Scuole italiane all'estero • Europa

PROBLEMA 1

Sei il responsabile del controllo della navigazione della nave indicata in figura 1 con il punto P. Nel sistema di riferimento cartesiano Oxy le posizioni della nave P, misurate negli istanti $t=0$ e $t=10$ (il tempo t è misurato in minuti, le coordinate x e y sono espresse in miglia nautiche), sono date dai punti $P_1(14; 13)$ e $P_2(12; 11)$. Negli stessi istanti la posizione di una seconda nave Q è data dai punti $Q_1(12; -2)$ e $Q_2(11; -1)$. Entrambe le navi si muovono in linea retta e con velocità costante, come rappresentato in figura 1 (non in scala).

L'area indicata con ZMP è una «Zona Marittima Pericolosa». Il raggio luminoso di un faro posto nel punto F di coordinate $(0; 1)$ spazza un quarto di un cerchio di raggio 10 miglia (vedi figura 1).

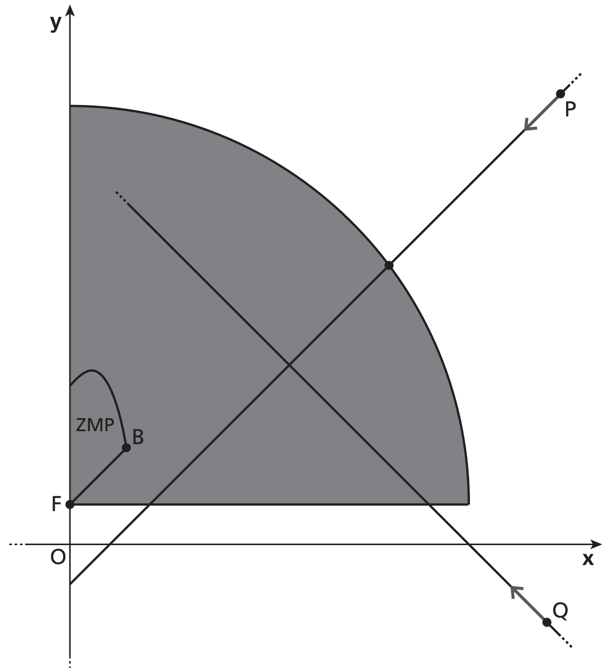

Figura 1

1. Calcola dopo quanto tempo, rispetto all'istante in cui la nave P avvista per la prima volta il faro F, essa raggiunge la minima distanza dal faro, e la misura di tale distanza.
2. Determina la posizione della nave P nell'istante in cui per la prima volta la sua distanza dalla nave Q è pari a 9 miglia.
3. Determina l'istante t nel quale la distanza tra le due navi è minima e calcola il valore di tale distanza.

Nel punto $B(X_B; Y_B)$ si trova una boa che segnala l'inizio della ZMP. La delimitazione della ZMP può essere descritta dai grafici delle funzioni f e g che si intersecano nel punto B e sono definite da:

$$f(x) = -x^3 + x + 4,\ x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le x_B$$

$$g(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R},\ 0 \le x \le x_B$$

e dalla retta $x = 0$.

4. Calcola l'area della ZMP.

PROBLEMA 1

1. La nave P occupa la posizione $P_1(14;13)$ all'istante $t=0$ e la posizione $P_2(12;11)$ all'istante $t=10$ minuti.
La nave, in 10 minuti, ha percorso una distanza pari a:

$$d_{1-2}=\sqrt{(14-12)^2+(13-11)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}\text{ miglia nautiche (simbolo M),}$$

e mantiene quindi una velocità costante $v=\dfrac{2\sqrt{2}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}\simeq 0,28$ M/min.

La traiettoria della nave è individuata dalla retta p passante per i punti P_1 e P_2; determiniamo la sua equazione:

$$p\colon \frac{x-12}{14-12}=\frac{y-11}{13-11}\ \to\ x-12=y-11\ \to\ y-x+1=0.$$

L'arco di circonferenza di raggio 10 M individuato dal faro posto in $F(0;1)$ ha equazione:

$$c\colon (x-0)^2+(y-1)^2=10^2\ \to\ x^2+y^2-2y+1=100\ \to\ x^2+y^2-2y-99=0,$$

di cui consideriamo solo il tratto con $0\le x\le 10$ e $1\le y\le 11$.

