

**ESAME DI STATO  
DI LICEO SCIENTIFICO  
2000**

**Indirizzo Scientifico  
Progetto Brocca**

## La prova

**Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.**

### Tema 1

Nella prima metà del secolo XX, dopo la scoperta che la radiazione elettromagnetica ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare, fu formulata l'ipotesi che anche la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie.

Il candidato:

- spieghi il significato dell'espressione "*la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare*" e descriva un esperimento che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare;
- spieghi il significato dell'espressione "*fu formulata l'ipotesi che la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie*" e descriva un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica;
- calcoli quanti fotoni emette in un minuto una stazione radio che trasmette musica alla frequenza di 99 MHz con una potenza di uscita di 20 kW;
- calcoli la lunghezza d'onda associata ad un elettrone che, con velocità iniziale trascurabile, è stato accelerato tra due elettrodi da una differenza di potenziale di 200 V;
- calcoli, in eV, la minima energia cinetica che può avere un elettrone costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1 nm:
  - velocità della luce:  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m/s;

- costante di Planck:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ;
- massa dell'elettrone:  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;
- carica dell'elettrone:  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

## La soluzione

### Tema 1

#### Carattere duale della radiazione

Forse chiedere allo studente di spiegare il significato di una frase del testo proposto è una scelta che risente un po' troppo dell'impostazione di tanti Temi di Lingua Italiana. Si tratta di una frase che delinea già una certa formulazione e interpretazione della teoria quantistica e delle sue origini storiche. Forse sarebbe stato meglio scegliere un'impostazione che prendesse le mosse dal resoconto di un esperimento, o comunque da una formulazione esplicitamente legata a uno dei protagonisti di quello sviluppo storico, magari con una citazione originale. Una prova di Fisica non dovrebbe esigere dal candidato la capacità di riportare fedelmente una qualche "interpretazione autentica", quasi che si trattasse della parafrasi in prosa di un verso di Dante.

La frase "la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare" sarà interpretata in maniera differente nel contesto di differenti interpretazioni della teoria quantistica delle onde elettromagnetiche nel suo complesso. Ci limitiamo ad accennare a due interpretazioni particolarmente autorevoli.

- Nell'articolo di Albert Einstein del 1905, "Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce" (si tratta dell'articolo che contiene la celebre spiegazione dell'effetto fotoelettrico e l'ipotesi dei quanti di luce), la "dualità" del comportamento della luce è vista esplicitamente come legata soltanto a differenti livelli di analisi dei fenomeni luminosi. Einstein scrive:

le osservazioni ottiche si riferiscono a valori medi temporali, e non già a valori istantanei, e nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce [...]. Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.

Come si vede chiaramente, il comportamento della luce non è per Einstein "duale" in sé. Piuttosto, esso appare conforme al modello ondulatorio quando si esaminano medie temporali e spaziali, come nelle comuni esperienze di ottica, ivi compresa l'esperienza della doppia fenditura di Young. Ma se si considera la luce a livello microscopico, questa apparirà inequivocabilmente costituita da corpuscoli localizzati nello spazio. Va ricordato che lo scopo dichiarato da Einstein all'inizio del suo lavoro è appunto quello di risolvere la "profonda differenza formale" fra la descrizione ondulatoria e continua della luce e la descrizione corpuscolare dei corpi materiali.

- Secondo l'impostazione di Bohr, basata sul principio di complementarità, la necessità di descrivere i risultati degli esperimenti nel linguaggio della fisica classica, che è anche quello dell'esperienza quotidiana, costringe a usare, di volta in volta, i termini del modello corpuscolare o del modello ondulatorio. Lo sperimentatore deve decidere, fin dall'inizio, su quale modello basarsi e deve rinunciare a osservare quei comportamenti che sono descritti in

maniera soddisfacente soltanto nel modello complementare. Ogni domanda sul *reale* comportamento della luce è per Bohr priva di senso, perché nessun esperimento potrà rispondere ad essa, così come nessun esperimento potrà mai mettere in evidenza *entrambi* gli aspetti, quello ondulatorio e quello corpuscolare, *nello stesso tempo*.

Ci scusiamo per questa lunga discussione. Speriamo di aver sottolineato adeguatamente le difficoltà anche insidiose implicite nella richiesta del tema. Naturalmente, ci sentiamo di affermare che la risposta del candidato andava valutata in base al contesto complessivo in cui egli aveva appreso le basi della teoria quantistica, senza discriminare fra differenti interpretazioni, ciascuna a suo modo legittima.

