

PROBLEMA 2

Sia data la famiglia di funzioni $f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx$.

1. Determina per quale valore di a e b il grafico della funzione passa per l'origine e ha un massimo nel punto di ascissa 2;
2. trovata l'espressione analitica della funzione, dopo aver definito il campo di esistenza, determina le equazioni degli eventuali asintoti;
3. determina l'area della regione piana delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dalla curva stessa e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y ;
4. calcola infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla tangente in O , dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y .

PROBLEMA 2

1. Il grafico della funzione:

$$f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{x^2+4}\right) + bx$$

passa per l'origine del sistema di riferimento se:

$$f(0) = 0 \rightarrow \ln \frac{a}{4} = 0 \rightarrow \frac{a}{4} = 1 \rightarrow a = 4.$$

La funzione corrispondente:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + bx$$

ha dominio:

$$\frac{4-x}{x^2+4} > 0 \rightarrow 4-x > 0 \rightarrow x < 4$$

ed è derivabile nel suo dominio, quindi ha un massimo nel punto di ascissa $x = 2$ se la derivata prima si annulla in tale punto, è positiva prima e negativa dopo.

Calcoliamo la derivata prima e imponiamo che si annulli in $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{x^2+4}{4-x} \cdot \frac{-(x^2+4) - (4-x) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} + b \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-8x-4}{(x^2+4)(4-x)} + b;$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow \frac{4-16-4}{(4+4)(4-2)} + b = 0 \rightarrow \frac{-16}{8 \cdot 2} + b = 0 \rightarrow b = 1.$$

Studiamo il segno della derivata prima della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x$:

$$f'(x) = \frac{x^2-8x-4}{(x^2+4)(4-x)} + 1 \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-8x-4+4x^2-x^3+16-4x}{(x^2+4)(4-x)} \rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-x^3+5x^2-12x+12}{(x^2+4)(4-x)}.$$

Scomponiamo il numeratore con la regola di Ruffini, ricordando che il polinomio si annulla per $x = 2$.

	-1	+5	-12	+12
2		-2	+6	-12
	-1	+3	-6	0

La derivata prima si può allora scrivere nella seguente forma:

$$f'(x) = \frac{(2-x)(x^2-3x+6)}{(x^2+4)(4-x)}.$$

Il trinomio x^2-3x+6 e il binomio x^2+4 sono sempre positivi in \mathbb{R} ; il binomio $4-x$ è positivo nel dominio $x < 4$ della funzione. Il segno di $f'(x)$ è quindi determinato dal binomio $2-x$ e risulta:

- $f'(x) > 0$ e $f(x)$ crescente per $2-x > 0 \rightarrow x < 2$;
- $f'(x) < 0$ e $f(x)$ decrescente per $2-x < 0 \rightarrow 2 < x < 4$.

Il punto di ascissa $x = 2$ risulta effettivamente un punto di massimo (assoluto) e l'espressione analitica della funzione cercata è dunque:

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x.$$

2. Il dominio della funzione è $]-\infty; 4[$.

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio per determinare gli eventuali asintoti.

- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x \right] = -\infty,$

la funzione ammette l'asintoto verticale $x = 4$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x \right] = -\infty,$

valutiamo se la funzione presenta un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$ (anche se il fatto che la funzione presenta un termine lineare e un termine logaritmico fa escludere l'esistenza di tale asintoto).

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + 1 \right] = 1,$$

perché nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$ data dal termine $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)$ prevale l'infinitesimo $\frac{1}{x}$ rispetto all'infinito $\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right)$.

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) + x - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln\left(\frac{4-x}{x^2+4}\right) \right] = -\infty,$$

quindi l'asintoto obliquo non esiste (come avevamo ipotizzato).

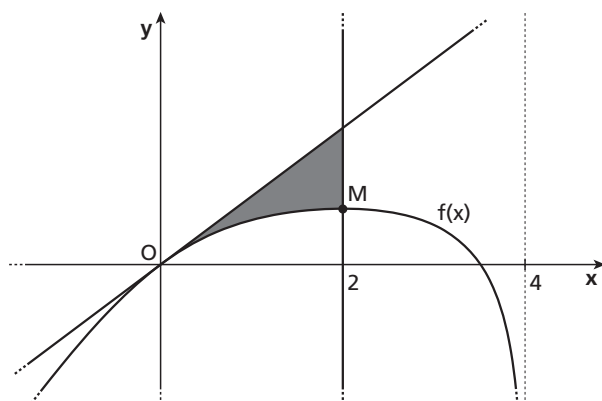
3. Disegniamo un grafico approssimativo della funzione, per individuare la regione di cui dobbiamo calcolare l'area.

