Scuole italiane all'estero • Americhe

7 Sono date le funzioni $f(x) = e^{3-x}$ e $g(x) = e^{2x}$. Determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse x e dai grafici di f e di g.

7 I grafici di $f(x)=e^{3-x}$ e di $g(x)=e^{2x}$ si possono tracciare partendo dal grafico di $y=e^x$:

- $f(x)=e^{3-x}=e^3\cdot e^{-x}$ si ottiene da $y=e^x$ applicando prima la simmetria rispetto all'asse y e poi dilatando lungo l'asse y del fattore $e^3\simeq 20$;
- $g(x)=e^{2x}=(e^x)^2$ si ottiene elevando al quadrato $y=e^x$.

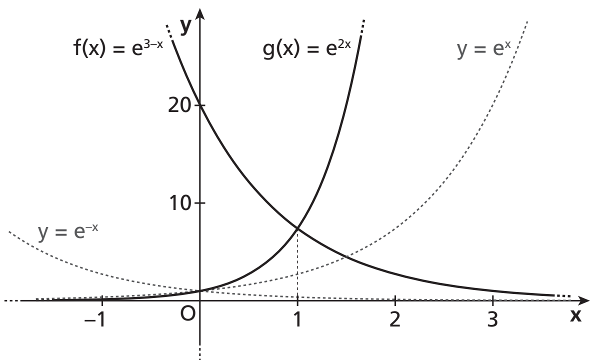

Figura 17

Osserviamo che i due grafici si intersecano per $x=1$, in quanto $f(1)=g(1)=e^2$, e che hanno entrambi l'asse x come asintoto orizzontale.
Il quesito chiede di determinare l'area della regione limitata racchiusa dall'asse x e dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$.

Osserviamo che tale regione *non è limitata*, quindi il quesito contiene un errore che può generare il dubbio su quale sia effettivamente la regione da considerare.
Per esempio, volendo privilegiare l'informazione che la regione sia *limitata*, si potrebbe considerare la regione limitata racchiusa dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e dall'asse y (*non* dall'asse x).

Nel dubbio, sviluppiamo entrambi i calcoli.
L'area della regione *illimitata* compresa fra l'asse x e i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ è:

$$A_x=\int_{-\infty}^{1}g(x)dx+\int_{1}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{s\to-\infty}\int_s^1 e^{2x}dx+\lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{3-x}dx=$$

$$\lim_{s\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\int_s^1 2e^{2x}dx\right)+\lim_{t\to+\infty}\left(-\int_1^t -e^{3-x}dx\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to-\infty}[e^{2x}]_s^1-\lim_{t\to+\infty}[e^{3-x}]_1^t=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{s\to-\infty}(e^2-e^{2s})-\lim_{t\to+\infty}(e^{3-t}-e^2)=\frac{1}{2}(e^2-0)-(0-e^2)=\frac{1}{2}e^2+e^2=\frac{3}{2}e^2\simeq 11{,}08.$$

L'area della regione *limitata* racchiusa dall'asse y e dai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ è:

$$A_y=\int_0^1[f(x)-g(x)]dx=\int_0^1(e^{3-x}-e^{2x})dx=\left[-e^{3-x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=$$

$$\left(-e^2-\frac{1}{2}e^2\right)-\left(-e^3-\frac{1}{2}e^0\right)=-\frac{3}{2}e^2+e^3+\frac{1}{2}\simeq 9{,}50.$$