

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014**

- 9** Le lettere \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo \aleph_0 (*aleph-zero*) indica la cardinalità di \mathbb{N} . Gli insiemi \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} hanno anch'essi cardinalità \aleph_0 ? Si motivi la risposta.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

9 La cardinalità (o potenza) di un insieme è il numero degli elementi che lo costituiscono. Due insiemi hanno la stessa cardinalità se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi; un insieme ha cardinalità minore di un altro se esiste una funzione iniettiva tra il primo insieme e il secondo, ma non viceversa. Consideriamo l'insieme \mathbb{N} e l'insieme \mathbb{Z} e stabiliamo la seguente corrispondenza biunivoca:

0	1	2	3	4	5	6	7	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	-1	+1	-2	+2	-3	+3	-4	...

Pertanto l'insieme \mathbb{Z} è numerabile ovvero ha la stessa cardinalità \aleph_0 di \mathbb{N} .

Consideriamo l'insieme \mathbb{N} e \mathbb{Q} . La numerabilità dell'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} fu dimostrata da G Cantor (1845-1918). La sua dimostrazione si basa sul diagramma a fianco (figura 15) che stabilisce con il metodo della diagonalizzazione una corrispondenza biunivoca tra i razionali positivi \mathbb{Q}^+ e \mathbb{N} .

Seguendo le frecce si possono ordinare i numeri razionali positivi, evidenziando le frazioni equivalenti che non rappresentano nuovi numeri razionali e che perciò non vanno contati.

Lo stesso procedimento può essere adottato per dimostrare la numerabilità di \mathbb{Q}^- .

Poiché $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ e l'unione di insiemi numerabili è numerabile, si deduce che \mathbb{Q} è numerabile.

Si può dimostrare che l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} ha cardinalità minore dell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} , in particolare si dimostra che \mathbb{N} ha cardinalità minore dei numeri reali compresi tra 0 e 1 e a maggior ragione l'avrà rispetto a tutto \mathbb{R} . Tale dimostrazione si basa sul cosiddetto *argomento diagonale*, proprio di G. Cantor, con quale il matematico dimostrò la non numerabilità di \mathbb{R} . Ipotizziamo per assurdo l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{N} e i numeri reali appartenenti all'intervallo $[0; 1]$; ciò genera una successione x_i formata da tutti questi numeri che esprimeremo in forma decimale:

$$x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots$$

dove a_{ij} è la cifra j -esima del numero i -esimo.

Osserviamo il numero formato dagli elementi della diagonale principale della matrice $\{a_{ij}\}$:

$$0, a_{11} a_{22} a_{33} \dots$$

e costruiamo un nuovo numero $\bar{x} = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$, dove la cifra b_i è così generata:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 & \text{se } 0 \leq a_{ii} < 9 \\ 0 & \text{se } a_{ii} = 9 \end{cases}$$

Si può dedurre che il numero \bar{x} , reale e appartenente all'intervallo $[0; 1]$ non appare nella successione $\{x_i\}$. Pertanto non esiste una corrispondenza biunivoca tra \mathbb{N} e i numeri reali dell'intervallo $[0; 1]$ e, a maggior ragione, tra \mathbb{N} e \mathbb{R} .