Il terreno su cui ci muoviamo è un po' più saldo se affrontiamo la seconda parte della prima richiesta, la descrizione di un esperimento "che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare" della luce. Certo, anche qui occorre chiedersi cosa si debba intendere per "mettere in evidenza". La meccanica quantistica ci mette continuamente di fronte all'impossibilità di separare completamente teoria ed esperimento. Nessun esperimento può mettere in evidenza l'aspetto corpuscolare della luce, se non nel quadro di una teoria dei fenomeni di emissione e assorbimento della luce: non si possono vedere i fotoni!

Un buon esempio di quanto intendiamo dire è proprio l'effetto fotoelettrico e la spiegazione che ne propone Einstein. L'osservazione dell'effetto fotoelettrico da parte di Lenard nel 1902, o meglio, la determinazione che in tale fenomeno l'energia dei fotoelettroni è indipendente dall'intensità della radiazione incidente, non è di per sé una dimostrazione dell'aspetto corpuscolare della luce. Altrimenti, non ci sarebbe stata ragione di assegnare ad Einstein il premio Nobel per l'articolo già citato. L'effetto fotoelettrico diventa una manifestazione dell'aspetto corpuscolare *alla luce* della spiegazione che ne ha offerto Einstein. Avendo sottolineato questo punto importante, riportiamo nel seguito la discussione dell'effetto fotoelettrico già svolta in relazione alla prova d'Esame per l'anno 1997.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore  $\lambda_0$ , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a  $\lambda_0$ .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo è effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata come *lavoro di estrazione*  $W$ , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante  $h$  (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza  $f$  della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia  $hf$ . Indicheremo questi quanti con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto

in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (1)$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia  $hf$ . Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a  $W$  e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece  $f$  è uguale o superiore a una frequenza di soglia  $f_0$  (ovvero, se  $\lambda$  è uguale o inferiore a  $\lambda_0 = c/f_0$ ) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina  $\lambda_0$  è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (2)$$

### Caratteristiche ondulatorie della materia

Anche questo punto non è esente da difficoltà. Non ripetiamo ciò che abbiamo già detto a proposito della scelta di invitare lo studente a spiegare il significato di una frase del testo. Sottolineiamo invece come l'espressione “un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica” sia problematica. Non era meglio parlare di “fondatezza”, piuttosto che di realtà? Forse l'estensore desiderava enfatizzare come l'ipotesi in discussione non possa più essere considerata un semplice espediente formale, ma faccia emergere uno specifico elemento di realtà. Ma, ancora una volta, ciò significa privilegiare *una* interpretazione della teoria quantistica, e dare per scontato che tutti i candidati siano stati esposti ad essa e soltanto ad essa.

La frase citata si riferisce evidentemente all'ipotesi di de Broglie, avanzata da questi nel 1923 e poi nella tesi di dottorato del 1924. De Broglie propose di associare a ogni particella di massa a riposo  $m$  un “fenomeno periodico interno”. Tale fenomeno, in un sistema di riferimento in cui la particella avesse avuto velocità  $v$  e quantità di moto  $p$ , avrebbe dato origine a un'onda di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3)$$

dove  $h$  è la costante di Planck.

Nella formulazione di de Broglie non sono chiarite né la natura del “fenomeno periodico interno” né quella dell'onda associata alla particella. L'ipotesi di tale onda restava allora del tutto arbitraria. Ma immaginiamo che la particella in questione sia un elettrone in moto su un'orbita all'interno di un atomo di idrogeno. Propagandosi lungo l'orbita, l'onda interferirà con se stessa; possiamo assumere quindi che le sole orbite consentite siano quelle che danno luogo a un'interferenza costruttiva dell'onda con se stessa e quindi allo stabilirsi di un'onda *stazionaria*. La condizione perché questo avvenga è che l'orbita dell'elettrone contenga un numero intero di lunghezze d'onda. Per orbite circolari di raggio  $r$

$$2\pi r = n\lambda \quad (4)$$

con  $n$  intero qualunque. Facendo uso della (3) otteniamo

$$L = pr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar. \quad (5)$$

La (5) esprime la condizione di quantizzazione di Bohr per orbite circolari, ipotizzata da Bohr nell'articolo del 1913 per spiegare la stabilità della materia e il fenomeno degli spettri a righe. L'ipotesi di de Broglie rappresenta perciò un primo elemento di giustificazione di quella ipotesi e un importante indizio per il programma di ricerca che sarebbe stato portato al successo da Schrödinger nel 1926.

