Svolgimento del quesito 8

8 Supponiamo che non sia possibile pareggiare nella singola partita.

Chiamiamo A e B i due giocatori. Poiché hanno la stessa probabilità di vincere ogni partita, questa è $\frac{1}{2}$.

Calcoliamo la probabilità che A vinca il gioco in al più 12 partite.

I possibili risultati sono: 10-0 (A vince 10 partite, B vince 0 partite), 10-1 e 10-2.

Indichiamo questi tre eventi con A_1, A_2 e A_3.

Il gioco si può modellizzare con lo schema delle prove ripetute, dove la probabilità di successo è $\frac{1}{2}$ ed è uguale alla probabilità di insuccesso.

Affinché si verifichi A_1, il giocatore A deve vincere 10 partite di seguito, quindi:

$$p(A_1) = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{2^{10}}.$$

Affinché si verifichi A_2, A deve perdere una sola partita tra le prime 10 e vincere l'undicesima. La probabilità è quindi:

$$p(A_2) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2^{11}}.$$

Affinché si verifichi A_3, A deve perdere due partite tra le prime 11 e vincere la dodicesima. Quindi:

$$p(A_3) = \binom{11}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot \frac{1}{2^{12}} = 55 \cdot \frac{1}{2^{12}}.$$

Poiché gli eventi A_1, A_2 e A_3 sono incompatibili, la probabilità che vinca A in al più 12 partite è:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = \frac{1}{2^{10}} + 10 \cdot \frac{1}{2^{11}} + 55 \cdot \frac{1}{2^{12}} = \frac{4 + 20 + 55}{2^{12}} = \frac{79}{2^{12}}.$$

Per simmetria, la probabilità che B vinca il gioco in al più 12 partite è la stessa di A.

La probabilità che uno dei due giocatori vinca il gioco in al più 12 partite è:

$$2 \cdot \frac{79}{2^{12}} = \frac{79}{2^{11}} \simeq 0,039 \rightarrow \text{circa } 3,9\%.$$

© Zanichelli 2018