Calcoliamo le coordinate del punto di intersezione A fra la traiettoria della nave e la circonferenza:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2y-99=0\\ y-x+1=0\end{cases}\ \to\ \begin{cases}x^2+(x-1)^2-2(x-1)-99=0\\ y=x-1\end{cases}.$$

Risolviamo la prima equazione, di secondo grado:

$$x^2+x^2-2x+1-2x+2-99=0\ \to\ 2x^2-4x-96=0\ \to\ x^2-2x-48=0\ \to$$

$$x=1\pm\sqrt{1+48}=1\pm 7\ \to\ x=8\text{ (unica soluzione accettabile).}$$

Il punto A ha coordinate (8; 7).
Il punto di minima distanza della traiettoria di P dal faro F è dato dalla proiezione H di F sulla retta p.
Le coordinate di H si ottengono intersecando la retta p di coefficiente angolare 1 con la perpendicolare per F a p, che ha coefficiente angolare -1.

$$\begin{cases}y=x-1\\ y=-x+1\end{cases}\ \to\ \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\ \to\ H(1;0).$$

Il tratto AH è lungo:

$$\overline{AH}=\sqrt{(8-1)^2+(7-0)^2}=\sqrt{7^2+7^2}=7\sqrt{2}\text{ M.}$$

Per percorrere questo tratto AH, la nave P impiega:

$$\frac{\overline{AH}}{v}=\frac{7\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{5}}=35\text{ minuti.}$$

Il punto H dista $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ miglia nautiche da F (poiché FH è l'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele OFH di cateti lunghi 1 M).

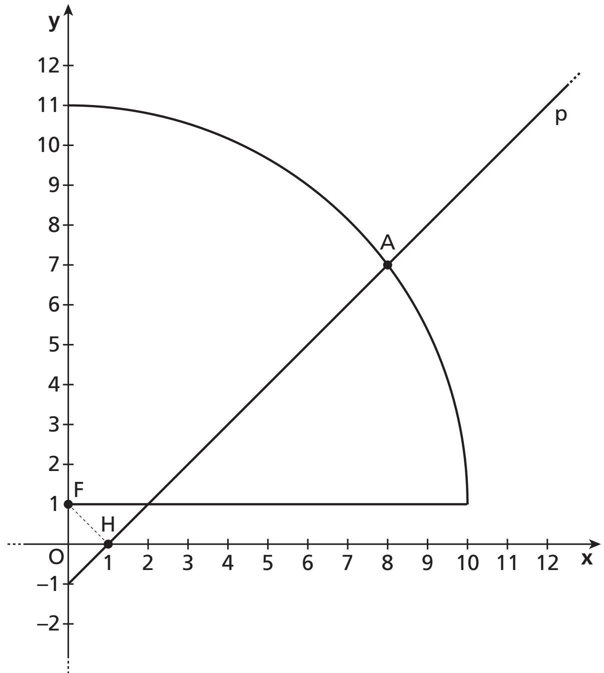

Figura 3

2. Le coordinate della nave P, espresse in miglia nautiche M in funzione del tempo t in minuti, sono date da:

$$P: \begin{cases} x = 14 + \dfrac{12-14}{10}t \\ y = 13 + \dfrac{11-13}{10}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 14 - \dfrac{1}{5}t \\ y = 13 - \dfrac{1}{5}t \end{cases}.$$

In modo analogo, le coordinate della nave Q sono date da:

$$Q: \begin{cases} x = 12 + \dfrac{11-12}{10}t \\ y = -2 + \dfrac{-1+2}{10}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 12 - \dfrac{1}{10}t \\ y = -2 + \dfrac{1}{10}t \end{cases}.$$

Stabiliamo quando le navi P e Q distano 9 miglia nautiche:

$$\overline{PQ} = 9 \rightarrow \overline{PQ}^2 = 81 \rightarrow (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = 81 \rightarrow$$

$$\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2 = 81 \rightarrow$$

$$\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2 = 81 \rightarrow 4 + \frac{1}{100}t^2 - \frac{4}{10}t + 225 + \frac{9}{100}t^2 - \frac{90}{10}t = 81 \rightarrow$$

$$\frac{10}{100}t^2 - \frac{94}{10}t + 148 = 0 \rightarrow 10t^2 - 940t + 14\,800 = 0 \rightarrow$$

$$t^2 - 94t + 1480 = 0 \rightarrow$$

$$t = 47 \pm \sqrt{2209 - 1480} \rightarrow t = 47 \pm 27 \rightarrow t = 20 \text{ minuti} \vee t = 74 \text{ minuti}.$$

Quindi, le navi P e Q si trovano per la prima volta alla distanza di 9 miglia dopo 20 minuti dall'inizio del controllo marittimo.

