Liceo scientifico e opzione scienze applicate

2 Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$, trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

2 Per ogni valore del parametro $k \in \mathbb{R}$, la funzione $f_k(x) = -x^3 + 6kx + 33$ è polinomiale di terzo grado, definita e derivabile in $\mathbb{R}$.
Una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante ha coefficiente angolare 1.

Dobbiamo dunque trovare la funzione $f_k(x)$ la cui derivata, calcolata in $x = 3$, vale 1:

$$f_k'(x) = -3x^2 + 6k;$$

$$f_k'(3) = -27 + 6k;$$

$$f_k'(3) = 1 \rightarrow -27 + 6k = 1 \rightarrow k = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}.$$

La funzione cercata è dunque:

$$f_{\frac{14}{3}}(x) = -x^3 + 28x + 33.$$

L'ordinata del punto di tangenza è:

$$f_{\frac{14}{3}}(3) = -27 + 84 + 33 = 90.$$

L'equazione della retta tangente è del tipo $y = x + q$. Troviamo il termine noto q imponendo il passaggio per il punto di tangenza (3; 90):

$$90 = 3 + q \rightarrow q = 87.$$

Concludiamo che l'equazione della retta tangente è:

$$y = x + 87.$$