Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy:

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;

2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;

3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;

4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = \ln x$ ha dominio $]0; +\infty[$ e codominio $\mathbb{R}$.
La funzione $g(x) = e^{x-2}$ ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $]0; +\infty[$.
Il codominio di $g(x)$ è contenuto in quello di $f(x)$ e quindi è possibile la composizione:

$$a(x) = f(g(x)) = \ln e^{x-2} = x - 2,$$

che ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$.
Anche il codominio di $f(x)$ è contenuto in quello di $g(x)$, quindi è possibile la composizione:

$$b(x) = g(f(x)) = e^{\ln x - 2} = \frac{e^{\ln x}}{e^2} = \frac{x}{e^2},$$

che consideriamo con dominio $]0; +\infty[$, quello di $f(x)$, anche se il suo dominio naturale è $\mathbb{R}$, e che ha codominio $]0; +\infty[$.
Disegniamo i grafici delle quattro funzioni $f(x)$, $g(x)$, $a(x)$, $b(x)$.

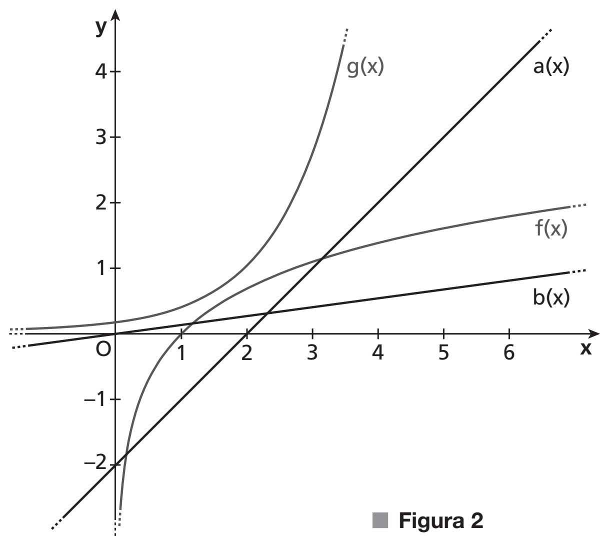

Figura 2

2. Determiniamo l'equazione della retta r tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa e^2:

$$r: y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2) \quad \to \quad r: y = \frac{1}{e^2}(x - e^2) + 2 \quad \to \quad r: y = \frac{x}{e^2} + 1.$$

Le rette parallele a r hanno equazione: $y = \frac{1}{e^2}x + q$.
Una di queste risulta tangente a G se esiste un punto x_0 tale che $g'(x_0) = \frac{1}{e^2}$. Poiché $g'(x) = e^{x-2}$ assume tutti i valori in $]0; +\infty[$, esisterà sicuramente un x_0 tale che $g'(x_0) = \frac{1}{e^2}$, quindi la retta s parallela a r e tangente a G esiste.
Anche se non richiesto, determiniamo l'equazione di tale retta r:

$$g'(x) = \frac{1}{e^2} \quad \to \quad e^{x-2} = \frac{1}{e^2} \quad \to \quad \frac{e^x}{e^2} = \frac{1}{e^2} \quad \to \quad x_0 = 0,$$

$$s: y = g'(0)(x - 0) + g(0) \quad \to \quad s: y = \frac{1}{e^2}x + \frac{1}{e^2}.$$

