

### PROBLEMA 1

Fissato  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la funzione  $g_\lambda$  è così definita:

$$g_\lambda(x) = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$$

e si indica con  $\Gamma_\lambda$  il suo grafico, in un riferimento cartesiano  $Oxy$ .

1. Traccia i seguenti grafici:  $\Gamma_{-5}$ ,  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  e  $\Gamma_9$ .
2. Stabilisci, al variare di  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$ , se vi sono, e quanti sono, gli asintoti verticali e se vi sono massimi o minimi. Descrivi quindi, a seconda del valore di  $\lambda$ , qual è l'andamento della funzione  $g_\lambda$ , tracciandone un diagramma indicativo.
3. Dimostra che, per qualunque  $\lambda$  diverso da 0 da 4, la retta passante per i punti di intersezione tra  $\Gamma_\lambda$  e gli assi cartesiani è tangente a  $\Gamma_\lambda$  nel suo punto di ascissa nulla.
4. Detti  $A$  e  $B$  i punti di intersezione tra  $\Gamma_9$  e gli assi cartesiani, sia  $\mathcal{G}$  la regione piana delimitata dai segmenti  $OA$  e  $OB$  e dall'arco di  $\Gamma_9$  di estremi  $A$  e  $B$ . Determina l'area di  $\mathcal{G}$  e il volume del solido generato dalla rotazione di  $\mathcal{G}$  attorno all'asse  $y$ .

**PROBLEMA 1**

*Osservazione preliminare.* Il secondo punto del problema chiede di studiare asintoti, minimi e massimi della funzione  $g_\lambda(x) = \frac{x-2}{x^2-\lambda}$  al variare di  $\lambda$  e di tracciare i relativi grafici, mentre il primo punto chiede di tracciare i grafici delle funzioni per i valori particolari  $\lambda = -5, 0, 3, 4, 9$ .

Anziché studiare le 5 funzioni particolari, e poi rieseguire lo studio nel caso generale, preferiamo allora studiare prima le funzioni per  $\lambda$  generico, ottenendo così al contempo i risultati per i valori particolari richiesti di  $\lambda$ .

1. e 2. Studiamo la funzione  $g_\lambda(x)$  esaminando i casi che si possono presentare al variare di  $\lambda$ .

**Caso  $\lambda < 0$ .**

In questo caso, il denominatore  $x^2 - \lambda$  è sempre positivo.

- Dominio:  $\mathbb{R}$ .
- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x-2}{x^2-\lambda} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{\lambda} \end{cases} \rightarrow \left(0; \frac{2}{\lambda}\right); \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x-2}{x^2-\lambda} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow (2; 0);$$

- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda} > 0 \rightarrow x-2 > 0 \rightarrow x > 2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-\lambda} = 0, \text{ quindi } x = 0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

- Derivata prima:

$$g'_\lambda(x) = \frac{x^2 - \lambda - (x-2)2x}{(x^2 - \lambda)^2} = \frac{-x^2 + 4x - \lambda}{(x^2 - \lambda)^2}.$$

Studiamo il segno:

$$g'_\lambda(x) > 0 \rightarrow -x^2 + 4x - \lambda > 0 \rightarrow x^2 - 4x + \lambda < 0.$$

L'equazione associata ammette soluzioni:

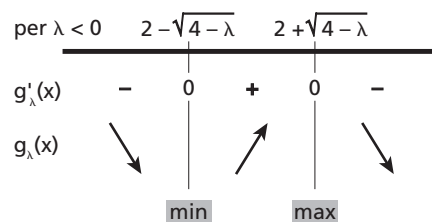
$$x^2 - 4x + \lambda = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - \lambda}$$

in quanto  $\lambda < 0$  e il radicando è positivo.

Risulta allora:

$$g'_\lambda(x) > 0 \rightarrow 2 - \sqrt{4 - \lambda} < x < 2 + \sqrt{4 - \lambda}.$$

Compiliamo lo schema dei segni.



■ Figura 2

La funzione  $g_\lambda(x)$ , per  $\lambda < 0$ , ha un minimo di ascissa  $x = 2 - \sqrt{4 - \lambda}$  e un massimo di ascissa  $x = 2 + \sqrt{4 - \lambda}$ .

