ESAME DI STATO
DI LICEO SCIENTIFICO
1999
Indirizzo
Scientifico-Tecnologico
Progetto Brocca

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 2

Un condensatore è un sistema elettrico costruito in modo tale da avere una grande capacità. Più condensatori possono essere collegati fra loro per aumentare o diminuire la capacità complessiva disponibile.

Il candidato:

1. definisca la grandezza fisica "capacità elettrica" di un conduttore, la sua unità di misura nel sistema S.I. e i suoi sottomultipli;
2. calcoli il raggio di un'ipotetica sfera conduttrice che abbia la capacità di un farad e commenti il risultato; come dato di riferimento prenda il raggio medio della Terra di $6370\,\text{km}$;
3. descriva la struttura di un condensatore piano spiegando perché essa permette d'aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema;
4. ricavi e commenti la formula per calcolare la capacità elettrica di un condensatore piano;
5. descriva almeno un'utilizzazione del condensatore in ambito scientifico o tecnologico;
6. disegni i simboli grafici di tre condensatori da $100\,\mu\text{F}$ collegati in modo da ottenere le capacità complessive di $150\,\mu\text{F}$ e di $300\,\mu\text{F}$.

Il candidato risolva, infine, il seguente problema.

Un sistema di condensatori avente la capacità complessiva di 1 mF, a cui è applicata la d.d.p. di 10 kV, è fatto scaricare su un resistore con $R = 100\,\Omega$ immerso in un litro d'acqua distillata alla temperatura di 20 °C e contenuta in un recipiente isolato termicamente.

Il candidato calcoli la temperatura finale dell'acqua dopo che il sistema di condensatori si è completamente scaricato e spieghi che cosa succederebbe se si fosse raddoppiato il valore della resistenza.

La soluzione

Tema 2

1.

La *capacità elettrica* C di un conduttore carico isolato è definita come il rapporto fra la carica totale Q_T presente sul conduttore e il potenziale elettrico V al quale si trova il conduttore (ponendo $V = 0$ a distanza infinita dal conduttore):

$$C = \frac{Q_T}{V}. \tag{1}$$

Di conseguenza le dimensioni fisiche della capacità sono quelle di una carica divisa per una tensione, ovvero di una carica al quadrato divisa per un'energia. L'unità di misura nel Sistema Internazionale è il *farad*, definito in modo che

$$1\,\mathrm{F} = \frac{1\,\mathrm{C}}{1\,\mathrm{V}} = \frac{1\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{J}/(1\,\mathrm{A}\cdot 1\,\mathrm{s})} = \frac{(1\,\mathrm{A})^2\cdot(1\,\mathrm{s})^2}{1\,\mathrm{kg}\cdot(1\,\mathrm{m})^2/(1\,\mathrm{s})^2} = \frac{(1\,\mathrm{A})^2\cdot(1\,\mathrm{s})^4}{1\,\mathrm{kg}\cdot(1\,\mathrm{m})^2}. \tag{2}$$

Com'è noto, e come si vedrà esplicitamente in seguito, il farad è un campione di capacità di dimensioni troppo elevate per essere di uso pratico. Per questo risultano importanti i suoi sottomultipli, definiti come previsto dal Sistema Internazionale:

$$\begin{aligned}
1\,\text{millifarad} &= 1\,\mathrm{mF} = 10^{-3}\,\mathrm{F}\\
1\,\text{microfarad} &= 1\,\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}\\
1\,\text{nanofarad} &= 1\,\mathrm{nF} = 10^{-9}\,\mathrm{F}\\
1\,\text{picofarad} &= 1\,\mathrm{pF} = 10^{-12}\,\mathrm{F}.
\end{aligned}$$

Il concetto di capacità *elettrica* di un sistema è stato costruito storicamente in analogia con il concetto di capacità di un *recipiente* e di capacità *termica*. In tutti questi casi, infatti, entra in gioco la relazione fra "qualcosa" che viene fornito al sistema e il *livello* a cui si porta il sistema in conseguenza di ciò. Nel caso di un recipiente, parliamo di un fluido e del livello da esso raggiunto nel recipiente. Nel caso della capacità termica, parliamo dell'energia termica fornita al sistema e del livello termico, cioè della *temperatura*, da esso raggiunta. Nel caso della capacità elettrica, si tratta della carica elettrica e del livello elettrico, cioè del *potenziale*.

