

## **PROBLEMA 2**

Sia  $\Gamma$  il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + k \cdot e^{-x}} \quad k \in \mathbb{R}, k > 0$$

definita sull'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali.

1. Relativamente al grafico  $\Gamma$ , mostra come variano le coordinate del suo punto di flesso  $P$  in funzione del parametro  $k$  e verifica che in tale punto la pendenza del grafico è indipendente da  $k$ .
2. Dopo aver verificato che la funzione  $p(x) = \log(1 + k \cdot e^{-x}) + x$  è una primitiva di  $f$ , determina l'area della regione piana compresa tra  $\Gamma$ , l'asse  $y$ , l'asse  $x$  e la retta di equazione  $x = \log(\alpha)$ . Che valore deve assumere  $\alpha$  perché tale area sia uguale a 1?
3. Dimostra che

$$g(x) = \log\left(\frac{kx}{1-x}\right),$$

è la funzione inversa di  $f$  e tracciane il grafico. Prova inoltre che la suddetta funzione  $g$  è crescente in tutto il suo dominio e che il grafico della funzione  $h$ , definita come

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

interseca l'asse  $x$  in un unico punto.

4. Considerata, per  $x \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

determina le equazioni dei suoi asintoti e traccia il grafico di  $F(x)$ .

**PROBLEMA 2**

1. Consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{1}{1 + ke^{-x}} = (1 + ke^{-x})^{-1}$ , con  $k \in \mathbb{R}^+$ .

La funzione è definita e derivabile in  $\mathbb{R}$ ; per determinare i punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x) = -1 \cdot (1 + ke^{-x})^{-2} \cdot (-ke^{-x}) = ke^{-x}(1 + ke^{-x})^{-2};$$

$$f''(x) = -ke^{-x}(1 + ke^{-x})^{-2} + ke^{-x} \cdot (-2)(1 + ke^{-x})^{-3} \cdot (-ke^{-x}) =$$

$$-ke^{-x}(1 + ke^{-x})^{-2} + 2k^2e^{-2x}(1 + ke^{-x})^{-3} = ke^{-2x}(1 + ke^{-x})^{-3}[-e^x(1 + ke^{-x}) + 2k] =$$

$$ke^{-2x}(1 + ke^{-x})^{-3}[-e^x - k + 2k] = ke^{-2x}(1 + ke^{-x})^{-3}(k - e^x).$$

Gli zeri e il segno di  $f''(x)$  sono individuati dall'ultimo fattore:

$$f''(x) \geq 0 \rightarrow k - e^x \geq 0 \rightarrow e^x \leq k \rightarrow x \leq \ln k.$$

La funzione  $f(x)$  volge quindi la concavità verso l'alto per  $x < \ln k$ , verso il basso per  $x > \ln k$  e in  $x = \ln k$  presenta un flesso.

L'ordinata del flesso è:

$$f(\ln k) = \frac{1}{1 + ke^{-\ln k}} = \frac{1}{1 + k \cdot \frac{1}{k}} = \frac{1}{2},$$

quindi il punto di flesso ha coordinate  $P\left(\ln k; \frac{1}{2}\right)$ .

La retta tangente a  $\Gamma$  in  $P$  ha coefficiente angolare pari a:

$$f'(\ln k) = ke^{-\ln k}(1 + ke^{-\ln k})^{-2} = k \cdot \frac{1}{k} \left(1 + k \cdot \frac{1}{k}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

La pendenza della retta tangente nel punto di flesso vale sempre  $\frac{1}{4}$ , quindi è indipendente dal valore di  $k$ .

2. Osserviamo che la funzione "log" usata nel testo del problema indica la funzione logaritmo naturale (in base  $e$ ). Verifichiamo dunque che  $p(x) = \ln(1 + ke^{-x}) + x$  è una primitiva di  $f(x)$ , cioè proviamo che  $p'(x) = f(x)$ :

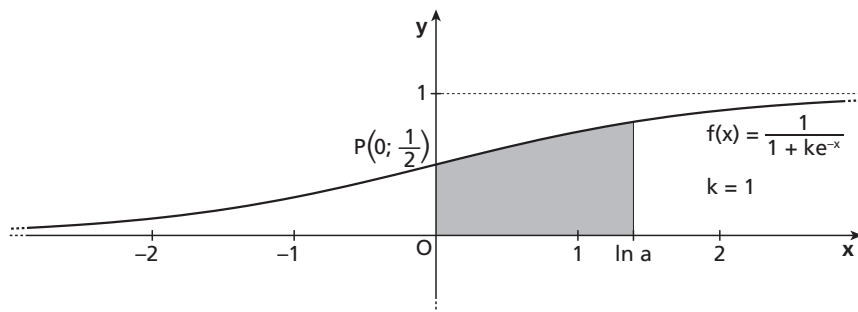
$$p'(x) = \frac{1}{1 + ke^{-x}} \cdot (-ke^{-x}) + 1 = \frac{-ke^{-x} + 1 + ke^{-x}}{1 + ke^{-x}} = \frac{1}{1 + ke^{-x}} = f(x).$$

Tracciamo il grafico approssimativo di  $f(x)$ , in modo da rappresentare la regione indicata dal problema. Oltre a quanto già dedotto su  $f(x)$ , osserviamo che:

- la funzione è positiva su  $\mathbb{R}$ ;
- la derivata prima è sempre positiva, quindi  $f(x)$  è crescente in  $\mathbb{R}$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , quindi la funzione ha l'asse  $x$  come asintoto orizzontale sinistro;

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , quindi la funzione ha la retta  $y = 1$ , come asintoto orizzontale destro.