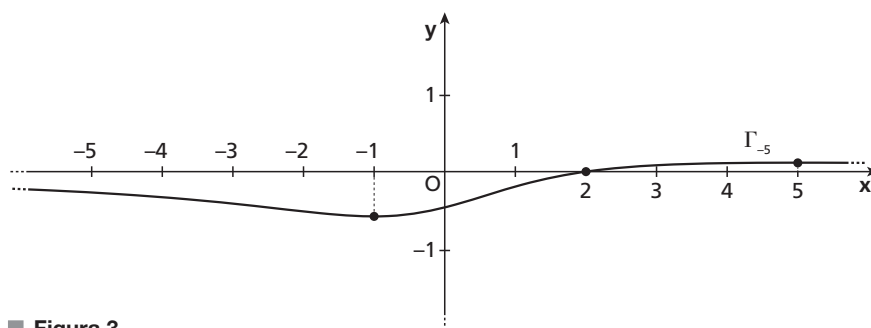
- Il calcolo e lo studio del segno della derivata seconda risulta complesso e lo tralasciamo. Per le informazioni già ricavate  $g_\lambda(x)$  possiamo comunque dedurre che la funzione presenta tre flessi a tangente obliqua: uno per  $x < 2 - \sqrt{4 - \lambda}$ , uno per  $x > 2 + \sqrt{4 - \lambda}$  e un altro compreso fra i due valori indicati.

Come grafico rappresentativo della classe  $\lambda < 0$  disegniamo quello relativo a  $\lambda = -5$ , che è uno dei grafici richiesti al primo punto del problema.

In particolare,  $\Gamma_{-5}$  presenta i punti di minimo e massimo rispettivamente in

$$x = 2 - \sqrt{4 - (-5)} = -1 \text{ e } x = 2 + \sqrt{4 - (-5)} = 5,$$

e interseca l'asse delle ordinate in  $y = -\frac{2}{5}$ .



■ Figura 3

**Caso  $\lambda = 0$ .**

La funzione da studiare è  $g_0(x) = \frac{x-2}{x^2}$ .

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{0\}$ .
- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x-2}{x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow (2; 0).$$

- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2} > 0 \rightarrow x-2 > 0 \rightarrow x > 2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2} = 0, \text{ quindi } x = 0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x-2}{x^2} = -\infty, \text{ quindi } x = 0 \text{ è asintoto verticale sia a destra sia a sinistra.}$$

- Derivata prima:

$$g'_0(x) = \frac{x^2 - (x-2)2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 4x}{x^4} = \frac{4-x}{x^3}.$$

Compiliamo il grafico dei segni.

La funzione  $g_0(x)$  non ha un minimo relativo; presenta invece un massimo relativo per  $x = 4$ .

per $\lambda = 0$	0	4	
$4 - x$	+	+	0 -
$x^3$	-	0	+
$g'_0(x)$	-	+	0 -
$g_0(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

**max**

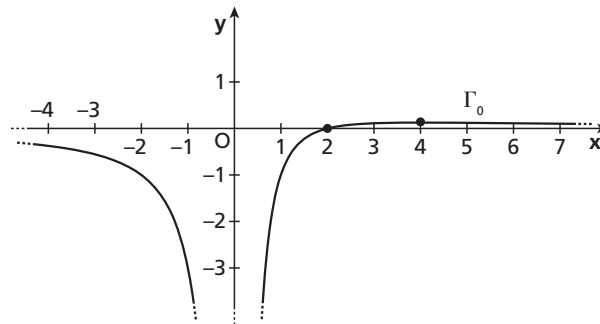
■ Figura 4

- Derivata seconda:

$$g''_0(x) = \frac{-x^3 - (4-x)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 - 12x^2 + 3x^3}{x^6} = \frac{2x^3 - 12x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 12x^2}{x^6} = \frac{2x - 12}{x^4} = 2 \frac{x - 6}{x^4}.$$

La derivata seconda è negativa per  $x < 6$  e positiva per  $x > 6$ , quindi la funzione volge la concavità verso il basso per  $x < 6$ , verso l'alto  $x > 6$ .

Disegniamo il grafico  $\Gamma_0$  della funzione.



■ Figura 5

**Caso  $0 < \lambda < 4$ .**

In questo caso il denominatore si può scomporre nella forma  $x^2 - \lambda = (x - \sqrt{\lambda})(x + \sqrt{\lambda})$ , con  $0 < \sqrt{\lambda} < 2$ . Nella funzione  $g_\lambda(x) = \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})}$  il numeratore non si semplifica con alcun fattore a denominatore.

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-\sqrt{\lambda}; +\sqrt{\lambda}\}$ .
- Procedendo come nel caso  $\lambda < 0$  troviamo le intersezioni con gli assi:  $(0; \frac{2}{\lambda})$  e  $(2; 0)$ .
- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda} > 0 \rightarrow \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})} > 0.$$

Compiliamo lo schema dei segni.

