ESAME DI STATO 2018 ◇ PROVA DI MATEMATICA

Svolgimento del problema 1

1 **Parte 1**

La funzione $y = f(x)$ ha per grafico il segmento Γ in figura 1 che giace sulla retta di equazione $y = -x + 1$, con $x \in [0; 1]$.

Verifichiamo che la funzione $f(x) = -x + 1$ soddisfa le condizioni date:

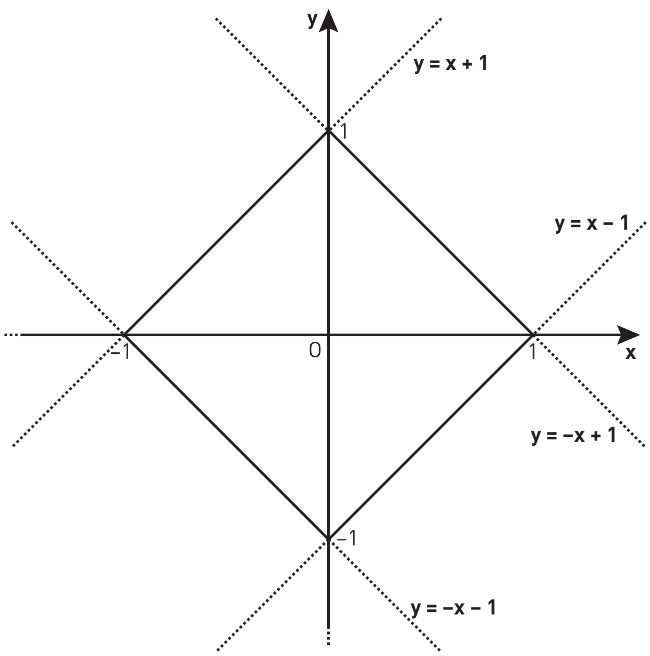
a) $f(0) = -0 + 1 = 1$;

b) $f(1) = -1 + 1 = 0$;

c) $0 < x < 1 \quad \rightarrow \quad -1 < -x < 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 1 < 1 - x < 1 + 0 \quad \rightarrow$
$0 < 1 - x < 1 \quad \rightarrow \quad 0 < f(x) < 1$.

La curva Λ in figura 1 si ottiene tracciando in ordine:

- il grafico Γ della funzione $y = -x + 1$, con $x \in [0; 1]$;
- il grafico simmetrico a Γ rispetto all'asse y, che corrisponde alla funzione di equazione $y = x + 1$, con $x \in [-1; 0]$;
- il grafico simmetrico a Γ rispetto all'asse x, la cui funzione associata ha equazione $y = x - 1$, con $x \in [0; 1]$;
- il grafico simmetrico a Γ rispetto all'origine O, la cui funzione associata ha equazione $y = -x - 1$, con $x \in [-1; 0]$.



Quindi troviamo:

$$\Lambda : \begin{cases} y = -|x| + 1, \text{ con } x \in [-1; 1] \text{ e } y \geq 0; \\ y = |x| - 1, \text{ con } x \in [-1; 1] \text{ e } y < 0; \end{cases}$$

che in modo più sintetico si può esprimere come $|y| = -|x| + 1$.

In forma implicita, l'equazione della curva Λ è allora:

$$|x| + |y| = 1.$$

Parte 2

Supponiamo che $y = f(x)$ sia una funzione polinomiale di secondo grado continua e derivabile su $\mathbb{R}$. Dunque il grafico è una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Imponiamo che verifichi le condizioni a) e b):

a) $f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1;$

b) $f(1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 0 \quad \rightarrow \quad a + b + c = 0;$

e l'ulteriore nuova condizione $f'(0) = 0$:

$$f'(x) = 2ax + b \quad \rightarrow \quad f'(0) = 2a \cdot 0 + b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0.$$

Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = -b - c \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}.$$

In conclusione, $f(x) = -x^2 + 1$.

La parabola ottenuta è simmetrica rispetto all'asse y, ha vertice in $(0; 1)$, concavità verso il basso e $f(1) = 0$, quindi anche la condizione c) è verificata.

Passiamo ora all'analisi della parte colorata. L'area dell'intera mattonella Q è pari a 4 e il 55% di 4 è $0,55 \cdot 4 = \frac{11}{5}$.

Vediamo se l'area grigia delimitata dal grafico della funzione $y = -x^2 + 1$ per $0 \leq x \leq 1$ e dalle curve simmetriche è pari a $\frac{11}{5}$.