Possiamo tracciare il grafico  $\Gamma$  della funzione. A titolo di esempio, disegniamo il grafico nel caso  $k = 1$ .



■ Figura 8

Se  $\ln a > 0$ , cioè  $a > 1$ , la retta  $x = \ln a$  e la regione  $R$  di cui dobbiamo calcolare l'area si trovano a destra dell'asse delle ordinate (come esemplificato in figura).

Se  $\ln a < 0$ , cioè  $0 < a < 1$ , la retta  $x = \ln a$  e la regione  $R$  si trovano a sinistra dell'asse delle ordinate.

Se  $\ln a = 0$ , cioè  $a = 1$ , la retta  $x = \ln a$  si trova sull'asse delle ordinate e l'area della regione è nulla.

Calcoliamo l'area  $A$  della regione nei primi due casi.

Se  $\ln a > 1$ :

$$A = \int_0^{\ln a} f(x) dx = [p(x)]_0^{\ln a} = [\ln(1 + ke^{-\ln a}) + \ln a] - [\ln(1 + ke^{-0}) + 0] =$$

$$\ln\left(1 + \frac{k}{a}\right) + \ln a - \ln(1 + k) = \ln\left(\frac{\alpha + k}{\alpha}\right) + \ln a - \ln(1 + k) = \ln\left(\frac{\frac{\alpha + k}{1 + k} \cdot \alpha}{\alpha}\right) = \ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right).$$

Se  $0 < \alpha < 1$ :

$$A = \int_{\ln a}^0 f(x) dx = -\int_0^{\ln a} f(x) dx = -\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right).$$

Determiniamo  $\alpha$  in modo che l'area della regione sia 1.

Se  $\alpha > 1$ :

$$\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right) = 1 \rightarrow \frac{\alpha + k}{1 + k} = e \rightarrow \alpha = e(1 + k) - k.$$

Osserviamo che:

$$e(1 + k) - k = e + k(e - 1) > 1,$$

quindi la soluzione  $\alpha = e(1 + k) - k$  è accettabile, per ogni  $k > 0$ :

Se  $0 < \alpha < 1$ :

$$-\ln\left(\frac{\alpha + k}{1 + k}\right) = 1 \rightarrow \frac{\alpha + k}{1 + k} = \frac{1}{e} \rightarrow \alpha = \frac{1 + k}{e} - k.$$

Imponiamo che il valore trovato sia compreso fra 0 e 1:

$$\frac{1 + k}{e} - k > 0 \rightarrow 1 + k - ek > 0 \rightarrow k(e - 1) < 1 \rightarrow k < \frac{1}{e - 1};$$

$$\frac{1+k}{e} - k < 1 \rightarrow 1+k-ek < e \rightarrow k(e-1) > 1-e \rightarrow \forall k > 0.$$

Quindi la soluzione  $\alpha = \frac{1+k}{e} - k$  è accettabile solo per  $0 < k < \frac{1}{e-1}$ , con  $\alpha = \frac{1}{e-1} \simeq 0,582$ .

3. Abbiamo già dimostrato che  $f(x)$  è crescente, quindi è invertibile. Mostriamo ora che la funzione

$$g(x) = \ln\left(\frac{kx}{1-x}\right)$$

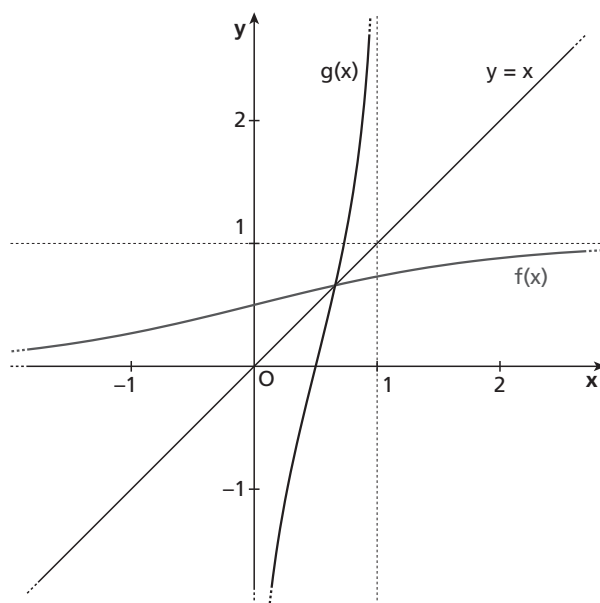
è l'inversa di  $f(x)$  facendo vedere che entrambe le composizioni di funzioni  $(f \circ g)(x)$  e  $(g \circ f)(x)$  corrispondono alla funzione identità:

$$f(g(x)) = f\left(\ln\left(\frac{kx}{1-x}\right)\right) = \frac{1}{1+ke^{-\ln\frac{kx}{1-x}}} = \frac{1}{1+k \cdot \frac{1-x}{kx}} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = \frac{x}{x+1-x} = x,$$

uguaglianza valida nel dominio  $0 < x < 1$  di  $g(x)$ ;