Riassumiamo le caratteristiche note di $f(x)$:

- è definita per $x < 4$,
- è crescente per $x < 2$ e decrescente per $2 < x < 4$; il punto di massimo in $x = 2$ ha ordinata

$$f(2) = \ln \frac{4-2}{4+4} + 2 = \ln \frac{1}{4} + 2 \simeq 0,614;$$

- passa per l'origine del sistema di riferimento;
- presenta un asintoto verticale di equazione $x = 4$, mentre tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, senza asintoto obliquo.



■ Figura 5

La retta tangente al grafico nell'origine ha coefficiente angolare:

$$m = f'(0) = \frac{(2-0)(0^2 - 3 \cdot 0 + 6)}{(0^2 + 4)(4-0)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4},$$

ed equazione:

$$y = \frac{3}{4}x.$$

In figura abbiamo evidenziato l'area della regione delimitata dalla retta tangente alla curva nell'origine, dal grafico di $f(x)$ e dalla retta passante per il suo punto di massimo e parallela all'asse y . Calcoliamo la sua area mediante l'integrale:

$$A = \int_0^2 \left[\frac{3}{4}x - \ln \frac{4-x}{x^2+4} - x \right] dx = \int_0^2 \left[-\frac{1}{4}x - \ln \frac{4-x}{x^2+4} \right] dx.$$

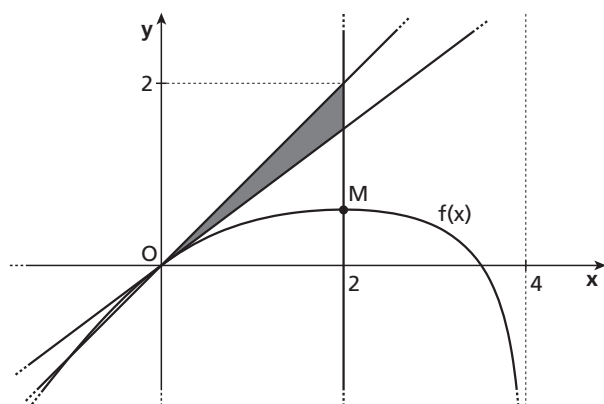
Calcoliamo, per parti, l'integrale indefinito del termine logaritmico, trascurando la costante additiva finale:

$$\begin{aligned} \int \ln \frac{4-x}{x^2+4} dx &= \int [\ln(4-x) - \ln(x^2+4)] dx = \int \ln(4-x) dx - \int \ln(x^2+4) dx = \\ &= x \ln(4-x) + \int \frac{x}{4-x} dx - x \ln(x^2+4) + 2 \int \frac{x^2}{x^2+4} dx = \\ &= x \ln(4-x) - \int \frac{x-4+4}{x-4} dx - x \ln(x^2+4) + 2 \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4} dx = \\ &= x \ln(4-x) - \int \left(1 + \frac{4}{x-4} \right) dx - x \ln(x^2+4) + 2 \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right) dx = \\ &= x \ln(4-x) - x - 4 \ln|x-4| - x \ln(x^2+4) + 2x - 8 \int \left(\frac{1}{x^2+4} \right) dx = \\ &= x \ln(4-x) - x - 4 \ln|x-4| - x \ln(x^2+4) + 2x - 4 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \\ &= x \ln(4-x) + x - 4 \ln|x-4| - x \ln(x^2+4) - 4 \arctan \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Possiamo procedere col calcolo dell'area:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 \left[-\frac{1}{4}x - \ln \frac{4-x}{x^2+4} \right] dx = \\
 &= \left[-\frac{x^2}{8} - x \ln(4-x) - x + 4 \ln|x-4| + x \ln(x^2+4) + 4 \arctan \frac{x}{2} \right]_0^2 = \\
 &= \left[-\frac{4}{8} - 2 \ln(4-2) - 2 + 4 \ln|2-4| + 2 \ln(4+4) + 4 \arctan \frac{2}{2} \right] - \left[4 \ln|0-4| + 4 \arctan \frac{0}{2} \right] = \\
 &= \left[-\frac{1}{2} - 2 \ln 2 - 2 + 4 \ln 2 + 2 \ln 2^3 + 4 \arctan 1 \right] - [4 \ln 2^2 + 4 \arctan 0] = \\
 &= -\frac{5}{2} + (-2 + 4 + 6 - 8) \ln 2 + 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{5}{2} \simeq 0,642.
 \end{aligned}$$

4. Rappresentiamo la regione da ruotare attorno all'asse x , delimitata dalla tangente in O , dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta passante per il punto di massimo di $f(x)$ e parallela all'asse y .



■ Figura 6

Il solido ottenuto ruotando attorno all'asse x tale regione è equivalente a un cono retto di altezza 2 e raggio di base 2, da cui è stato scavato un cono circolare retto di altezza 2 e raggio di base $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$.

Il volume del solido è quindi dato da:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2} \right) \pi = \frac{16-9}{6} \pi = \frac{7}{6} \pi \simeq 3,665.$$