La funzione assume valori positivi per

$$-\sqrt{\lambda} < x < \sqrt{\lambda} \vee x > 2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-\lambda} = 0$ , quindi  $x = 0$  è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.

per $0 < \lambda < 4$	$-\sqrt{\lambda}$	$+\sqrt{\lambda}$	2	
$x - 2$	-	-	- 0	+
$x + \sqrt{\lambda}$	-	0	+	+
$x - \sqrt{\lambda}$	-	-	0	+
$g_\lambda(x)$	-	+	-	0

■ Figura 6

Per  $x \rightarrow \pm \sqrt{\lambda}$  la funzione tende a infinito, perché il numeratore tende a un valore finito diverso da zero mentre il denominatore tende a zero. Per il teorema della permanenza del segno otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{\lambda}^-} g_{\lambda}(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{\lambda}^+} g_{\lambda}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\sqrt{\lambda}^-} g_{\lambda}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\sqrt{\lambda}^+} g_{\lambda}(x) = -\infty.$$

Le rette di equazione  $x = -\sqrt{\lambda}$  e  $x = \sqrt{\lambda}$  sono asintoti verticali per la funzione.

- Il calcolo della derivata prima coincide con quello svolto nel caso  $\lambda < 0$ ; è dunque

$$g'_{\lambda}(x) = \frac{-x^2 + 4x - \lambda}{(x^2 - \lambda)^2}$$

$$g'_{\lambda}(x) > 0 \rightarrow 2 - \sqrt{4 - \lambda} < x < 2 + \sqrt{4 - \lambda}.$$

Osserviamo che anche in questo caso è  $\sqrt{4 - \lambda} > 0$ , perché  $0 < \lambda < 4$ .

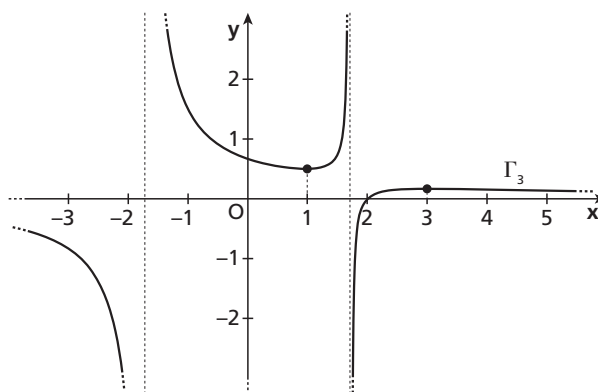
La funzione  $g_{\lambda}(x)$ , per  $0 < \lambda < 4$ , ha un minimo di ascissa  $x = 2 - \sqrt{4 - \lambda}$ , (compresa fra 0 e 2) e un massimo di ascissa  $x = 2 + \sqrt{4 - \lambda}$ .

- Tralasciamo anche in questo caso il segno della derivata seconda.

Per le informazioni ricavate possiamo comunque dedurre che la funzione  $g_{\lambda}(x)$  presenta sicuramente un flesso a tangente obliqua  $x > 2 + \sqrt{4 - \lambda}$ .

Come grafico rappresentativo della classe  $0 < \lambda < 4$  disegniamo quello relativo a  $\lambda = 3$ .

In particolare,  $\Gamma_3$  presenta i punti di minimo e massimo rispettivamente in  $x = 2 - \sqrt{4 - 3} = 1$ , e  $x = 2 + \sqrt{4 - 3} = 3$ , e interseca l'asse delle ordinate in  $y = \frac{2}{3}$ .



■ Figura 7

**Caso  $\lambda = 4$ .**

La funzione da studiare è  $g_4(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ .

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-2; +2\}$ .

Il denominatore si può scomporre, e la funzione semplificare:

$$g_4(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.$$

La funzione rimane non definita in  $x = 2$ , dove però presenta una discontinuità eliminabile ponendo  $g_4(2) = \frac{1}{4}$ . Nel seguito, consideriamo la funzione con la discontinuità eliminata.

- Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{x+2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow (0; \frac{1}{2}); \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{x+2} \end{cases} \rightarrow \text{impossibile}.$$

- Segno della funzione:

$$\frac{1}{x+2} > 0 \rightarrow x+2 > 0 \rightarrow x > -2.$$

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = 0, \text{ quindi } x=0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{1}{x+2} = \pm\infty, \text{ quindi } x=-2 \text{ è asintoto verticale sia a destra sia a sinistra.}$$

- La derivata prima

$$g'_4(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

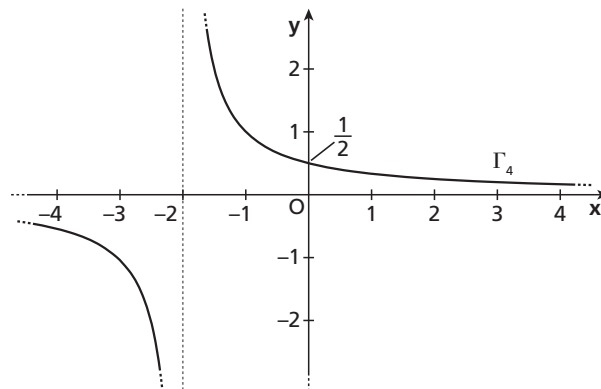
è sempre negativa, quindi la funzione è sempre decrescente e non presenta minimi o massimi relativi.

- La derivata seconda

$$g''_4(x) = +\frac{2}{(x+2)^3}$$

è positiva per  $x > -2$ ; la funzione volge la concavità verso l'alto per  $x > -2$  e verso il basso per  $x < -2$ .

Disegniamo il grafico plausibile  $\Gamma_4$ .



■ Figura 8

**Caso  $\lambda > 4$ .**

Anche in questo caso il denominatore si può scomporre con la differenza di quadrati e nella funzione

$$g_\lambda(x) = \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})} \text{ il numeratore non si semplifica con alcun fattore a denominatore.}$$

- Dominio:  $\mathbb{R} - \{-\sqrt{\lambda}; +\sqrt{\lambda}\}$ , con  $\sqrt{\lambda} > 2$ .

- Intersezione con gli assi:  $(0; \frac{2}{\lambda})$ ;  $(2; 0)$ .

- Segno della funzione:

$$\frac{x-2}{x^2-\lambda} > 0 \rightarrow \frac{x-2}{(x-\sqrt{\lambda})(x+\sqrt{\lambda})} > 0.$$

Compiliamo lo schema dei segni.

La funzione assume valori positivi per

$$-\sqrt{\lambda} < x < 2 \vee x > \sqrt{\lambda}.$$

per $\lambda > 4$	$-\sqrt{\lambda}$		2		$+\sqrt{\lambda}$		
$x - 2$	-		-	0	+	+	
$x + \sqrt{\lambda}$	-	0	+		+	+	
$x - \sqrt{\lambda}$	-		-		-	0	+
$g_\lambda(x)$	-	$\frac{2}{\lambda}$	+	0	-	$\frac{2}{\lambda}$	+

■ Figura 9

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-\lambda} = 0, \text{ quindi } x=0 \text{ è asintoto orizzontale sia a destra sia a sinistra.}$$

Come nel caso  $0 < \lambda < 4$ , per  $x \rightarrow \pm\sqrt{\lambda}$  la funzione tende a infinito, perché il numeratore tende a un valore finito diverso da zero mentre il denominatore tende a zero. Le rette di equazione  $x = -\sqrt{\lambda}$  e  $x = \sqrt{\lambda}$  sono asintoti verticali per la funzione.

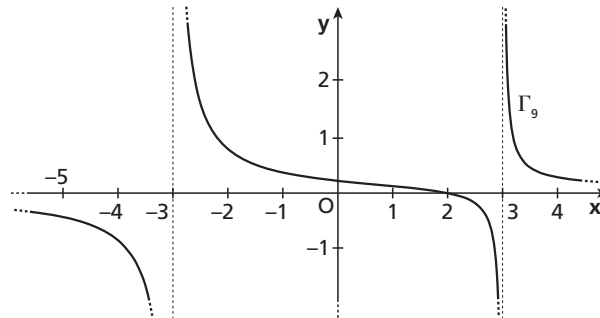
- La derivata prima si presenta sempre nella forma

$$g'_\lambda(x) = \frac{-x^2 + 4x - \lambda}{(x^2 - \lambda)^2}.$$

In questo caso, però, il numeratore è sempre negativo (poiché  $\lambda > 4$ ) e quindi la derivata prima è sempre negativa. La funzione  $g_\lambda(x)$ , per  $\lambda > 4$ , è sempre decrescente e non ha minimi o massimi relativi.

- Tralasciamo anche in questo caso il segno della derivata seconda; per quanto ricavato, possiamo comunque dedurre che la funzione  $g_\lambda(x)$  presenta un flesso a tangente obliqua per  $-\sqrt{\lambda} < x < \sqrt{\lambda}$ .