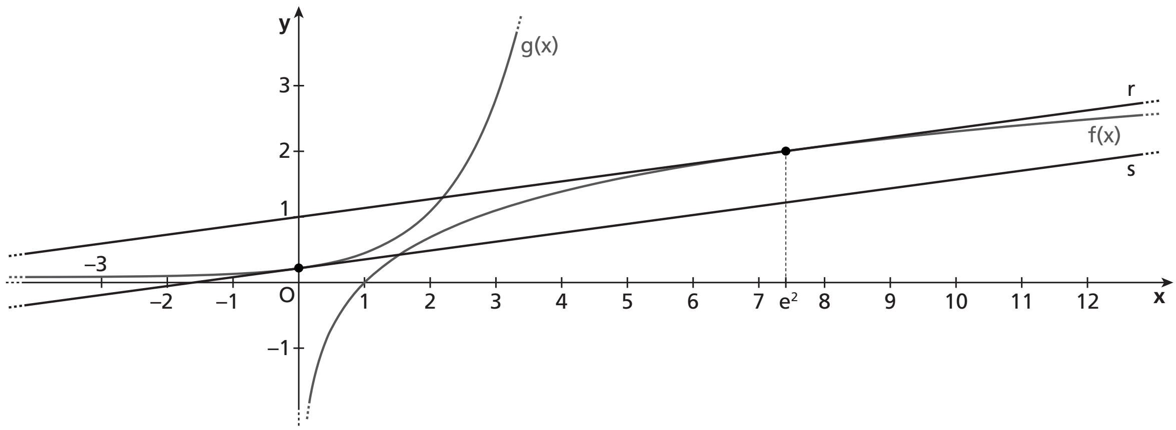

Figura 3

3. Le rette parallele alla bisettrice del primo quadrante hanno equazione del tipo $y = x + q$, e hanno quindi coefficiente angolare 1.
Cerchiamo il punto del grafico F che ha retta tangente con coefficiente angolare 1:

$$f'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1.$$

La retta t parallela alla bisettrice del primo quadrante e tangente a F ha dunque equazione:

$$t: y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{1}(x-1) + 0 \quad \rightarrow \quad y = x - 1.$$

Per verificare che t è tangente anche a G, individuiamo il punto di G nel quale la retta tangente ha coefficiente angolare 1 e mostriamo che t passa anche per tale punto di G.

$$g'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad e^{x-2} = 1 \quad \rightarrow$$

$$x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2.$$

Il punto $(2; g(2)) = (2; 1)$ di G appartiene alla retta t, che risulta quindi tangente anche a G.

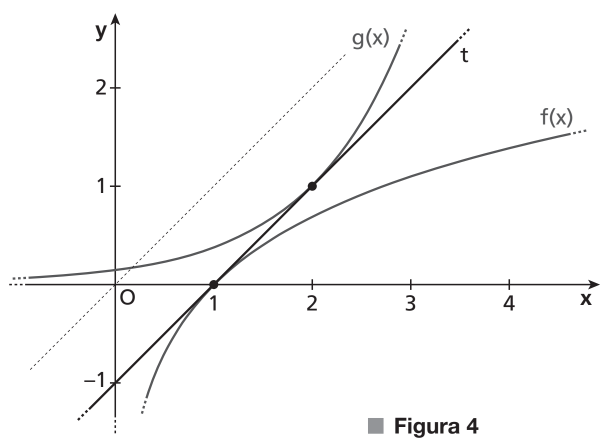

Figura 4

4. La regione delimitata dall'asse y, dalla retta t di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G è evidenziata in figura.
Calcoliamo la sua area A mediante l'integrale:

$$A = \int_0^2 (e^{x-2} - x + 1)dx = \left[e^{x-2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 =$$

$$(1 - 2 + 2) - (e^{-2}) = 1 - \frac{1}{e^2} \simeq 0,865.$$

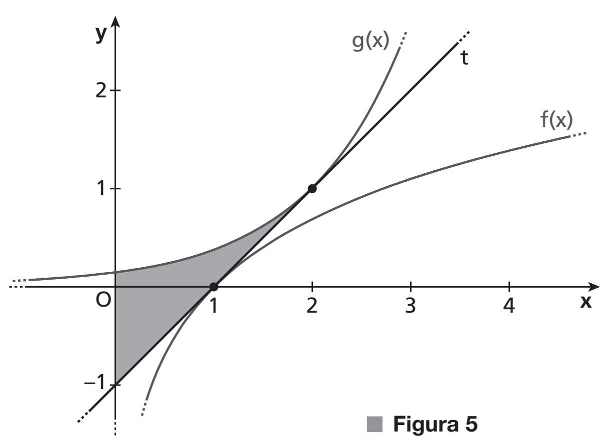

Figura 5

Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando tale regione intorno all'asse y ricorriamo invece al metodo dei gusci cilindrici:

$$V = 2\pi \int_0^2 x(e^{x-2} - x + 1)\,dx.$$

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito

$$\int x e^{x-2}\,dx = \int x\,\mathrm{D}[e^{x-2}]\,dx = xe^{x-2} - \int 1 \cdot e^{x-2}\,dx = xe^{x-2} - e^{x-2}.$$

Quindi $A = 2\pi\left[xe^{x-2} - e^{x-2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi\left[\left(2 - 1 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{e^2}\right)\right] = 2\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{e^2}\right) \simeq 2{,}945.$