Se ad un elettrone in movimento è necessario associare un'onda, deve essere possibile osservare nel caso degli elettroni i fenomeni associati alla propagazione ondulatoria, in particolare il fenomeno dell'*interferenza*. Ciò avvenne effettivamente grazie a una serie di esperimenti realizzati fra il 1925 e il 1927 da alcuni ricercatori, in particolare da Davisson e Germer. Facendo incidere un fascio di elettroni su un cristallo, i piani di simmetria del cristallo si comportano come un reticolo di diffrazione. Ponendo a una certa distanza dal cristallo una lastra fotografica, su di essa si registra una figura di interferenza, formata da zone chiare alternate a zone scure, del tutto analoga a quella che si ottiene impiegando, invece degli elettroni, una radiazione elettromagnetica costituita da raggi X.

Supponiamo di impiegare elettroni emessi da un tubo catodico e accelerati da una differenza di potenziale dell'ordine di  $10^3$  V. L'energia cinetica impressa agli elettroni è

$$K = e\Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ V} \simeq 10^{-16} \text{ J}.$$

La velocità degli elettroni, calcolata come è lecito in maniera non relativistica, risulta

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-16} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \simeq 10^7 \text{ m/s}.$$

La lunghezza d'onda associata a questi elettroni secondo la (3) è

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^7 \text{ m/s}} \simeq 10^{-10} \text{ m}$$

un ordine di grandezza confrontabile con quello tipico dei raggi X.

### I fotoni emessi da una stazione radio

Secondo l'interpretazione proposta da Einstein, e incorporata nelle successive versioni della teoria quantistica, una radiazione di frequenza  $f$  dev'essere considerata composta da *fotoni* (il termine non è di Einstein) di energia  $hf$ . Nel caso qui discusso:

$$E_{\text{fotone}} = hf = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 99 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 6,6 \cdot 10^{-26} \text{ J}. \quad (6)$$

In un minuto, la stazione irradia un'energia pari a

$$E_{\text{stazione}} = P \Delta t = 20 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ J}. \quad (7)$$

Otteniamo il numero dei fotoni emessi in un minuto dividendo la (7) per la (6):

$$N_{\text{fotoni}} = \frac{E_{\text{stazione}}}{E_{\text{fotone}}} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \text{ J}}{6,6 \cdot 10^{-26} \text{ J}} = 1,8 \cdot 10^{31}. \quad (8)$$

### La lunghezza d'onda di un elettrone

Abbiamo già svolto un calcolo analogo discutendo l'esperimento di Davisson e Germer. Se un elettrone attraversa una differenza di potenziale  $\Delta V$ , la sua energia cinetica aumenta di una quantità pari all'energia potenziale elettrica persa dal sistema:

$$\Delta K = -\Delta U = e\Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 200 \text{ V} = 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}. \quad (9)$$

Nell'ipotesi che la velocità iniziale dell'elettrone sia trascurabile rispetto alla sua velocità finale, quest'ultima può essere calcolata come:

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2\Delta K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 8,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}. \quad (10)$$

Il valore della velocità finale è compatibile con la trattazione non relativistica da noi adottata, in quanto  $v_f \ll c$ . Dalla (3) si ricava immediatamente

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}} = 8,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (11)$$

### **Energia cinetica minima di un elettrone**

Se l'elettrone è costretto a muoversi su una retta entro un intervallo di ampiezza  $\Delta x$ , la sua posizione lungo tale coordinata è nota appunto con un'indeterminazione  $\Delta x$ . In base alle relazioni di indeterminazione di Heisenberg possiamo scrivere:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar. \quad (12)$$

L'indeterminazione minima sulla componente  $x$  della quantità di moto risulta perciò

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} / (2 \cdot \pi)}{1 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 1 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \quad (13)$$

Poiché

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

l'energia cinetica dell'elettrone è affetta da un'indeterminazione non minore di

$$\Delta K = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{(1 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3 \text{ eV}. \quad (14)$$

Facciamo notare che, se l'indicazione per cui l'elettrone è confinato su una retta dovesse essere presa alla lettera, ciò comporterebbe che l'indeterminazione sulla sua posizione lungo gli assi  $y$  e  $z$  sia nulla.