Come grafico rappresentativo della classe  $\lambda > 4$  disegniamo quello relativo a  $\lambda = 9$ .



■ Figura 10

3. Per  $\lambda$  diverso da 0 e da 4, il grafico  $\Gamma_\lambda$  interseca gli assi cartesiani in  $(0; \frac{2}{\lambda})$  e  $(2; 0)$ . La retta  $r_\lambda$  che li congiunge ha equazione:

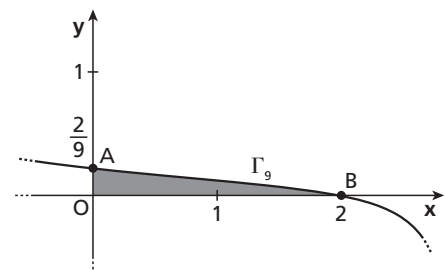
$$r_\lambda: y = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda}.$$

Per  $\lambda$  diverso da 0 e da 4, inoltre, è  $g'_\lambda(x) = \frac{-x^2 + 4x - \lambda}{(x^2 - \lambda)^2}$ ; il coefficiente angolare della retta tangente a  $\Gamma_\lambda$  nel punto di ascissa nulla vale dunque:

$$g'_\lambda(0) = \frac{-\lambda}{\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Il coefficiente angolare di  $r_\lambda$  è uguale a  $g'_\lambda(0)$  e  $r_\lambda$  passa per il punto  $(0; \frac{2}{\lambda})$  di  $\Gamma_\lambda$  di ascissa nulla, quindi  $r_\lambda$  è la tangente a  $\Gamma_\lambda$  nel suo punto di ascissa nulla.

4. Nel caso particolare  $\lambda = 9$ , il grafico  $\Gamma_9$  interseca gli assi cartesiani in  $A(0; \frac{2}{9})$  e  $B(2; 0)$ .



■ Figura 11

L'area della regione  $\mathcal{G}$  sottesa al grafico di  $\Gamma_9$  fra i punti  $A$  e  $B$  è data dall'integrale:

$$A = \int_0^2 \frac{x-2}{x^2-9} dx.$$

Sviluppiamo la funzione integranda nella forma:

$$\frac{x-2}{x^2-9} = \frac{x-2}{(x-3)(x+3)} = \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3} = \frac{C(x+3)+D(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(C+D)x+(3C-3D)}{(x-3)(x+3)}$$

da cui:

$$\begin{cases} C+D=1 \\ 3C-3D=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C=1-D \\ 3-3D-3D=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{6} \\ D=\frac{5}{6} \end{cases}.$$

L'integrale dell'area diventa allora:

$$A = \int_0^2 \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx = \left[ \frac{1}{6} \ln|x-3| + \frac{5}{6} \ln|x+3| \right]_0^2 =$$

$$\left( \frac{1}{6} \ln 1 + \frac{5}{6} \ln 5 \right) - \left( \frac{1}{6} \ln 3 + \frac{5}{6} \ln 3 \right) = \frac{5}{6} \ln 5 - \ln 3 \simeq 0,24.$$

Il volume del solido ottenuto dalla rotazione di  $\mathcal{G}$  attorno all'asse  $y$  è invece dato, col metodo dei gusci cilindrici, dall'integrale:

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot \frac{x-2}{x^2-9} dx.$$

Sviluppiamo la funzione integranda:

$$x \cdot \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{x^2-2x}{x^2-9} = \frac{x^2-2x-9+9}{x^2-9} = 1 + \frac{9-2x}{x^2-9}.$$

Come prima, scriviamo la frazione come somma di due frazioni con denominatori lineari:

$$\frac{9-2x}{x^2-9} = \frac{9-2x}{(x-3)(x+3)} = \frac{E}{x-3} + \frac{F}{x+3} = \frac{E(x+3)+F(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{(E+F)x+(3E-3F)}{(x-3)(x+3)},$$

$$\begin{cases} E+F=-2 \\ 3E-3F=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E=-2-F \\ E-F=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E=-2-F \\ -2-F-F=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E=\frac{1}{2} \\ F=-\frac{5}{2} \end{cases}.$$

L'integrale diventa:

$$V = 2\pi \int_0^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+3} \right) dx = 2\pi \left[ x + \frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{5}{2} \ln|x+3| \right]_0^2 =$$

$$2\pi \left[ \left( 2 + \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{5}{2} \ln 5 \right) - \left( \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 3 \right) \right] = 2\pi \left( 2 - \frac{5}{2} \ln 5 + 2 \ln 3 \right) \simeq 1,09.$$