Poiché i primi modelli fisici tanto dell'energia termica che della quantità di carica sono stati quelli di un particolare *fluido*, è facile osservare che l'analogia sottesa al termine di "capacità" non è affatto casuale dal punto di vista storico.

2.

La capacità elettrica di una sfera conduttrice carica isolata e in equilibrio, di raggio R, può essere determinata calcolando il potenziale V a cui essa si trova.

La sfera è un conduttore all'equilibrio; di conseguenza, il campo elettrico al suo interno dev'essere nullo ovunque, altrimenti i portatori di carica si metterebbero in moto, contro l'ipotesi dell'equilibrio. Sulla superficie della sfera, per lo stesso motivo, il campo elettrico dev'essere normale alla superficie. Così, se immaginassimo di spostare una carica infinitesima da un punto all'altro della sfera, il campo elettrico non eseguirebbe su di essa alcun lavoro. Poiché la differenza di potenziale fra due punti è data appunto dal lavoro elettrico compiuto spostando da uno all'altro una carica di prova, concludiamo che il potenziale deve essere lo stesso in tutti i punti della sfera.

Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico su una qualsiasi superficie chiusa interna alla sfera deve risultare proporzionale alla carica elettrica racchiusa dalla superficie. Ma, per quanto detto sopra, tale flusso risulta identicamente nullo per qualunque superficie. Di conseguenza, all'interno della sfera non troveremo alcuna carica elettrica non equilibrata. In altri termini, la carica elettrica depositata sulla sfera deve distribuirsi sulla superficie di questa.

Determiniamo il potenziale elettrico al centro della sfera. Ogni carica infinitesima dq posta sulla superficie della sfera può essere trattata come una carica puntiforme, che genera a distanza R, cioè nel centro della sfera, un potenziale infinitesimo

$$dV(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R}.$$

Sommando tutti questi contributi, e ricordando che R ha lo stesso valore per ciascuno di essi, otteniamo il potenziale

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_T}{R} \tag{3}$$

che coincide, in maniera niente affatto casuale, con il potenziale che la carica Q_T genererebbe sulla superficie della sfera se fosse concentrata nel suo centro.

Come abbiamo già detto, questo valore del potenziale è lo stesso in tutti i punti della sfera e può quindi essere considerato come *il* potenziale della sfera. Per la definizione (1) otteniamo la seguente espressione della capacità di una sfera:

$$C = \frac{Q_T}{V} = Q_T \cdot 4\pi\varepsilon_0 \frac{R}{Q_T} = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{4}$$

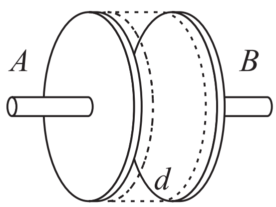
Se $C = 1\,\mathrm{F}$ abbiamo:

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1\,\mathrm{F}}{4\pi\, 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}} = 8{,}988 \cdot 10^9\,\mathrm{m}.$$

Come si vede, si tratta di una sfera il cui raggio è di tre ordini di grandezza maggiore di quello della Terra.

3.

Un condensatore piano è costituito da due superfici conduttrici piane (dette *armature*) di area S e affacciate a una distanza x. Lo spazio fra le armature A e B è per lo più riempito da un dielettrico d.

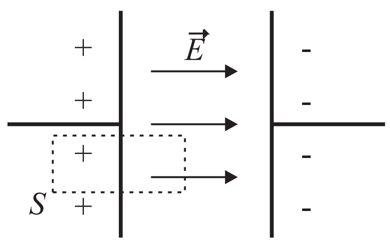


Se depositiamo una carica positiva $+Q$ sull'armatura A, l'altra armatura, se collegata a terra, si carica per induzione assumendo una carica negativa $-Q$. I due conduttori non sono evidentemente isolati, per cui il potenziale a cui si trova ciascuno di essi dipende dalla presenza dell'altro conduttore. Piuttosto che parlare di potenziale di ciascuna delle armature, è conveniente parlare della *differenza di potenziale* ΔV fra di esse. La capacità di un condensatore è infatti definita come il rapporto fra la carica presente su un'armatura e la *differenza* di potenziale fra le armature.

Il testo chiede di spiegare perché un condensatore piano "permette d'aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema". Non è del tutto chiaro che cosa l'estensore abbia in mente. Ma, in ogni caso, ci sembra più opportuno discutere questo punto contestualmente al prossimo e a partire dall'espressione analitica della capacità di un condensatore piano.

