

PROBLEMA 2

Data una funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovunque derivabile, consideriamo la funzione

$$f(x) = g(x) \sin(2x).$$

1. Dimostra che i grafici delle funzioni f e g sono tangenti nei loro punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con k numero intero.
2. Determina la funzione $g(x)$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione differenziale $g'(x) = -2g(x)$ e che risulti $g(0) = 4$.
3. Il grafico della funzione f presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k intero)?
Presenta dei flessi in tutti i suoi punti d'intersezione con l'asse x ? Motiva le tue risposte.
4. Determina il valore di

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

e, posto

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)| dx$$

dimostra che H è finito e determina in modo approssimato il suo valore. Che cosa rappresentano, in termini geometrici, i valori di I e H ?

PROBLEMA 2

1. Sia $g(x)$ una funzione derivabile su \mathbb{R} e $f(x) = g(x) \cdot \sin(2x)$. Quindi anche $f(x)$ è derivabile su \mathbb{R} perché prodotto di funzioni derivabili.

Osserviamo che se $g(x) = 0$ anche $f(x) = 0$ e le due funzioni sono tangenti $\forall x \in \mathbb{R}$, in particolare nei punti $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Possiamo supporre quindi $g(x) \neq 0$.

I grafici di $g(x)$ e $f(x)$ sono tangenti se sono contemporaneamente soddisfatte le due condizioni:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(x) \cdot \sin(2x) = g(x) \\ g'(x) \cdot \sin(2x) + g(x) \cdot 2 \cos(2x) = g'(x) \end{cases}$$

$g(x) \neq 0$, quindi dalla prima equazione ricaviamo $\sin(2x) = 1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo l'identità $g'\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cdot 1 + g\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cdot 0 = g'\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

Concludiamo che i grafici di $g(x)$ e $f(x)$ sono tangenti per $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. L'equazione $g'(x) = -2g(x)$ è un'equazione differenziale a variabili separabili.

Osserviamo che la funzione identicamente nulla $g(x) = 0$ è soluzione particolare dell'equazione differenziale ma non soddisfa la condizione iniziale.

Per $g \neq 0$ possiamo risolvere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} dg &= -2dx \rightarrow \int \frac{1}{g} dg = \int -2dx \rightarrow \ln|g| = -2x + c \rightarrow \\ |g| &= e^{-2x+c} \rightarrow g(x) = \pm e^{-2x+c} \rightarrow g(x) = \pm e^c \cdot e^{-2x} \rightarrow g(x) = h \cdot e^{-2x}, \end{aligned}$$

con h costante reale non nulla.

Imponiamo la condizione iniziale:

$$g(0) = 4 \rightarrow h \cdot e^{-2 \cdot 0} = 4 \rightarrow h = 4 \rightarrow g(x) = 4e^{-2x}.$$

3. La funzione $f(x)$ da considerare è ora:

$$f(x) = 4e^{-2x} \cdot \sin(2x).$$

Se i punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ sono massimi relativi deve essere $f'(x) = 0$.

Come verificato prima, il grafico di $f(x)$ è tangente a quello di $g(x)$ nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, quindi se $f'(x) = 0$ anche $g'(x) = 0$, ovvero se $g'\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 0$.

Poiché $g'(x) = -8e^{-2x}$ assume sempre valori negativi e non si annulla mai, deduciamo che $f(x)$ non ha massimi relativi in $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Per quanto riguarda i flessi, determiniamo in quali punti il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x :

$$f(x) = 0 \rightarrow 4e^{-2x} \cdot \sin(2x) = 0 \xrightarrow{e^{-2x} \neq 0} \sin(2x) = 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = k \frac{\pi}{2}.$$

La funzione $f(x)$ presenta dei flessi in tali punti se in corrispondenza la derivata seconda si annulla:

$$f'(x) = -8e^{-2x} \cdot \sin(2x) + 8e^{-2x} \cos(2x) = 8e^{-2x} [\cos(2x) - \sin(2x)];$$

$$f''(x) = -16e^{-2x} [\cos(2x) - \sin(2x)] + 8e^{-2x} [-2\sin(2x) - 2\cos(2x)] = -32e^{-2x} \cos(2x);$$

$$f''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -32e^{-2k\frac{\pi}{2}} \cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right) = -32e^{-k\pi} \cos(k\pi).$$

In particolare:

$$f''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -32e^{-k\pi} \text{ se } k \text{ è pari, } f''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = +32e^{-k\pi} \text{ se } k \text{ è dispari.}$$

In ogni modo, la derivata seconda non si annulla nei punti di ascissa $x = k\frac{\pi}{2}$ e quindi la funzione $f(x)$ non ha flessi in tali punti.

4. Consideriamo l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t 4e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[4 \cdot \int_0^t e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx \right]$$

e calcoliamo a parte l'integrale indefinito.