Sfruttando le simmetrie della curva chiusa, l'area grigia si può ottenere calcolando l'integrale:

$$4 \int_0^1 \left(-x^2 + 1\right) \mathrm{d}x = 4 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = 4 \left[-\frac{1}{3} + 1\right] = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \neq \frac{11}{5}.$$

Quindi non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado.

Supponiamo ora che $y = f(x)$ sia una funzione polinomiale di terzo grado, quindi della forma

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

Imponiamo che la funzione verifichi le condizioni di costruzione a) e b):

a) $f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 1 \rightarrow d = 1;$

b) $f(1) = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 + d = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0;$

e l'ulteriore condizione $f'(0) = 0$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow f'(0) = 3a \cdot 0 + 2b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0.$$

Quindi:

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -1 - a \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Scriviamo l'equazione della cubica in funzione del parametro a:

$$y = ax^3 - (1 + a)x^2 + 1.$$

Per determinare a imponiamo che l'area grigia definita dalla polinomiale di terzo grado parametrica sia pari a $\frac{11}{5}$:

$$4\int_0^1 \left[ax^3 - (1 + a)x^2 + 1\right] \mathrm{d}x = \frac{11}{5} \rightarrow 4\left[\frac{a}{4}x^4 - \frac{1 + a}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{11}{5} \rightarrow$$

$$4\left[\frac{a}{4} - \frac{1 + a}{3} + 1\right] = \frac{11}{5} \rightarrow a = \frac{7}{5}.$$

Sostituendo il valore di a trovato otteniamo il seguente polinomio di terzo grado:

$$f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1.$$

Vediamo se questa funzione polinomiale di terzo grado verifica la condizione c): $0 < f(x) < 1$ per $0 < x < 1$.

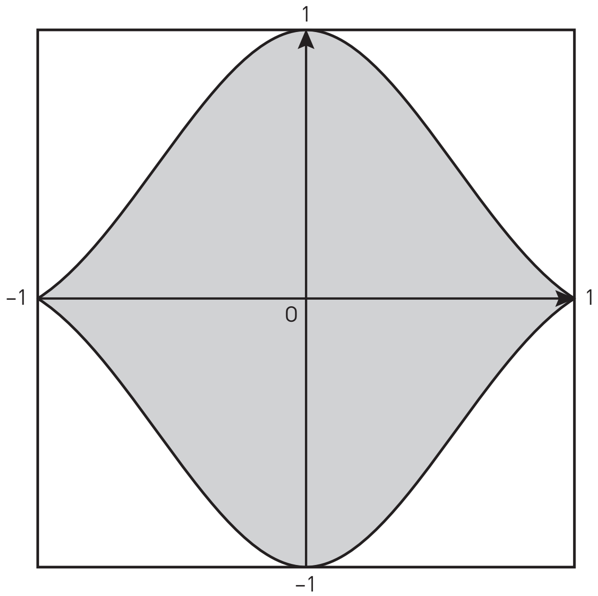
Osserviamo che $f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x$ e studiamone il segno:

$$f'(x) > 0 \rightarrow 7x^2 - 8x > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > \frac{8}{7}.$$

Ne segue che $f(x)$, nell'intervallo $[0; 1]$, è strettamente decrescente. Inoltre, poiché $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$, possiamo concludere che $0 < f(x) < 1$ per ogni $x \in]0; 1[$.

In conclusione, la funzione polinomiale di terzo grado trovata soddisfa tutte le condizioni richieste.

Per disegnare la mattonella risultante, usiamo le simmetrie rispetto agli assi e all'origine, analogamente a quanto fatto nella **parte 1**.



Parte 3

Verifichiamo che la famiglia di funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $x \in [0; 1]$ rispetta le condizioni a), b) e c).

a) $a_n(0) = 1 - 0^n = 1$;

b) $a_n(1) = 1 - 1^n = 0$;

c) $0 < x < 1 \to 0 < x^n < 1 \to -1 < -x^n < 0 \to 1 - 1 < 1 - x^n < 1 + 0 \to$
$0 < 1 - x^n < 1 \to 0 < a_n(x) < 1$.

