Svolgimento del problema 2

2 **Parte 1**

Calcoliamo le equazioni delle rette r_k e s_k.

La retta r_k passa per il punto $(0; f_k(0))$ e ha come coefficiente angolare $f'_k(0)$. Si ha:

$$f_k(0) = 9; \qquad f'_k(x) = -3x^2 + k; \qquad f'_k(0) = k.$$

Ne segue che l'equazione di r_k è $y = kx + 9$.

La retta s_k passa per il punto $(1; f_k(1))$ e ha come coefficiente angolare $f'_k(1)$.

$$f_k(1) = -1 + k + 9 = k + 8$$
$$f'_k(1) = -3 + k$$

Dunque s_k ha equazione $y = (k-3)x + 11$.

Il punto M di intersezione tra r_k e s_k si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (k-3)x + 11 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad kx + 9 = (k-3)x + 11$$

Da quest'ultima equazione ricaviamo l'ascissa del punto M che vale $x_M = \frac{2}{3}$.

Parte 2

Dalla risoluzione del precedente sistema troviamo l'ordinata del punto M: $y_M = \frac{2}{3}k + 9$.

Studiamo per quali valori di k si ha $y_M < 10$:

$$\frac{2}{3}k + 9 < 10 \qquad \longrightarrow \qquad k < \frac{3}{2}.$$

Dunque il più grande k intero positivo che soddisfa la disequazione è proprio $k = 1$.

In corrispondenza di tale valore, la funzione ha equazione:

$$f_1(x) = -x^3 + x + 9$$

che, essendo un polinomio, è continua e derivabile per ogni valore reale.

Osserviamo che:

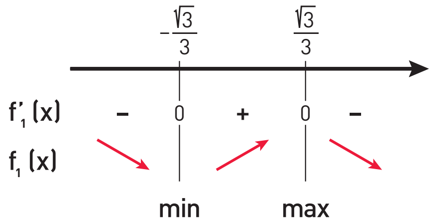
- $\lim_{x\to-\infty} \left(-x^3 + x + 9\right) = +\infty$;
- $\lim_{x\to+\infty} \left(-x^3 + x + 9\right) = -\infty$.

Quindi non ci sono né massimi né minimi assoluti.

La derivata prima per $k = 1$ è $f'_1(x) = -3x^2 + 1$. Studiamone il segno:

$$-3x^2 + 1 > 0 \qquad \longrightarrow \qquad -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

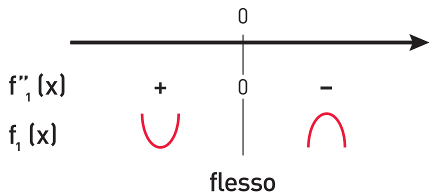
Il segno è riassunto nello schema.



Pertanto i punti stazionari sono:

- $P_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$, che è un punto di minimo relativo;
- $P_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$, che è un punto di massimo relativo.

Studiamo ora la derivata seconda $f_1''(x) = -6x$, il cui segno è riassunto nello schema.



Dunque il punto $F(0; 9)$ è un punto di flesso.

Osserviamo che esiste un unico punto di intersezione tra il grafico di f_1 e l'asse x. Infatti, dallo studio della derivata prima e dal calcolo dei limiti si può concludere che la curva non può intersecare l'asse x in nessun punto di ascissa minore di $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, perché le ordinate dei punti di massimo e minimo sono positive.

Sicuramente, invece, la curva intersecherà l'asse x in un unico punto di ascissa α maggiore di $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

α è la soluzione reale dell'equazione $-x^3 + x + 9 = 0$ e non è razionale. Possiamo trovarne un valore approssimato utilizzando il teorema degli zeri.

Innanzitutto osserviamo che:

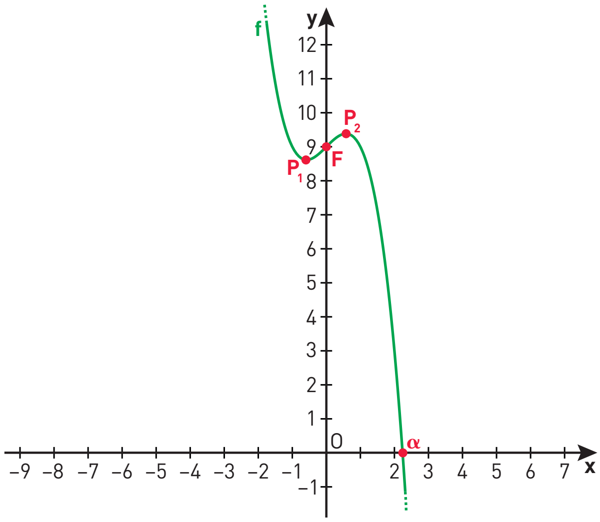
$$f_1(2) = 3 > 0 \quad \text{e} \quad f_1(3) = -15 < 0 \quad \rightarrow \quad 2 < \alpha < 3.$$

Analogamente troviamo che:

$$f_1(2{,}2) > 0 \quad \text{e} \quad f_1(2{,}3) < 0 \quad \rightarrow \quad 2{,}2 < \alpha < 2{,}3.$$

Essendo $f_1(2{,}25) < 0$, possiamo concludere che $\alpha \simeq 2{,}2$.