Pensando e^{-2x} come fattore differenziale e $\sin(2x)$ come fattore finito, troviamo:

$$\begin{aligned} \int e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx &= -\frac{1}{2} \int -2e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \int e^{-2x} \cdot 2 \cos(2x) dx \right] = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2} \int -2e^{-2x} \cdot \cos(2x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2} \left[e^{-2x} \cdot \cos(2x) + \int e^{-2x} \cdot 2 \sin(2x) dx \right] = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \cos(2x) - \int e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx, \end{aligned}$$

da cui:

$$2 \int e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2} e^{-2x} \cdot \cos(2x) \rightarrow$$

$$\int e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} e^{-2x} [\sin(2x) + \cos(2x)] + e.$$

Possiamo calcolare l'integrale definito:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \int_0^t e^{-2x} \cdot \sin(2x) dx &= [-e^{-2x} [\sin(2x) + \cos(2x)]]_0^t = \\ &= \{-e^{-2t} [\sin(2t) + \cos(2t)]\} - \{-e^{-2 \cdot 0} [\sin(2 \cdot 0) + \cos(2 \cdot 0)]\} = \\ &= 1 - e^{-2t} [\sin(2t) + \cos(2t)]. \end{aligned}$$

Infine, l'integrale improprio risulta:

$$I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \{1 - e^{-2t} [\sin(2t) + \cos(2t)]\} = 1.$$

Nell'ultimo passaggio si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \{-e^{-2t} [\sin(2t) + \cos(2t)]\} = 0$$

perché si tratta del limite del prodotto fra un infinitesimo e una funzione limitata.

Valutiamo il comportamento di

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Innanzitutto osserviamo che vale

$$|f(x)| = |4e^{-2x} \cdot \sin(2x)| = 4e^{-2x} |\sin(2x)|,$$

quindi vale la catena di disuguaglianze:

$$f(x) < |f(x)| < 4e^{-2x}.$$

Passando agli integrali otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx < \int_0^{+\infty} |f(x)| dx < \int_0^{+\infty} 4e^{-2x} dx \rightarrow 1 < \int_0^{+\infty} |f(x)| dx < \int_0^{+\infty} 4e^{-2x} dx.$$

poiché il primo integrale della catena rappresenta $I = 1$.

D'altro canto, l'ultimo integrale della disuguaglianza vale:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} 4e^{-2x} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t 4e^{-2x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-2e^{-2x}]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (-2e^{-2t} + 2) = 2. \end{aligned}$$

L'integrale H risulta dunque finito e il suo valore è compreso fra 1 e 2:

$$1 < H < 2.$$

Interpretiamo gli integrali dal punto di vista geometrico.

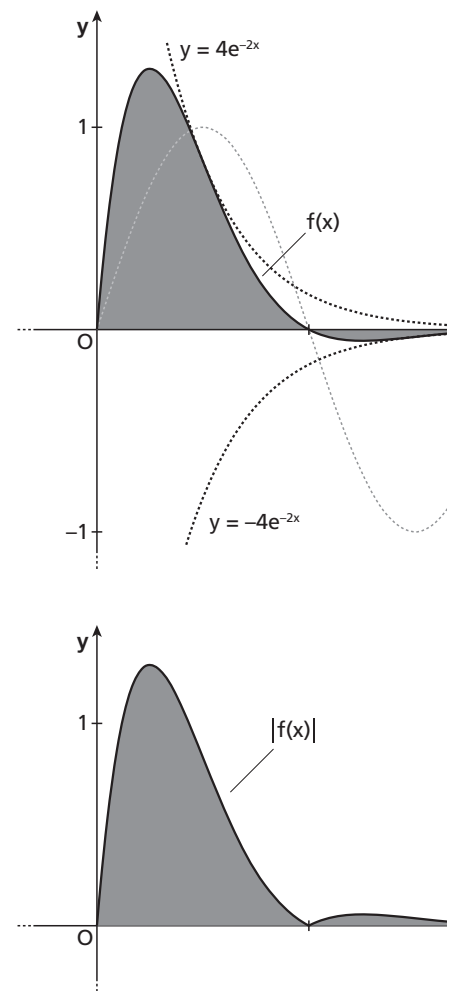
Il grafico di $f(x)$ in $[0; +\infty[$ individua infinite regioni di piano alternativamente al di sopra e al di sotto dell'asse delle ascisse, ciascuna limitata e di area finita.

Il valore I rappresenta la sommatoria delle aree di tali regioni, considerate col segno positivo se al di sopra dell'asse x e col segno negativo se al di sotto dell'asse x .

Il grafico di $|f(x)|$ individua infinite regioni di piano che si trovano tutte al di sopra dell'asse x . Quindi, per calcolare H , l'area di tutte le regioni viene considerata col segno positivo.

Rappresentiamo in figura la situazione.

Per disegnare il grafico approssimativo di $f(x) = 4e^{-2x} \cdot \sin(2x)$ senza effettuare lo studio della funzione, possiamo osservare che esso è compreso fra i grafici di $y = 4e^{-2x}$ e di $y = -4e^{-2x}$, dove l'oscillazione è individuata da $y = \sin(2x)$.



■ Figura 4