Scuole italiane all'estero • Europa

4 Sia $P(x) = x^2 + bx + c$. Si suppone che $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ e che $P(1) \neq P(2)$. Calcolare $P(0)$.

4 Consideriamo il polinomio $P(x) = x^2 + bx + c$.

L'uguaglianza $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ asserisce che $P(1)$ e $P(2)$ sono radici del polinomio $P(x)$, con:

$$P(1) = 1 + b + c;\ P(2) = 4 + 2b + c.$$

D'altronde, le radici di $P(x)$ sono date da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

e la differenza delle radici è:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \sqrt{b^2 - 4c}.$$

Deve quindi risultare:

$$\left| P(2) - P(1) \right| = \sqrt{b^2 - 4c} \ \rightarrow \ \left| 4 + 2b + c - 1 - b - c \right| = \sqrt{b^2 - 4c} \ \rightarrow \ \left| 3 + b \right| = \sqrt{b^2 - 4c} \ \rightarrow$$

$$(3 + b)^2 = b^2 - 4c \ \rightarrow \ 9 + b^2 + 6b = b^2 - 4c \ \rightarrow \ 9 + 6b + 4c = 0.$$

La somma delle radici è invece uguale a $-b$, quindi:

$$P(2) + P(1) = -b \ \rightarrow \ 4 + 2b + c + 1 + b + c = -b \ \rightarrow \ 5 + 4b + 2c = 0.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni trovate:

$$\begin{cases} 9 + 6b + 4c = 0 \\ 5 + 4b + 2c = 0 \end{cases} \xrightarrow{(\mathrm{I}) - 2(\mathrm{II})} \begin{cases} -1 - 2b = 0 \\ 5 + 4b + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -2b - \dfrac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Sostituiamo i coefficienti nel polinomio $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ e determiniamo:

$$P(0) = c = -\frac{3}{2}.$$