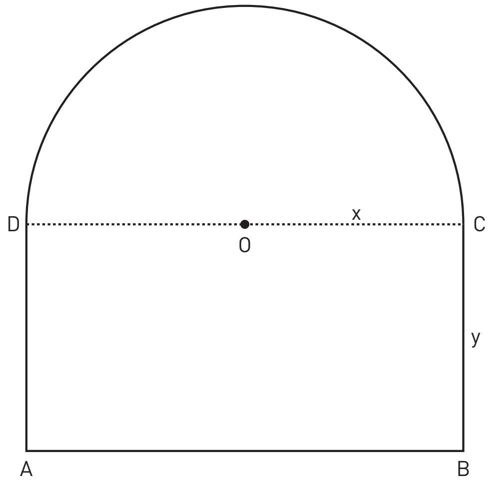
ESAME DI STATO 2018 ◇ PROVA DI MATEMATICA

Svolgimento del quesito 5

5 Consideriamo la figura $ABCD$ mistilinea formata dal rettangolo $ABCD$ e dal semicerchio di centro O.



Indichiamo con x la misura del raggio OC e con y quella del segmento BC. Calcoliamo il perimetro $2p$ della suddetta figura:

$$2p = 2\overline{OC} + 2\overline{BC} + \pi\overline{OC} = 2x + 2y + \pi x.$$

Imponiamo tale perimetro uguale a 2 (omettiamo per il momento l'unità di misura) e ricaviamo la variabile y:

$$2x + 2y + \pi x = 2 \quad \rightarrow \quad y = 1 - \frac{2+\pi}{2}x.$$

Poiché x e y sono misure di segmenti, deve essere $x > 0$ e $y > 0$, da cui:

$$x > 0,\ 1 - \frac{2+\pi}{2}x > 0 \quad \rightarrow \quad 0 < x < \frac{2}{2+\pi}.$$

Calcoliamo l'area della figura mistilinea, che dipende da x:

$$\text{Area}(x) = \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \frac{\pi\,\overline{OC}^2}{2} = 2xy + \frac{\pi}{2}x^2.$$

Sostituendo a y l'espressione in funzione di x troviamo:

$$\text{Area}(x) = 2x\left(1 - \frac{2+\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}x^2 = 2x - (2+\pi)x^2 + \frac{\pi}{2}x^2 = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2x.$$

La funzione Area(x) è un polinomio di secondo grado il cui grafico corrisponde a una parabola con concavità rivolta verso il basso. Il suo valore massimo è assunto in corrispondenza del vertice V di ascissa $x_V = -\frac{b}{2a}$:

$$x_V = -\frac{2}{2 \cdot \left[-\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right]} = \frac{2}{4+\pi}.$$

Questo valore di x consente di recintare la superficie di area massima; le corrispondenti dimensioni del rettangolo $ABCD$ sono:

$$\overline{AB} = 2x_V = 2 \cdot \frac{2}{4+\pi} = \frac{4}{4+\pi} \simeq 0,56;$$

$$\overline{BC} = y_V = 1 - \frac{2+\pi}{2}x_V = 1 - \frac{2+\pi}{2} \cdot \frac{2}{4+\pi} = 1 - \frac{2+\pi}{4+\pi} = \frac{2}{4+\pi} \simeq 0,28.$$

Le dimensioni del rettangolo sono dunque approssimativamente 0,56 m e 0,28 m.