La posizione della nave P in questo istante è:

$$P: \begin{cases} x = 14 - \frac{1}{5} \cdot 20 \\ y = 13 - \frac{1}{5} \cdot 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 14 - 4 \\ y = 13 - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases} \rightarrow C(10; 9).$$

Nello stesso istante, la nave Q è nella posizione $C'(10; 0)$.w

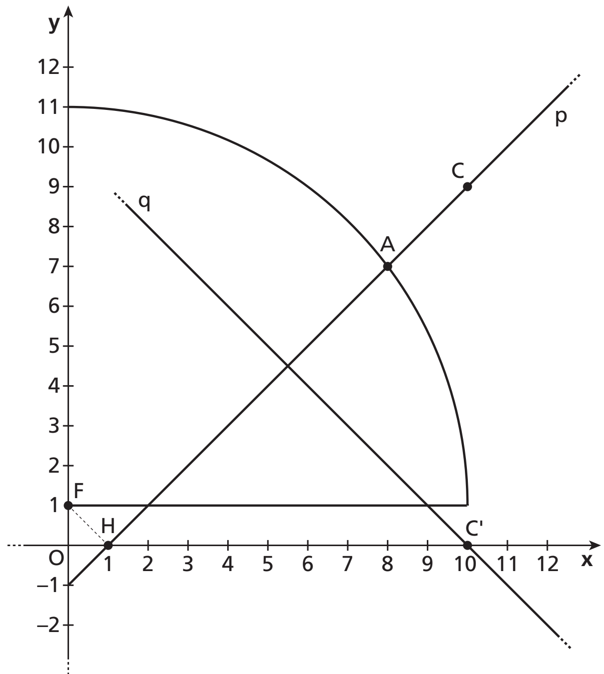

Figura 4

3. La distanza, istante per istante, fra i punti $P\left(14 - \frac{1}{5}t; 13 - \frac{1}{5}t\right)$ e $Q\left(12 - \frac{1}{10}t; -2 + \frac{1}{10}t\right)$ è:

$$d_{PQ}(t) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{\left(14 - \frac{1}{5}t - 12 + \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(13 - \frac{1}{5}t + 2 - \frac{1}{10}t\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2}.$$

Tale distanza è minima quando il radicando assume il valore minimo. Cerchiamo quindi il minimo di:

$$f(t) = [d_{PQ}(t)]^2 = \left(2 - \frac{1}{10}t\right)^2 + \left(15 - \frac{3}{10}t\right)^2 = 4 + \frac{1}{100}t^2 - \frac{2}{5}t + 225 + \frac{9}{100}t^2 - 9t =$$

$$\frac{1}{10}t^2 - \frac{47}{5}t + 229.$$

Il grafico di $f(t)$ rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, il cui punto di minimo è rappresentato dal vertice, la cui ascissa è:

$$t_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{47}{5}}{2 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{47}{5} \cdot \frac{10}{2} = 47.$$

Quindi, le due navi si trovano alla minima distanza dopo 47 minuti dall'inizio del controllo marittimo e si trovano alla distanza:

$$d_{PQ}(47)=\sqrt{\left(2-\frac{1}{10}\cdot 47\right)^2+\left(15-\frac{3}{10}\cdot 47\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left(-\frac{27}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{729}{100}+\frac{81}{100}}=$$

$$\sqrt{\frac{810}{100}}=\frac{9}{\sqrt{10}}\simeq 2{,}846 \text{ M}.$$

4. Calcoliamo l'area della zona marittima pericolosa ZMP mediante l'integrale:

$$A_{\text{ZMP}}=\int_0^{x_B}[f(x)-g(x)]dx.$$

Dobbiamo prima determinare l'ascissa x_B del punto di intersezione fra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$:

$$\begin{cases} y=-x^3+x+4 \\ y=x+1 \end{cases} \rightarrow -x^3+x+4=x+1 \rightarrow x^3=3 \rightarrow x_B=\sqrt[3]{3}\simeq 1{,}44.$$

L'area di ZMP è quindi uguale a:

$$A_{\text{ZMP}}=\int_0^{\sqrt[3]{3}}(-x^3+x+4-x-1)dx=\int_0^{\sqrt[3]{3}}(-x^3+3)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3x\right]_0^{\sqrt[3]{3}}=$$

$$-\frac{(\sqrt[3]{3})^4}{4}+3\cdot\sqrt[3]{3}=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}=\frac{9}{4}\sqrt[3]{3}\simeq 3{,}245 \text{ M}^2.$$