Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

PROBLEMA 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

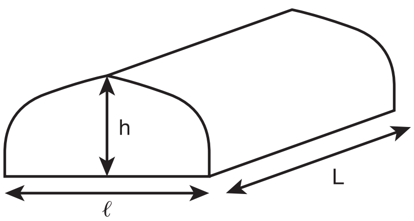
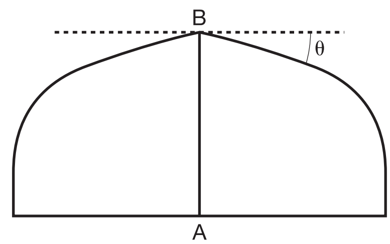


Figura 1

Figura 2



Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\theta \geq 10°$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1; 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = \left(1 - |x|\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1, \qquad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right).$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo θ e al volume del serbatoio.

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

PROBLEMA 1

1. Le funzioni proposte per ciascuna famiglia sono tutte simmetriche rispetto all'asse y, per ogni intero positivo k.

Affinché una funzione descriva il profilo laterale del serbatoio, è necessario che:

$$f(0)=1, \qquad f(\pm 1)=0, \qquad f'_+(0)\leq -\tan 10°, \qquad f'_-(0)\geq \tan 10°.$$

Esaminiamo il comportamento delle funzioni di ogni famiglia; per la simmetria, limitiamo il controllo agli x compresi fra 0 e 1.

Prima funzione

$$f(x)=\left(1-|x|\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(0)=1^{\frac{1}{k}}=1; \qquad f(1)=0^{\frac{1}{k}}=0.$$

$$f'_+(x)=-\frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1}; \qquad f'_+(0)=-\frac{1}{k}\cdot 1^{\frac{1}{k}-1}=-\frac{1}{k}.$$

$$f'_+(0)\leq -\tan 10° \simeq -0{,}176 \text{ per } -\frac{1}{k}\leq -0{,}176 \to k\leq \frac{1}{0{,}176}\to k\leq 5{,}68.$$

Poiché k è intero positivo, basta scegliere k fra 1, 2, 3, 4 e 5 affinché la funzione descriva il profilo del serbatoio.

Seconda funzione

$$f(x)=-6|x|^3+9kx^2-4|x|+1$$

$$f(0)=-6\cdot 0+9k\cdot 0-4\cdot 0+1=1;$$

$$f(1)=-6\cdot 1+9k\cdot 1-4\cdot 1+1=9k-9\to f(1)=0 \text{ per } k=1.$$

$f'_+(x)=-18x^2+18kx-4$, che per $k=1$ diventa $f'_+(x)=-18x^2+18x-4$;

$$f'_+(0)=-4\leq -\tan 10°.$$

Notiamo però che la derivata seconda $f''_+(x)=-36x+18$ si annulla in $x=\frac{1}{2}$, è positiva prima e negativa dopo. La funzione $f(x)$ volge dunque la concavità verso l'alto in $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ e verso il basso in $\left]\frac{1}{2};1\right[$, quindi non può descrivere il profilo del serbatoio.

Terza funzione

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

$$f(0)=\cos(0)=1; \qquad f(1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'_+(x)=-\frac{\pi}{2}kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right); \qquad f'_+(0)=0.$$

Quindi $f'_+(0)>-\tan 10°$ e $f(x)$ non può descrivere il profilo del serbatoio.

In conclusione, il profilo del serbatoio è descritto dalla famiglia di funzioni:

$$f(x) = \left(1 - |x|\right)^{\frac{1}{k}}, \text{ per } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

2. Il volume del serbatoio è dato dall'area della sezione trasversale moltiplicata per la lunghezza del serbatoio stesso:

$$V = S \cdot L = \left(2 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}} dx\right) \cdot 8 = 16 \cdot \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}} dx = 16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right]_0^1 =$$

$$16 \cdot \left[-\frac{(1-x)^{\frac{k+1}{k}}}{\frac{k+1}{k}}\right]_0^1 = 16 \cdot \frac{1}{\frac{k+1}{k}} = \frac{16k}{k+1}.$$

Imponiamo che il volume sia almeno di 13 m^3:

$$\frac{16k}{k+1} \geq 13 \rightarrow 16k \geq 13k + 13 \rightarrow k \geq \frac{13}{3}.$$

Considerando che k è intero e compreso fra 1 e 5 e $\frac{13}{3} \simeq 4{,}3$, deduciamo che $k = 5$.

