Scuole italiane all'estero • Americhe

4 Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

e l'asse delle x nell'intervallo $[0; 3]$; le sue sezioni ottenute su piani perpendicolari all'asse x sono tutti triangoli isosceli di altezza kx, con $k \in \mathbb{R}$. Determinare k in modo che il volume del solido sia pari a 2.

4 La funzione $y = x^2 + 1$, nell'intervallo $[0; 3]$, è crescente da 1 a 10. La funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, nello stesso intervallo, è allora decrescente da 1 a $\frac{1}{10}$.

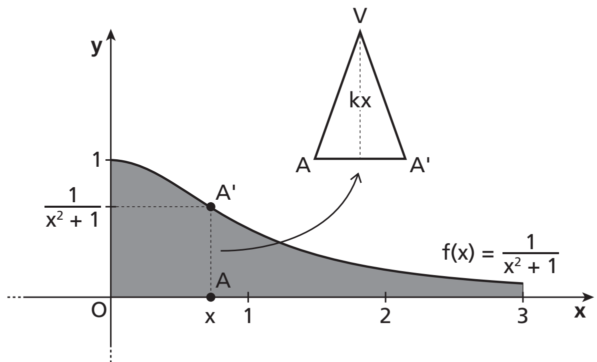

Figura 13

Fissato $x \in [0; 3]$, la sezione con un piano perpendicolare all'asse delle ascisse è un triangolo isoscele la cui base misura $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, e la cui altezza è lunga kx.

L'area del triangolo è dunque:

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot kx = \frac{k}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}.$$

Osserviamo che deve essere $k \geq 0$, perché l'altezza del triangolo deve essere rappresentata da un numero non negativo.
Calcoliamo il volume V del solido integrando le aree dei triangoli per x che va da 0 a 3:

$$V = \int_0^3 \mathcal{A}(x)dx = \frac{k}{2}\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{k}{4}\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{k}{4}[\ln(x^2+1)]_0^3 = \frac{k}{4}(\ln 10 - \ln 1) = \frac{k}{4}\ln 10.$$

Imponiamo che tale volume sia uguale a 2:

$$\frac{k}{4}\ln 10 = 2 \rightarrow k = \frac{8}{\ln 10} \simeq 3,47.$$