Svolgimento del quesito 4

4 La funzione

$$f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$$

è trascendente fratta. Il denominatore è sempre diverso da 0 per ogni valore di x poiché

$$5 + e^{-x} - \cos x \geq 5 + e^{-x} - 1 = 4 + e^{-x} > 0.$$

Anche il numeratore è definito per ogni x reale.

Il dominio della funzione è quindi $\mathbb{R}$ ed è possibile calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Determiniamo $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x}$$

risulta una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ perché

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3x - e^{\sin x}\right) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \left(5 + e^{-x} - \cos x\right) = +\infty.$$

La funzione $f(x)$ verifica le condizioni del teorema di De l'Hospital e quindi

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \cos x \, e^{\sin x}}{-e^{-x} + \sin x}.$$

Il numeratore è una funzione limitata non nulla poiché vale

$$3 - e \leq 3 - \cos x \, e^{\sin x} \leq 3 + e.$$

Inoltre il denominatore diverge negativamente:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-e^{-x} + \sin x\right) = -\infty.$$

Quindi il limite del rapporto esiste ed è nullo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \cos x \, e^{\sin x}}{-e^{-x} + \sin x} = 0.$$

Determiniamo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Il numeratore diverge positivamente in quanto

$$\lim_{x \to +\infty} \left(3x - e^{\sin x}\right) = +\infty,$$

mentre il denominatore è una funzione limitata superiormente per $x \to +\infty$:

$$5 + e^{-x} - \cos x \leq 5 + 1 + 1 = 7 \qquad \text{per } x \geq 0.$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} \geq \frac{3x - e^{\sin x}}{7} \qquad \text{per } x \geq 0$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{7} = +\infty.$$

Per il teorema del confronto vale allora:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

