a monte e in parte a valle del rotore. Se definiamo un coefficiente di interferenza (del rotore sulla velocità del vento)

$$a = 1 - \frac{V}{V_1} \quad ,$$

a è indice di quanto il vento viene rallentato nel passaggio attraverso il rotore:

$$V = V_1 (1 - a) \tag{6}$$

Sostituendo nella (5) si ottiene

$$V_2 = V_1 (1 - 2 \cdot a) \tag{7}$$

da cui il valore massimo di a, nel caso puramente teorico che V_2 si annulli, è pari a 0,5.

Sostituendo la (6) e la (7) nella (4), dopo aver posto $q_m = \rho \cdot v \cdot A$:

$$P = \rho \cdot A \cdot V_1 \cdot (1-a) \cdot \left(\frac{V_1^2 - V_1^2 \cdot (1-2 \cdot a)^2}{2} \right) = \qquad (8)$$

$$= \rho \cdot A \cdot V_1^3 \cdot 2 \cdot a \cdot (1-a)^2$$

Annullando la derivata prima di P rispetto ad a si trova il valore ottimale di a, che massimizza la potenza; eseguendo i calcoli si trovano i due valori $a = 1$ (per cui la potenza si annulla) e $a = 1/3$.

Sostituendo $a = 1/3$ nella (8) si ottiene

$$P = \frac{8}{27} \cdot \rho \cdot A \cdot V_1^3 \quad ,$$

e confrontandola con la (21.2) del testo, $P_t = \dfrac{\rho \cdot A \cdot V_1^3}{2}$, potenza teorica valutata nella zona di fluido indisturbata, si vede che la potenza massima utilizzabile dal rotore è pari a 16/27 (ossia circa il 59,3%) di quella teorica disponibile nel vento.