4.

Per determinare il campo elettrico generato da *una* armatura, applichiamo il teorema di Gauss alla superficie cilindrica S (rappresentata di taglio nel disegno qui sotto).



Nel seguito, supporremo che la distanza fra le armatura sia molto minore delle dimensioni delle armature stesse. Ciò comporta che, per i punti lontani dal bordo, gli effetti di bordo siano molto limitati, e il campo appaia come quello di una distribuzione piana di carica praticamente infinita. Per motivi di simmetria, il campo deve avere due proprietà importanti:

1. deve essere perpendicolare alla superficie dell'armatura;

2. deve avere la stessa intensità su entrambe le facce dell'armatura, a distanze uguali da essa, e deve essere rivolto in versi opposti.

Il flusso di tale campo attraverso il cilindro S è fatto di due contributi: il flusso attraverso la superficie laterale e quello attraverso le due superfici di base. Per il punto 1. indicato sopra, il primo contributo è nullo, perché il campo è dappertutto tangente alla superficie laterale del cilindro. Per il punto 2., il flusso totale è pari al doppio del flusso attraverso una delle due basi del cilindro. Tale flusso vale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2\Phi_{base}(\vec{E}) = 2\vec{E}\circ\vec{A} = 2E\cdot A \tag{5}$$

dove A è l'area di base di S, ed è anche l'area intercettata da S sull'armatura. Per il teorema di Gauss, il flusso totale attraverso S dev'essere uguale alla carica totale racchiusa da S divisa per la costante dielettrica del mezzo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_T}{\varepsilon} = \frac{\sigma A}{\varepsilon} \tag{6}$$

dove σ è la densità superficiale di carica sull'armatura.

Confrontando la (5) e la (6) otteniamo l'espressione del campo elettrico di un'armatura:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}. \tag{7}$$

Si tratta di un campo *indipendente dalla distanza dalle armature*. Nei limiti delle ipotesi da noi poste, e dunque per distanze dall'armatura piccole rispetto all'armatura stessa, e per punti non troppo vicini al bordo, il campo generato da un'armatura ha lo stesso valore in tutti i punti.

Sovrapponiamo ora i campi generati dalle due armature. All'esterno del condensatore i campi hanno verso opposto (ricordiamo che il campo dell'armatura positiva è *uscente* da essa, mentre il campo dell'armatura negativa è *entrante* in essa) ma uguale direzione e intensità: la loro somma è pertanto uguale a zero. All'interno del condensatore, invece, i versi dei due campi sono concordi, per cui i campi si sommano. Il campo totale è perciò confinato all'interno del condensatore e ha ivi intensità σ/ε uniforme.

Per determinare la differenza di potenziale fra le armature, ricordiamo la definizione:

$$\Delta V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \tag{8}$$

che in questo caso, andando dall'armatura negativa a quella positiva (ricordiamo che x rappresenta la distanza fra le armature), diventa:

$$\Delta V = -(\vec{E} \circ \Delta\vec{s}) = -(-Ex) = Ex = \frac{\sigma x}{\varepsilon} = \frac{Qx}{\varepsilon S}. \tag{9}$$

La capacità del condensatore risulta pertanto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon S}{x}. \tag{10}$$

L'espressione (10) ci permette di capire quali fattori influenzano la capacità di un condensatore. In primo luogo, la presenza di un dielettrico fra le armature aumenta il valore della capacità di un fattore pari alla costante dielettrica relativa ε_r del mezzo interposto. In effetti, il dielettrico fra le armature cariche risulta polarizzato, con un campo elettrico dovuto alla polarizzazione rivolto in verso *opposto* a quello delle armature. Ciò va a diminuire il campo elettrico totale e quindi la differenza di potenziale fra le armature, permettendo di immagazzinare su di esse più carica elettrica a parità di tensione.

In secondo luogo, la capacità risulta tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto S/x. Per avere una grande capacità, le armature devono essere le più estese possibile e la distanza che le separa dev'essere la minima possibile. Ciò viene realizzato, in pratica, con fogli conduttori molto sottili, separati da strati di dielettrico spessi poche molecole, e avvolti strettamente su se stessi.

5.

