

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005  
Sessione suppletiva**

**9** Si consideri il seguente sistema nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

dove  $a$  è un parametro reale. Il sistema è:

- A) determinato per ogni valore di  $a$ ;
- B) indeterminato per un valore di  $a$  e impossibile per un valore di  $a$ ;
- C) indeterminato per nessun valore di  $a$ , ma impossibile per un valore di  $a$ ;
- D) impossibile per nessun valore di  $a$ , ma indeterminato per un valore di  $a$ .

Un sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005**  
**Sessione suppletiva**

**9** Il sistema lineare nelle incognite  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

ha matrice incompleta:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Il suo determinante vale  $D = a^3 - 3a + 2$  e può essere scritto come:

$$D = a^3 - a - 2a + 2 = a(a^2 - 1) - 2(a - 1) = (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)^2(a + 2).$$

Per la regola di Cramer il sistema è determinato per  $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ .

Per  $a = 1$  le matrici incompleta e completa diventano:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le loro caratteristiche valgono entrambe 1 e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è indeterminato e ammette  $\infty^2$  soluzioni.

Per  $a = -2$  le matrici incompleta e completa risultano:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

La caratteristica della matrice incompleta è 2 mentre per la matrice completa vale 3. Per il teorema appena indicato il sistema è quindi impossibile.

Si conclude che il sistema di partenza è indeterminato per  $a = 1$ , mentre è impossibile per  $a = -2$ . La risposta esatta è dunque B.