PROBLEMA 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo [0; 4], è il seguente:

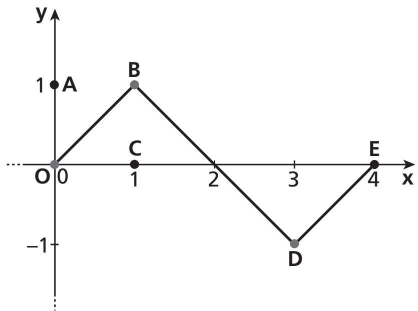

Figura 1

Come si evince dalla figura, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0; 0)$; $B(1; 1)$; $D(3; -1)$; $E(4; 0)$.

1. Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

qualora esistano, determinarne il valore.

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x),$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

2. Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$. Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3. Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \text{ e } s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4. Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x)$ si può scrivere in $[0; 4]$ come

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0; 1[\\ -x+2 & \text{se } x \in [1; 3[\\ x-4 & \text{se } x \in [3; 4] \end{cases}.$$

Disegniamo il grafico nel dominio $\mathbb{R}$ e osserviamo che $f(x)$ si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} x-4k & \text{se } x \in [-1+4k; 1+4k[\\ -x+2+4k & \text{se } x \in]1+4k; 3+4k[\end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

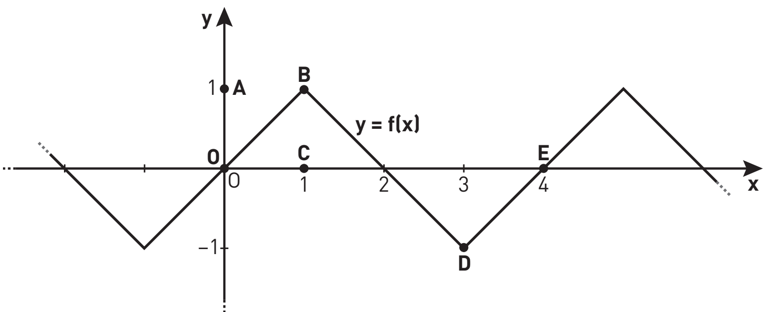

Figura 7

Questa funzione è definita e continua in tutto il dominio $\mathbb{R}$ perché continua a tratti e il limite destro e sinistro nei punti di congiunzione coincidono. La funzione $f(x)$ è inoltre derivabile negli intervalli aperti $]-1+4k; 1+4k[$ e $]1+4k; 3+4k[$ perché i polinomi sono funzioni derivabili. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]-1+4k; 1+4k[\\ -1 & \text{se } x \in]1+4k; 3+4k[\end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilità in $]0; 4[$ nei punti di congiunzione $x = 1$, $x = 3$ analizzando i limiti della derivata prima da destra e da sinistra.

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1 \quad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = -1 \quad \lim_{x \to 3^+} f'(x) = 1$$

Osserviamo che i limiti destri e sinistri non coincidono, quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = 1$ e $x = 3$. Per periodicità possiamo affermare che $f(x)$ non è derivabile nei punti $x = 1+4k$ e $x = 3+4k$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero nei punti $x = 1+2k'$, con $k' \in \mathbb{Z}$.
Poiché $f(x)$ è una funzione periodica non costante, il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste.
Per calcolare $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ si può utilizzare il teorema del confronto. Infatti, dato che $-1 \le f(x) \le 1$, si ha che $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{1}{x}$ per $x > 0$. Ne risulta che $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Disegniamo il grafico di $g(x) = f'(x)$, di cui abbiamo gia calcolato l'espressione analitica.

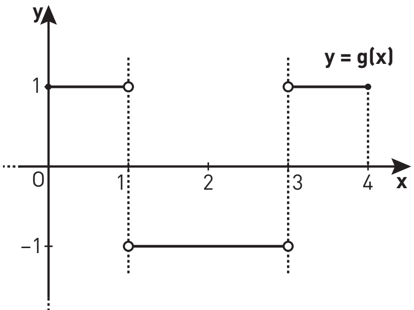

Figura 8

Determiniamo l'espressione analitica di $h(x)$ per $x \in [0; 4]$, considerando i tre sottointervalli [0; 1],]1; 3] e]3; 4].

- Per $x \in [0; 1]$, $h(x) = \int_0^x t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$

- Per $x \in]1; 3]$,

$$h(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x (2-t)dt =$$

$$h(1) + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x =$$

$$\frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

- Per $x \in]3; 4]$,

$$h(x) = \int_0^3 f(t)dt + \int_3^x (t-4)dt =$$

$$h(3) + \left[\frac{t^2}{2} - 4t\right]_3^x =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{9}{2} + 12 = \frac{x^2}{2} - 4x + 8$$

Quindi l'espressione analitica per $h(x)$ è la seguente:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0; 1[\\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{se } x \in [1; 3[\\ \frac{x^2}{2} - 4x + 8 & \text{se } x \in [3; 4] \end{cases}.$$

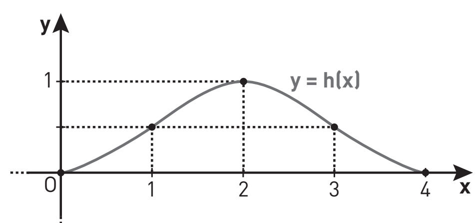

Figura 9

Il grafico è composto da tre archi di parabola che si raccordano nei punti $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ e $\left(3; \frac{1}{2}\right)$.