Molte applicazioni dei condensatori sono direttamente legate alla loro natura di *serbatoi di carica elettrica*. In alcune calcolatrici programmabili, ad esempio, un condensatore svolge il ruolo di "generatore di tensione di emergenza". Queste calcolatrici non hanno, ovviamente, memorie di massa simili a un disco fisso, così che i dati e i programmi dell'utente devono essere conservati nella RAM sotto forma di stati di tensione. La tensione necessaria a questo scopo è fornita naturalmente dalle batterie che fanno funzionare la calcolatrice. Quando queste batterie sono esaurite e devono essere sostituite, però, occorre un "dispositivo tampone" che mantenga una tensione sufficiente per il tempo necessario. Questo dispositivo può appunto essere costituito da un condensatore di grande capacità, in grado di mantenere una corretta differenza di potenziale per parecchi minuti a calcolatrice spenta.

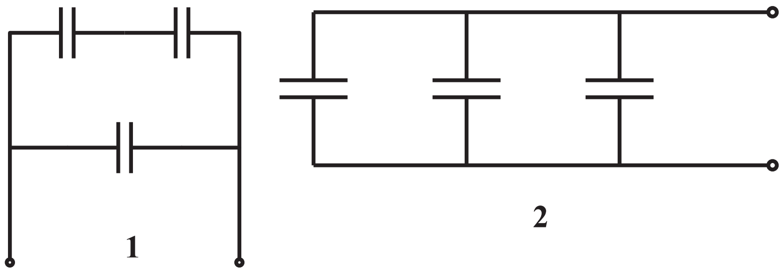
6.

È facile dimostrare che la connessione di più condensatori gode delle seguenti proprietà:

1. la connessione di più condensatori in parallelo è equivalente a un unico condensatore, la cui capacità sia uguale alla somma delle capacità dei condensatori;

2. la connessione di più condensatori in serie è equivalente a un unico condensatore, l'inverso della cui capacità sia uguale alla somma degli inversi delle capacità dei condensatori.

In base a ciò, tracciamo gli schemi seguenti, dove tutti i condensatori hanno una capacità di $100\,\mu$F.



Questi schemi costituiscono la risposta al quesito proposto.

1. Nello schema **1** i due condensatori collegati *in serie* hanno una capacità equivalente di 50μF, così che la loro connessione *in parallelo* con il terzo condensatore ha una capacità equivalente di 150μF.

2. Nello schema **2** i tre condensatori collegati *in parallelo* hanno una capacità equivalente di 300μF.

Problema

Per risolvere il problema proposto, determiniamo l'espressione che fornisce l'energia necessaria a caricare un condensatore fino a una tensione ΔV assegnata. Se sul condensatore è presente una carica q e quindi una differenza di potenziale $\Delta V(q)$, per portare sull'armatura positiva un'ulteriore carica infinitesima dq occorre spendere un'energia $dq\Delta V$. L'energia totale necessaria a caricare il condensatore è pertanto:

$$E = \int_0^Q \Delta V\, dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C\Delta V^2. \tag{11}$$

Nel nostro caso tale energia vale

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1\,\mathrm{mF} \cdot (10\,\mathrm{kV})^2 = 50\,\mathrm{kJ}. \tag{12}$$

Quando il condensatore si scarica sul resistore, l'energia immagazzinata viene spesa per fare passare la corrente in quest'ultimo e viene quindi convertita in energia interna del resistore e dell'acqua per effetto Joule. Trascurando (come è certamente legittimo) la capacità termica del resistore, l'energia termica trasferita all'acqua può essere calcolata con l'espressione:

$$E_{term} = C_{term}\Delta T = cm\Delta T. \tag{13}$$

Per il principio di conservazione dell'energia la (12) e la (13) sono uguali. Ricordando che per l'acqua $c = 4186\,\mathrm{J}/(\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg})$ e $d = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ e risolvendo per ΔT otteniamo:

$$\Delta T = \frac{E_{term}}{cm} = \frac{50\,\mathrm{kJ}}{4186\,\mathrm{J}/(\mathrm{K}\cdot\mathrm{kg})\cdot 1\,\mathrm{kg}} = 12\,\mathrm{K} = 12\,^\circ\mathrm{C}. \tag{14}$$

La temperatura finale dell'acqua risulta di $32\,^\circ$C. Facciamo notare che questo risultato non dipende affatto dal valore della resistenza. Se R raddoppiasse, la costante di tempo $\tau = RC$ del circuito di scarica raddoppierebbe anch'essa e la scarica si svolgerebbe più lentamente, ma la temperatura finale dell'acqua avrebbe lo stesso valore.