

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2013**

- 9** Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2013

**9** Per risolvere il problema è necessario ricordare che la cardinalità di un insieme è il numero degli elementi che lo costituiscono; due insiemi hanno la stessa cardinalità (o potenza) se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi; un insieme ha cardinalità minore di un altro se esiste una funzione iniettiva tra il primo insieme e il secondo, ma non viceversa. È noto che l'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  e i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  hanno la stessa cardinalità (si veda, per questo, lo svolgimento del quesito 4 del corso sperimentale P.N.I. 2012).

Si può dimostrare che l'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  ha cardinalità minore dell'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , in particolare si dimostra che  $\mathbb{N}$  ha cardinalità minore dei numeri reali compresi tra 0 e 1 e a maggior ragione l'avrà rispetto a tutto  $\mathbb{R}$ . Tale dimostrazione si basa sul cosiddetto *argomento diagonale*, proprio di G. Cantor (1845-1918), con quale il matematico dimostrò la non numerabilità di  $\mathbb{R}$ . Ipotizziamo per assurdo l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra  $\mathbb{N}$  e i numeri reali appartenenti all'intervallo  $[0; 1]$ ; ciò genera una successione formata da tutti questi numeri che esprimeremo in forma decimale:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

dove  $a_{ij}$  è la cifra  $j$ -esima del numero  $i$ -esimo.

Osserviamo il numero formato dagli elementi della diagonale principale della matrice  $\{a_{ij}\}$ :

$$0, a_{11} a_{22} a_{33} \dots$$

e costruiamo un nuovo numero  $\bar{x} = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ , dove la cifra  $b_i$  è così generata:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 & \text{se } 0 \leq a_{ii} < 9 \\ 0 & \text{se } a_{ii} = 9 \end{cases}.$$

Si può dedurre che il numero  $\bar{x}$ , reale e appartenente all'intervallo  $[0; 1]$  non appare nella successione  $\{x_i\}$ . Pertanto non esiste una corrispondenza biunivoca tra  $\mathbb{N}$  e i numeri reali dell'intervallo  $[0; 1]$  e, a maggior ragione, tra  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ .

Ora, l'insieme degli irrazionali  $\mathbb{I}$  è l'insieme differenza  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ : tale insieme ha la stessa cardinalità di  $\mathbb{R}$ . Pertanto ha ragione Luisa affermando che esistono più numeri irrazionali che razionali.