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1+ke^{-x}}\right) = \ln\frac{k \frac{1}{1+ke^{-x}}}{1-\frac{1}{1+ke^{-x}}} = \ln\left(\frac{k}{1+ke^{-x}} \cdot \frac{1+ke^{-x}}{1+ke^{-x}-1}\right) = \ln\frac{1}{e^{-x}} = \ln e^x = x.$$

Il grafico di  $g(x)$  può essere allora ottenuto da quello di  $f(x)$  tramite simmetria rispetto alla bisettrice  $y = x$  del primo e terzo quadrante.



■ Figura 9

La funzione  $g(x)$  è definita e continua in  $0 < x < 1$ , è sempre crescente (perché è crescente  $f(x)$  e per la simmetria) e ha gli asintoti verticali  $x = 0$  e  $x = 1$ ; risulta dunque suriettiva.

La funzione  $h(x) = f(x) + g(x)$  ha lo stesso dominio  $0 < x < 1$  di  $g(x)$ , è continua in  $0 < x < 1$  ed è strettamente crescente, poiché è somma di due funzioni continue e strettamente crescenti.

Inoltre, essendo  $f(x)$  limitata in  $]0; 1[$ , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + g(x)] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Possiamo concludere che la funzione  $h(x)$  è continua, strettamente crescente e suriettiva, quindi il suo grafico interseca una e una sola volta l'asse delle ascisse.

4. Ricordiamo che la funzione  $p(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ , quindi:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = [p(t)]_0^x = [\ln(1 + ke^{-x}) + x] - [\ln(1 + ke^{-0}) + 0] = \ln(1 + ke^{-x}) + x - \ln(1 + k).$$

La funzione integrale è definita e continua su  $\mathbb{R}$ , quindi non presenta asintoti verticali. Studiamo l'esistenza dell'asintoto destro.

Dal limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + ke^{-x}) + x - \ln(1 + k)] = 0 + \infty - \ln(1 + k) = +\infty,$$

deduciamo che potrebbe esistere l'asintoto obliquo. Calcoliamo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(1 + ke^{-x})}{x} + \frac{x}{x} - \frac{\ln(1 + k)}{x} \right] = 0 + 1 - 0 = 1;$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + ke^{-x}) + x - \ln(1 + k) - x] = 0 - \ln(1 + k) = -\ln(1 + k).$$

I due limiti sono finiti, quindi  $F(x)$  ammette asintoto obliquo di equazione  $y = x - \ln(1 + k)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Studiamo l'esistenza dell'asintoto sinistro.

Il limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + ke^{-x}) + x - \ln(1 + k)]$$

si presenta nella forma  $+\infty - \infty - \ln(1 + k)$ .

Risolviamo la forma indeterminata costituita dai primi due termini:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + ke^{-x}) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + ke^{-x}) + \ln e^x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln[e^x(1 + ke^{-x})] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + k) = \ln k,$$

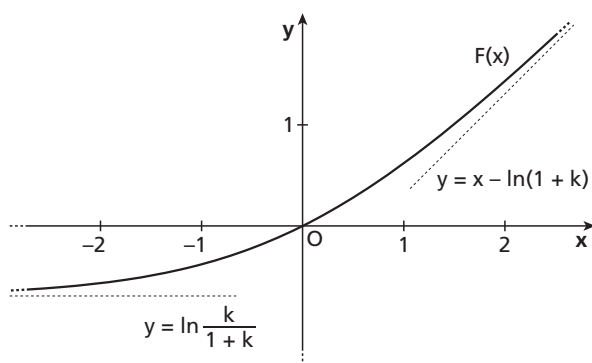
quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \ln k - \ln(1 + k) = \ln \frac{k}{1 + k}$$

e la funzione  $F(x)$  presenta l'asintoto orizzontale di equazione  $y = \ln \frac{k}{1 + k}$  per  $x \rightarrow -\infty$ . Per tracciare il grafico di  $F(x)$  consideriamo che:

- $F(x)$  è definita e continua in  $\mathbb{R}$ ;
- $F(x)$  è sempre crescente, poiché  $F'(x) = f(x)$  è positiva su tutto  $\mathbb{R}$ ;
- $F(0) = 0$  e, poiché è crescente, risulta  $F(x) < 0$  per  $x < 0$  e  $F(x) > 0$  per  $x > 0$ ;
- $F(x)$  volge sempre la concavità verso l'alto, poiché  $F''(x) = f'(x)$  è positiva su tutto  $\mathbb{R}$ ;
- $F(x)$  ha due asintoti di equazione  $y = \ln \frac{k}{1 + k}$  e  $y = x - \ln(1 + k)$ .

Con queste informazioni, tracciamo il grafico plausibile di  $F(x)$ .



■ Figura 10