

**ESAME DI STATO  
DI LICEO SCIENTIFICO - SCIENTIFICO  
TECNOLOGICO  
2010**

**Corso Sperimentale – Progetto Brocca  
Tema di Fisica**

## La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e alle cifre significative e unità di misura nella presentazione dei risultati numerici.

### Primo tema

Nel 1897, dopo oltre sessanta anni dai primi esperimenti di Faraday, modificando la traiettoria dei raggi catodici con campi magnetici, Sir Joseph John Thomson dimostrò che essi erano costituiti da particelle materiali cariche negativamente e per ogni particella riuscì a calcolare il rapporto tra la carica e la massa. Egli chiamò queste particelle *elettroni*.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.
2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.
3. Spiegare il significato dell'espressione "dualismo onda corpuscolo".

Risolve, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di 2,1 eV, calcolare la minima lunghezza d'onda di De Broglie associata agli elettroni emessi.

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}; c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

# La soluzione

## Primo tema

### Ipotesi di de Broglie

In analogia al comportamento duale (ondulatorio e corpuscolare) mostrato dalla luce, nel 1923-24 Louis de Broglie propose che a ogni particella materiale, con quantità di moto  $\vec{p}$ , dovesse essere associata un'onda di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

dove  $h$  è la costante di Planck. La  $\lambda$  così trovata è detta "lunghezza d'onda di de Broglie" della particella.

L'ipotesi di de Broglie è fondamentale perché aprì la strada ai successivi sviluppi della meccanica ondulatoria. In particolare, essa:

- **ingloba la relazione di Einstein**  $E = hf$  per i fotoni. Infatti, per i fotoni vale  $p = E/c$  e quindi per essi si ha  $\lambda = h/p = h/(E/c) = hc/E$ ; da questa espressione si ottiene, allora,

$$E = h \frac{c}{\lambda} = hf.$$

- **spiega la stabilità dell'atomo di Bohr**: infatti, secondo l'interpretazione ondulatoria non bisogna modellizzare l'elettrone dell'atomo di idrogeno come una particella che segue un'orbita circolare, ma come un'onda stazionaria presente attorno al nucleo dell'atomo. Essendo stazionaria, l'onda si mantiene invariata per un tempo indefinito.
- **giustifica la condizione di quantizzazione di Bohr**: per essere stazionaria, l'onda si deve richiudere su se stessa, e ciò è possibile soltanto se la lunghezza  $2\pi r_n$  dell'orbita di Bohr è un multiplo intero della lunghezza d'onda dell'elettrone:

$$2\pi r_n = n \frac{h}{p_n} \quad \Rightarrow \quad 2\pi r_n p_n = nh$$

che è proprio la condizione di quantizzazione di Bohr.

### La meccanica ondulatoria

La meccanica ondulatoria è una particolare formalizzazione della meccanica quantistica presentata nel 1926 da Erwin Schrödinger. Secondo tale teoria, ogni sistema fisico microscopico è descritto da una funzione complessa delle tre coordinate spaziali  $x, y, z$  e dell'istante di tempo  $t$ , detta *funzione d'onda*  $\Psi(x, y, z, t)$ .

Se consideriamo un volume infinitesimo  $dV$  centrato nel punto  $P(x, y, z)$ , la quantità

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 dV$$

fornisce la probabilità che una misura porti a trovare l'elettrone all'istante  $t$  nel volumetto  $dV$ . (Gli orbitali che si incontrano nel programma di Chimica sono funzioni d'onda degli elettroni negli atomi.)

Secondo la meccanica ondulatoria, le probabilità calcolate a partire dalla formula precedente sono le informazioni più dettagliate che è in linea di principio possibile ottenere sul sistema fisico quantistico in esame.

La meccanica ondulatoria abbandona quindi il determinismo che era tipico della fisica classica: in generale, bisogna rinunciare all'idea di prevedere in dettaglio l'evoluzione di un sistema fisico o il risultato di una misura sperimentale. Invece, la teoria permette di calcolare con quale probabilità avranno luogo le possibili evoluzioni di uno stesso stato fisico, oppure con quali probabilità, eseguendo un esperimento, otterremo uno dei risultati possibili piuttosto che un altro.

Un'altra differenza tra la meccanica classica e quella quantistica è espressa dal **principio di indeterminazione di Heisenberg**: nella meccanica classica, in linea di principio è possibile conoscere contemporaneamente e con infinita precisione la posizione e la quantità di moto di una particella; nella meccanica quantistica, invece, l'indeterminazione  $\Delta x$  sulla posizione di una particella e l'indeterminazione  $\Delta p$  sulla sua quantità di moto sono legate dalla relazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Così, se si fa tendere a zero l'indeterminazione su una delle due grandezze  $x$  o  $p$ , l'indeterminazione sull'altra tende all'infinito.

Tra le altre cose, il principio di indeterminazione fornisce una diversa spiegazione del fatto che l'elettrone dell'atomo di idrogeno non può "collapsare" sul nucleo: in effetti, un elettrone fermo sul nucleo di un atomo avrebbe un'indeterminazione molto piccola (dell'ordine del diametro del nucleo) sulla posizione e contemporaneamente, essendo fermo, un'indeterminazione nulla sulla quantità di moto. Ma una tale situazione non può avvenire perché è in contraddizione con il principio di Heisenberg.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg si esprime anche nella forma

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Questa formula ha due possibili interpretazioni:

- la precisione intrinseca  $\Delta E$  su una misura di energia dipende dalla durata della misura stessa.
- per analizzare fenomeni che avvengono durante intervalli di tempo molto brevi bisogna impiegare energie corrispondentemente grandi.

