Svolgimento del quesito 3

3 Per lo svolgimento di questo quesito proponiamo due metodi.

Metodo 1

Per determinare le ascisse degli eventuali punti di tangenza tra la retta $y = -4x + k$ e il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, poniamo la derivata di $f(x)$ uguale al coefficiente angolare della retta:

$$f'(x) = -4 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 8x = -4 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3} \ \vee \ x_2 = 2.$$

Poiché

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 = \frac{95}{27}$$

e

$$f(2) = 8 - 4 \cdot 4 + 5 = -3,$$

i punti di tangenza sono $T_1\left(\frac{2}{3};\ \frac{95}{27}\right)$ e $T_2\,(2;\ -3)$.

Sostituendo nell'equazione della retta, troviamo i corrispondenti valori di k.

$$T_1: \qquad \frac{95}{27} = -4 \cdot \frac{2}{3} + k \quad \rightarrow \quad k = \frac{167}{27}.$$

$$T_2: \qquad -3 = -4 \cdot 2 + k \quad \rightarrow \quad k = 5.$$

I valori di k richiesti sono dunque:

$$k = \frac{167}{27} \quad \vee \quad k = 5.$$

Metodo 2

In generale, due curve di equazione $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono tangenti in un punto se le due funzioni assumono lo stesso valore in quel punto e se, in tale punto, i grafici hanno la stessa tangente. Queste condizioni portano a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}.$$

Nel caso in esame:

$$f(x) = -4x + k;$$

$g(x) = x^3 - 4x^2 + 5.$

Risolviamo il sistema corrispondente nelle incognite x e k:

$$\begin{cases} -4x + k = x^3 - 4x^2 + 5 \\ -4 = 3x^2 - 8x \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 4x + 5 - k = 0 \\ 3x^2 - 8x + 4 = 0 \end{cases}.$$

Risolviamo le seconda equazione:

$$3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \to \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} \quad \to \quad x_1 = \frac{2}{3} \quad \vee \quad x_2 = 2.$$

Se sostituiamo $x = \dfrac{2}{3}$ nella prima equazione otteniamo:

$$\frac{8}{27} - 4 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 5 - k = 0 \quad \to \quad k = \frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3} + 5 \quad \to \quad k = \frac{167}{27}.$$

Se sostituiamo invece $x = 2$ nella prima equazione otteniamo:

$$8 - 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 - k = 0 \quad \to \quad k = 8 - 16 + 8 + 5 \quad \to \quad k = 5.$$

Riassumendo:

- per $k = \frac{167}{27}$ la retta e la curva sono tangenti nel punto di ascissa $x = \frac{2}{3}$;
- per $k = 5$ la retta e la curva sono tangenti nel punto di ascissa $x = 2$.