Verifichiamo che anche la famiglia di funzioni $b_n(x) = (1 - x)^n$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $x \in [0; 1]$ rispetta le condizioni a), b) e c).

a) $b_n(0) = (1 - 0)^n = 1^n = 1$;

b) $b_n(1) = (1 - 1)^n = 0^n = 0$;

c) $0 < x < 1 \to -1 < -x < 0 \to 1 - 1 < 1 - x < 1 + 0 \to 0 < 1 - x < 1 \to$
$0 < (1 - x)^n < 1 \to 0 < b_n(x) < 1$.

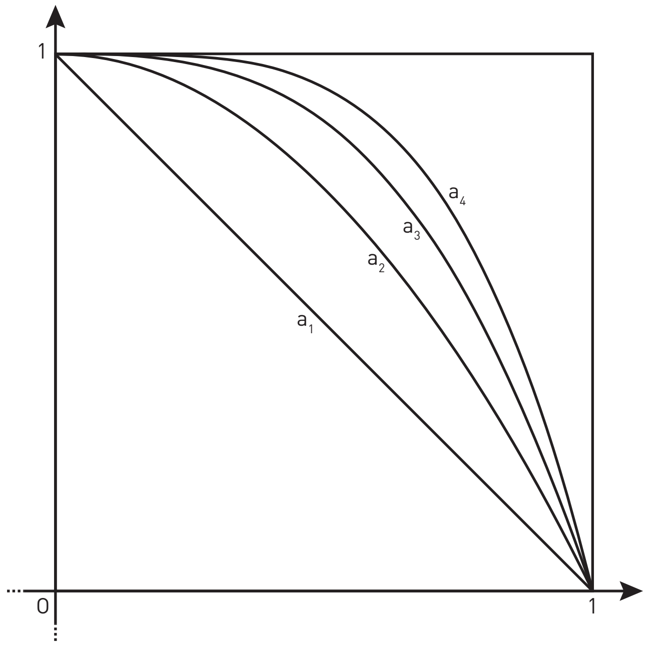
Sia ora

$$A(n) \;=\; 4\int_0^1 (1 - x^n)\,\mathrm{d}x = 4\left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{4n}{n+1}.$$

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n+1} = 4.$$

In termini geometrici, questo vuol dire che l'area $A(n)$, quando n tende all'infinito, tende all'area del quadrato Q. Quindi la *mattonella limite* risulta completamente grigia.



Sia invece

$$B(n) = 4\int_0^1 (1-x)^n \, dx.$$

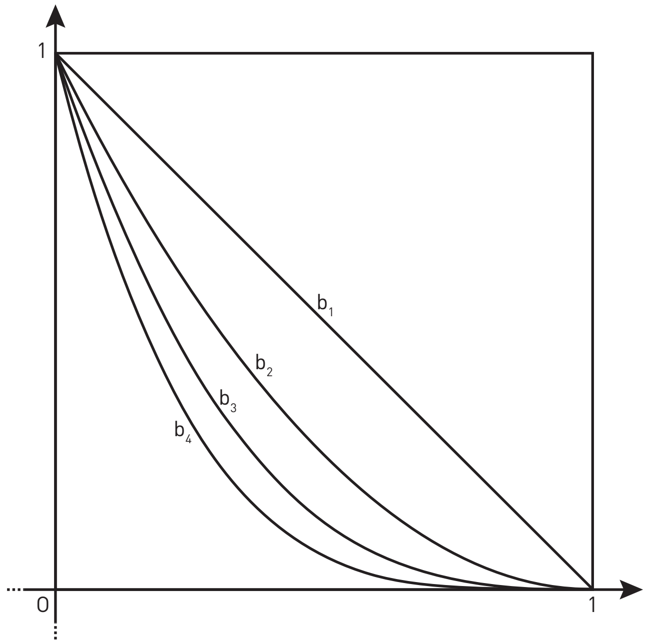
Ponendo $1 - x = t \rightarrow -dx = dt$, abbiamo:

$$B(n) \;=\; 4\int_1^0 -t^n \, dt = 4\int_0^1 t^n \, dt = 4\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{4}{n+1}.$$

Allora:

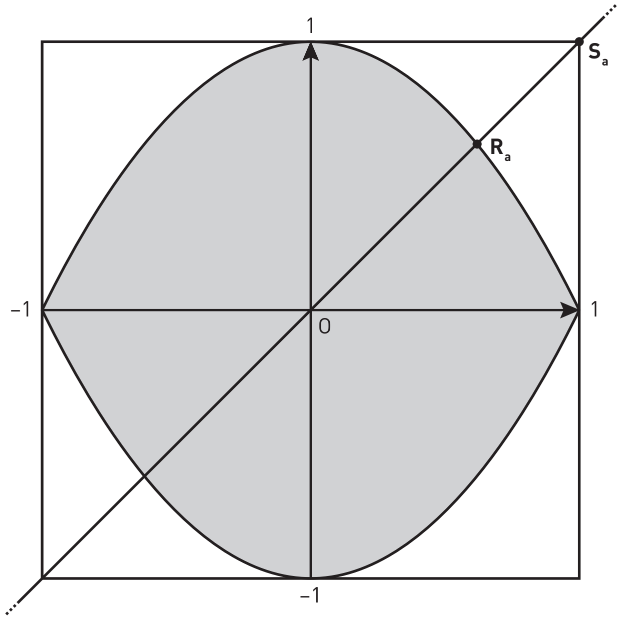
$$\lim_{n\to+\infty} B(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n+1} = 0.$$

In termini geometrici, questo vuol dire che l'area $B(n)$, quando n tende all'infinito, tende ad annullarsi. Quindi la *mattonella limite* risulta completamente bianca.

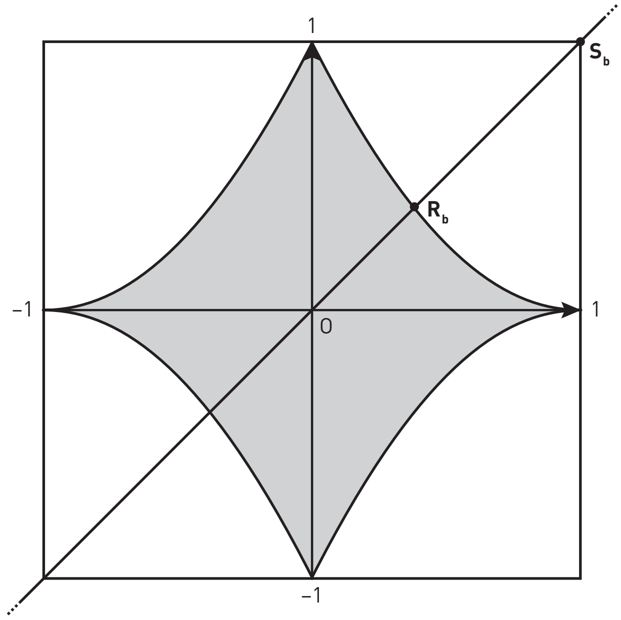


Parte 4

Consideriamo le funzioni $a_2(x) = 1 - x^2$ e $b_2(x) = (1 - x)^2$. Le mattonelle corrispondenti A_2 e B_2 sono rappresentate sotto, insieme alla diagonale lungo cui la macchina sorvola per tornare alla posizione iniziale dopo aver depositato il colore.



Mattonella A_2



Mattonella B_2

Nel caso in cui una goccia di colore cada in un punto della diagonale d di una mattonella A_2, la probabilità che cada sulla parte bianca è

$$P_a = 2 \cdot \frac{\overline{R_a S}}{d},$$

dove $d = 2\sqrt{2}$ e $S(1; 1)$.

Visto che

$$R_a : \begin{cases} y = x \\ y = 1 - x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x - 1 = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases},$$

si ha $R_a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Otteniamo allora che

$$P_a = \frac{2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{\sqrt{5}-1-2}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Analogamente

$$P_b = 2 \cdot \frac{\overline{R_b S}}{d},$$

dove

$$R_b : \begin{cases} y = x \\ y = (1-x)^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ 1 - 2x + x^2 = x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Vale:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

quindi $R_b\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Quindi:

$$P_b = \frac{2\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1\right)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{3-\sqrt{5}-2}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Se indichiamo con E_a, E_b gli eventi

E_a = «cade una goccia su una mattonella di tipo A_2»,

E_b = «cade una goccia su una mattonella di tipo B_2»,

le rispettive probabilità sono:

$$p(E_a) = p(E_b) = 20\% = \frac{1}{5}.$$

Quindi

$$P_a \cdot p(E_a) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3-\sqrt{5}}{10} \simeq 7,64\%$$

è la probabilità che una mattonella di tipo A_2 risulti danneggiata, mentre

$$P_b \cdot p(E_b) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{10} \simeq 12,36\%$$

è la probabilità che una mattonella di tipo B_2 risulti danneggiata.

Pertanto il numero di mattonelle danneggiate è circa

$$5000 \cdot 7,64\% + 5000 \cdot 12,36\% = 5000 \cdot 20\% = 1000.$$