### Dualismo onda-corpuscolo

Gli esperimenti sull'effetto fotoelettrico, realizzati nel 1902 da Philipp Lenard, erano incompatibili con l'elettromagnetismo classico a causa della presenza di una frequenza di soglia  $f_{min}$ , al di sotto della quale l'effetto fotoelettrico non avviene.

Dal punto di vista classico ciò è incomprensibile perché l'irradiazione di una superficie, dovuto a un'onda elettromagnetica, è dato dalla formula

$$E_e = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2,$$

dove  $E_0$  è l'ampiezza del campo elettrico associato all'onda. Quindi, in modo del tutto indipendente dalla frequenza dell'onda, dovrebbe essere possibile convogliare su una superficie una potenza arbitrariamente grande, aumentando il valore di  $E_0$ .

La spiegazione di questo apparente paradosso fu fornita da Albert Einstein nel 1905, quando egli propose che la luce possa essere interpretata come un insieme di quanti di energia (più tardi chiamati "fotoni"), ciascuno con energia  $E = hf$  e quantità di moto  $p = E/c$ .

Negli esperimenti di ottica (in particolare quelli di interferenza e diffrazione) la luce si comporta come un'onda; secondo la formalizzazione di Maxwell la luce è un'onda elettromagnetica; ma Einstein mostra come la stessa luce abbia comportamenti di tipo corpuscolare.

Quindi, *la luce, a seconda delle condizioni sperimentali, può essere descritta in modo alternativo dal modello ondulatorio o da quello corpuscolare*. È questo il **dualismo onda-corpuscolo** della luce, confermato nel 1923 dall'esperimento di Compton, in cui la variazione di lunghezza d'onda di raggi X che incidono su un bersaglio di grafite può essere interpretata come dovuta all'urto di *un* elettrone della grafite con *un* fotone della radiazione X incidente.

Tutto ciò è alla base della riflessione di Louis de Broglie che lo portò, come è spiegato in precedenza, a ipotizzare un'analogo dualismo per le particelle materiali. Un elettrone, per esempio, si comporta come una particella nell'esperimento di J. J. Thomson e in quello di Millikan (per fare solo due esempi), ma ha un comportamento ondulatorio in altri casi, per esempio quando si trova legato in un atomo.

Ricordiamo che il dualismo onda-corpuscolo dell'elettrone è confermato in modo diretto da un esperimento compiuto nel 1927 da C. J. Davisson e L. H. Germer, in cui un fascio di elettroni (con lunghezza d'onda di de Broglie  $\lambda$ ), fatto incidere su un bersaglio metallico, mostra una figura di interferenza del tutto analogo a quello generato da raggi X della stessa lunghezza d'onda. È quindi confermato che gli elettroni, in particolari condizioni sperimentali, mostrano un comportamento ondulatorio.

### Il problema

Dobbiamo premettere un'osservazione: il testo della prova prescrive che il candidato "presti particolare attenzione al corretto uso delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici." Tutto bene, se poi la prova stessa non fornisce la maggior parte dei dati con una sola cifra significativa. Il candidato sarebbe allora

costretto a fare altrettanto, e i risultati perderebbero spesso significato. Non possiamo fare a meno di interrogarci sulla ragione di un modo di procedere così palesemente incoerente. Nel seguito indichiamo tutti i risultati con tre cifre significative.

La velocità di propagazione della luce che si propaga nell'aria con lunghezza d'onda  $\lambda$  e periodo  $T = 1/f$  è praticamente identica alla velocità  $c$  della luce nel vuoto, per cui si ha

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (1)$$

Questa relazione può essere utilizzata per ricavare l'energia dei fotoni che incidono sulla placca fotosensibile, che è

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \times 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}}{5,00 \times 10^{-7} \text{ m}} = 3,98 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (2)$$

Il lavoro di estrazione della placca fotosensibile vale

$$W_e = 2,10 \text{ eV} = 2,10 \text{ eV} \times 1,60 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 3,36 \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (3)$$

Quindi l'energia cinetica massima degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico è

$$K_{max} = E - W_e = 3,98 \times 10^{-19} \text{ J} - 3,36 \times 10^{-19} \text{ J} = 6,2 \times 10^{-20} \text{ J}. \quad (4)$$

Per trovare il corrispondente valore della quantità di moto massima  $p_{max}$ , senza fare troppi calcoli, è conveniente utilizzare l'identità

$$K_{max} = \frac{p_{max}^2}{2m},$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone. Dall'equazione precedente possiamo infatti ricavare

$$p_{max} = \sqrt{2mK_{max}} = \sqrt{2 \times 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 6,2 \times 10^{-20} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}},$$

in modo da ottenere

$$p_{max} = 3,4 \times 10^{-25} \sqrt{\left(\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 3,4 \times 10^{-25} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (5)$$

Ora possiamo infine calcolare la minima lunghezza d'onda  $\lambda_{min}$  richiesta dal problema:

$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{3,4 \times 10^{-25} \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = 2,0 \times 10^{-9} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 2,0 \times 10^{-9} \text{ m}.$$