In alternativa, è possibile disegnare un grafico qualitativo di $h(x)$, osservando che la funzione integrale di funzioni lineari a tratti è formata da archi di parabola la cui concavità dipende dal segno di $g(x) = h''(x)$ e che l'area di ogni triangolo congruente a OBC è uguale a $\frac{1}{2}$.

2. Il periodo di $f(x)$ è 4, mentre il periodo di $s(x) = \sin(bx)$ è $\frac{2\pi}{b}$. Ponendo $\frac{2\pi}{b} = 4$ si ottiene

$b=\frac{\pi}{2}$.

I grafici di $f(x)$ e $s(x)$ dividono il quadrato $OABC$ in tre parti in quanto $f(0)=s(0)=0$ e $f(1)=s(1)=1$ e i grafici di $f(x)$ e $s(x)$ non hanno altri punti di intersezione in $]0; 1[$. Dimostriamo quest'ultima affermazione.

Il grafico di $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è una contrazione orizzontale di $\sin x$ di fattore $\frac{2}{\pi}$. La funzione $\sin(x)$ sta sopra la retta congiungente il punto (0; 0) e il punto $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Quindi il grafico di $s(x)$ in [0; 1] sta sopra la funzione $f(x)=x$ e di conseguenza i due grafici non si intersecano in altri punti.

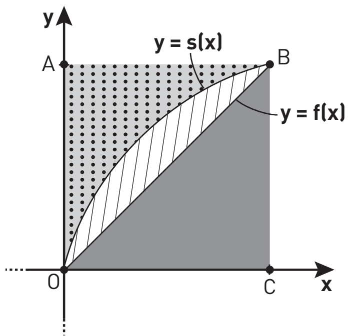

Figura 10

Dato che l'area del quadrato $OABC$ è uguale a 1, la probabilità di cadere su una delle tre parti sarà uguale alla misura della rispettiva area.
Calcoliamo quindi le aree.

$$A_{\text{grigia}}=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}=0,5$$

$$A_{\text{tratteggiata}}=\int_0^1\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-x\right]dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=$$

$$-\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\simeq 0,14$$

$$A_{\text{pallini}}=1-A_{\text{grigia}}-A_{\text{tratteggiata}}=1-\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{2}{\pi}\simeq 0,36.$$

Le probabilità di cadere nelle zone grigia, tratteggiata e pallini sono quindi rispettivamente del 50%, del 14% circa e del 36% circa.

c. Rappresentiamo le funzioni $f^2(x)=x^2$ e $s^2(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo [0; 1], osservando che, essendo $0\le f(x)\le 1$ e $0\le s(x)\le 1$, si avrà $f^2(x)\le f(x)$ e $s^2(x)\le s(x)$.

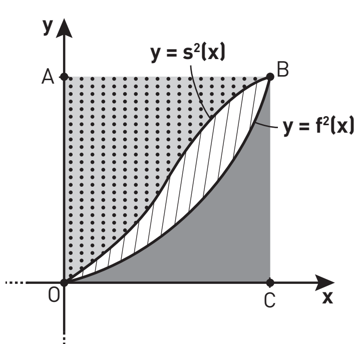

Figura 11

Quindi si avrà un aumento dell'area pallini e una diminuzione dell'area grigia; per quanto riguarda l'area tratteggiata è difficile fare una stima qualitativa.
Calcoliamo quindi le probabilità, ancora una volta uguali alle rispettive aree.
Per calcolare l'integrale di $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ utilizzeremo la formula di bisezione $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$.

$$A_{\text{grigia}} = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \simeq 0,33$$

$$A_{\text{tratteggiata}} = \int_0^1 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2\right]dx = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx - \int_0^1 x^2 dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1-\cos(\pi x)}{2}dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\int_0^1 [1-\cos(\pi x)]dx - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{[x]_0^1 - \frac{1}{\pi}[\sin(\pi x)]_0^1\right\} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\pi}(\sin\pi - \sin 0)\right] - \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \simeq 0,17$$

$$A_{\text{pallini}} = 1 - A_{\text{grigia}} - A_{\text{tratteggiata}} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Le probabilità di cadere nelle zone grigia, tratteggiata e pallini sono quindi rispettivamente del 33% circa, del 17% circa e del 50%.

4. Per calcolare il volume del solido di rotazione utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici.

$$V = 2\pi\int_0^3 xh(x)dx =$$

$$2\pi\left[\int_0^1 x\frac{x^2}{2}dx + \int_1^3 x\left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1\right)dx\right] =$$

$$2\pi\left\{\left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3\right\} =$$

$$2\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{81}{8} + 18 - \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{83}{12}\pi$$

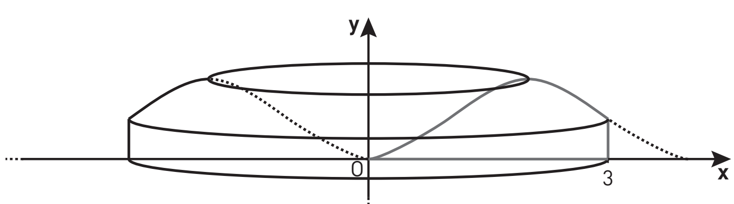

Figura 12