Sostituiamo $k = 5$ nell'espressione del volume e otteniamo:

$$\frac{16 \cdot 5}{5+1} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}.$$

Il volume è dunque $\frac{40}{3}$ m^3.

Poiché $\frac{40}{3} \simeq 13{,}3$, il serbatoio con questo profilo ha volume maggiore dei 13 m^3 richiesti.

3. Fissato il livello z di riempimento del serbatoio, rimane individuata l'ascissa x_z tale che

$$f(x_z) = z \rightarrow (1 - x_z)^{\frac{1}{5}} = z \rightarrow x_z = 1 - z^5.$$

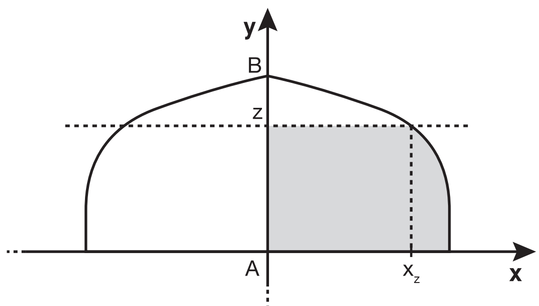


Figura 6

In questo caso, il serbatoio contiene il seguente volume di gasolio (espresso in metri cubi):

$$V(z) = 2\left[z \cdot x_z + \int_{x_z}^1 (1-x)^{\frac{1}{5}} dx\right] \cdot 8 = 16\left[z(1-z^5) + \int_{1-z^5}^1 (1-x)^{\frac{1}{5}} dx\right] =$$

$$16z - 16z^6 - 16 \cdot \frac{5}{6}\left[(1-x)^{\frac{6}{5}}\right]_{1-z^5}^1 = 16z - 16z^6 - \frac{40}{3}\left[0 - (1 - 1 + z^5)^{\frac{6}{5}}\right] =$$

$$16z - 16z^6 + \frac{40}{3}z^6 = 16z - \frac{8}{3}z^6.$$

La percentuale di serbatoio riempito, quando il livello di gasolio è alla quota z, è espressa dal rapporto:

$$P(z) = \frac{V(z)}{V} \cdot 100 = \frac{16z - \frac{8}{3}z^6}{\frac{40}{3}} \cdot 100 = 120z - 20z^6.$$

4. In base alla formula precedente quando il livello del serbatoio raggiunge i 50 cm, cioè 0,5 m, l'indicatore mostra una percentuale di riempimento pari a:

$$120 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 60 - \frac{20}{64} \simeq 59{,}7 \to 59{,}7\%.$$

La percentuale del 50% indicata dall'amministratore è sbagliata perché la sezione trasversale del serbatoio non è un rettangolo, forma che porterebbe ad avere una proporzionalità diretta fra la quota z raggiunta e la percentuale di riempimento del serbatoio. In questo caso, invece, il profilo curvo porta il serbatoio a essere più capiente nella parte bassa rispetto alla parte alta; pertanto, quando il gasolio raggiunge la metà altezza, il serbatoio è riempito per più del 50%. Secondo l'amministratore, la percentuale di riempimento sarebbe espressa (con z misurato in metri) dal rapporto:

$$P_a(z) = \frac{z}{1} \cdot 100 = 100z.$$

La differenza fra le due percentuali è pari a $d(z) = 120z - 20z^6 - 100z = 20z - 20z^6$.
Osserviamo che $d(0) = d(1) = 0$, a conferma che le due percentuali (0% e 100%) coincidono a serbatoio vuoto e pieno. Cerchiamo il massimo per la funzione $d(z)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$d'(z) = 20 - 120z^5,$$

e studiamo il suo segno:

$$d'(z) = 0 \to 20 - 120z^5 = 0 \to z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \simeq 0{,}7;$$

$$d'(z) > 0 \text{ per } 0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \text{ e } d'(z) < 0 \text{ per } \frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1.$$

La funzione differenza $d(z)$ è quindi crescente per $0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e decrescente per $\frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1$.

L'errore massimo nella valutazione della percentuale si ha in corrispondenza della quota $z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ e vale:

$$d\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{6}} - 20 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^6 = \frac{20}{\sqrt[5]{6}}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{50}{3\sqrt[5]{6}} \simeq 11{,}6 \to 11{,}6\%.$$