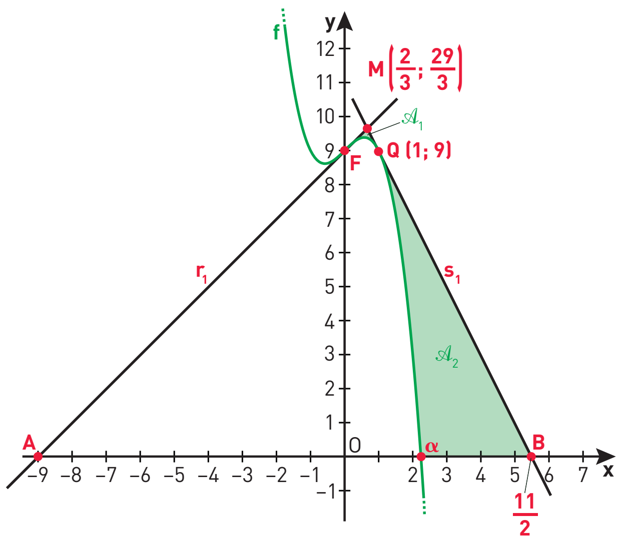
Rappresentiamo il grafico Γ_1 di f_1.



Parte 3

La retta r_1 ha equazione $y = x + 9$, interseca l'asse x nel punto $A(-9; 0)$ e la curva Γ_1 in $(0; 9)$.

La retta s_1 ha equazione $y = -2x + 11$, interseca l'asse x nel punto $B\left(\frac{11}{2}; 0\right)$, la retta r_1 nel punto $M\left(\frac{2}{3}; \frac{29}{3}\right)$ ed è tangente a Γ_1 nel punto $Q(1; 9)$.



La probabilità richiesta p è il rapporto tra la somma delle aree $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ delle regioni piane evidenziate in figura e l'area del triangolo ABM.

L'area del triangolo ABM è:

$$\mathscr{A}_{ABM} = \frac{\overline{AB} \cdot y_M}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2} + 9\right) \cdot \frac{29}{3} = \frac{841}{12}.$$

Calcoliamo $\mathscr{A}_1$ come somma di due integrali:

$$\mathscr{A}_1 = \int_0^{\frac{2}{3}} \left[x + 9 - \left(-x^3 + x + 9\right)\right] \mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left[-2x + 11 - \left(-x^3 + x + 9\right)\right] \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(x^3 - 3x + 2\right) \mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{4}{81} + \frac{11}{324} = \frac{1}{12}.$$

Anche per il calcolo di $\mathscr{A}_2$ dobbiamo sommare due integrali definiti:

$$\mathscr{A}_2 = \int_1^{\alpha} \left[-2x + 11 - \left(-x^3 + x + 9\right)\right] \mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{\frac{11}{2}} (-2x + 11)\, \mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_1^{\alpha} + \left[-x^2 + 11x\right]_{\alpha}^{\frac{11}{2}} =$$

$$\left(\frac{\alpha^4}{4} - \frac{3}{2}\alpha^2 + 2\alpha - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{121}{4} + \alpha^2 - 11\alpha\right) =$$

$$\frac{\alpha^4}{4} - \frac{\alpha^2}{2} - 9\alpha + \frac{59}{2}.$$

Sostituiamo α con il suo valore approssimato 2,2; otteniamo così $\mathscr{A}_2 \simeq 13{,}14$.
L'area della regione del triangolo ABM che contiene i punti che si trovano al di sopra di Γ_1 è:

$$\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 \simeq 13{,}22.$$

In conclusione, la probabilità p richiesta è:

$$p = \frac{\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2}{\mathscr{A}_{ABM}} \simeq \frac{13{,}22}{\frac{841}{12}} \simeq 0{,}19 \quad \to \quad p \simeq 19\%.$$

Parte 4

Consideriamo una generica funzione polinomiale di grado n,

$$y = p_n(x),$$

la cui derivata $y' = p_n'(x)$ ha grado $n - 1$.
Preso sulla curva un generico punto $A\,(a; p_n(a))$, il coefficiente angolare della perpendicolare alla tangente alla curva in A è $-\dfrac{1}{p_n'(a)}$, con $p_n'(a) \neq 0$. Quindi l'equazione della retta normale considerata è:

$$y - p_n(a) = -\frac{1}{p_n'(a)}(x - a).$$

Imponendo il passaggio per l'origine, si ottiene l'equazione:

$$-p_n(a) = -\frac{1}{p_n'(a)} \cdot (-a) \quad \rightarrow \quad -p_n(a) \cdot p_n'(a) = a.$$

L'equazione ottenuta è un'equazione polinomiale che ha per grado la somma dei gradi di p_n e p_n', ovvero $n + n - 1$, cioè $2n - 1$.

Quindi, per il teorema fondamentale dell'algebra, tale equazione non può avere più di $2n - 1$ soluzioni reali.

Osserviamo che il fascio di rette normali non contiene la retta parallela all'asse y, per la quale il coefficiente angolare non è definito. Potremmo dunque ipotizzare che ci possa essere un'ulteriore soluzione, che potrebbe aggiungersi al valore massimo $2n - 1$. Verifichiamo che non è così, infatti nel caso in cui $p_n'(a) = 0$, la retta tangente nel punto A è parallela all'asse x, mentre la normale è parallela all'asse y. Tale normale passa per l'origine solo se coincide con l'asse y ovvero se $a = 0$. Se $p_n'(a) = 0$ e $a = 0$ è comunque verificata l'equazione $-p_n(a) \cdot p_n'(a) = a$ trovata in precedenza. Concludiamo quindi che le sue soluzioni sono al più $2n - 1$ in quanto tale soluzione particolare, se c'è, è già inclusa nelle precedenti.

