Svolgimento del quesito 9

9 Per verificare che il triangolo è equilatero, calcoliamo le misure dei lati.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$\sqrt{(3-3)^2 + (-1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} =$$

$$\sqrt{(1-3)^2 + (1+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2} =$$

$$\sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Poiché $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, il triangolo ABC è equilatero.

Per tre punti non allineati passa un solo piano dello spazio, dunque il triangolo ABC appartiene al piano α se e solo se i suoi vertici sono punti del piano. Verifichiamolo.

Punto A : $\quad x_A + y_A + z_A - 4 \overset{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 3 + 1 + 0 - 4 \overset{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad$ vero.

Punto B : $\quad x_B + y_B + z_B - 4 \overset{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 3 - 1 + 2 - 4 \overset{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad$ vero.

Punto C : $\quad x_C + y_C + z_C - 4 \overset{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad 1 + 1 + 2 - 4 \overset{?}{=} 0 \quad \rightarrow \quad$ vero.

Il vertice P del tetraedro appartiene alla retta r passante per il baricentro G del triangolo ABC e perpendicolare al piano α. Le coordinate del baricentro sono:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right) \quad \rightarrow$$

$$G\left(\frac{3+3+1}{3}; \frac{1-1+1}{3}; \frac{0+2+2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad G\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Poiché α ha equazione $x + y + z - 4 = 0$, la direzione di r è data dal vettore $(l; m; n) = (1; 1; 1)$, formato dai coefficienti di x, y e z. La retta r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_G + lt \\ y = y_G + mt \\ z = z_G + nt \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} + t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Il punto P appartiene a r, quindi le sue coordinate sono del tipo

$$P\left(\frac{7}{3}+t;\ \frac{1}{3}+t;\ \frac{4}{3}+t\right).$$

Possiamo procedere in quattro modi.

Metodo 1

Poniamo $\overline{PA}=\overline{AB}$, che equivale a $\overline{PA}^2=\overline{AB}^2$.

$$\overline{PA}^2=\left(\frac{7}{3}+t-3\right)^2+\left(\frac{1}{3}+t-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}+t-0\right)^2$$

$$\overline{AB}^2=8$$

$$\left(-\frac{2}{3}+t\right)^2+\left(-\frac{2}{3}+t\right)^2+\left(\frac{4}{3}+t\right)^2=8$$

Risolviamo l'equazione nell'incognita t.

$$\frac{4}{9}+t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}+t^2-\frac{4}{3}t+\frac{16}{9}+t^2+\frac{8}{3}t=8 \quad \rightarrow$$

$$3t^2+\frac{24}{9}=8 \quad \rightarrow \quad t^2=\frac{16}{9} \quad \rightarrow \quad t_{1,2}=\pm\frac{4}{3}.$$

Se $t_1=\frac{4}{3}$, $\quad P_1\left(\frac{7}{3}+\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}+\frac{4}{3};\ \frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right) \quad \rightarrow \quad P_1\left(\frac{11}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{8}{3}\right).$

Se $t_2=-\frac{4}{3}$, $\quad P_2\left(\frac{7}{3}-\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right) \quad \rightarrow \quad P_2\,(1;\ -1;\ 0).$

Metodo 2

Calcoliamo $\overline{PG}$ con il teorema di Pitagora:

$$\overline{PG}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AG}^2}.$$

$ABCP$ è un tetraedro regolare, quindi deve essere $\overline{AP}=\overline{AB}=2\sqrt{2}$. Determiniamo $\overline{AG}^2$:

$$\overline{AG}^2=\left(\frac{7}{3}-3\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}-0\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}.$$

Dunque:

$$\overline{PG}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AG}^2}=\sqrt{8-\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

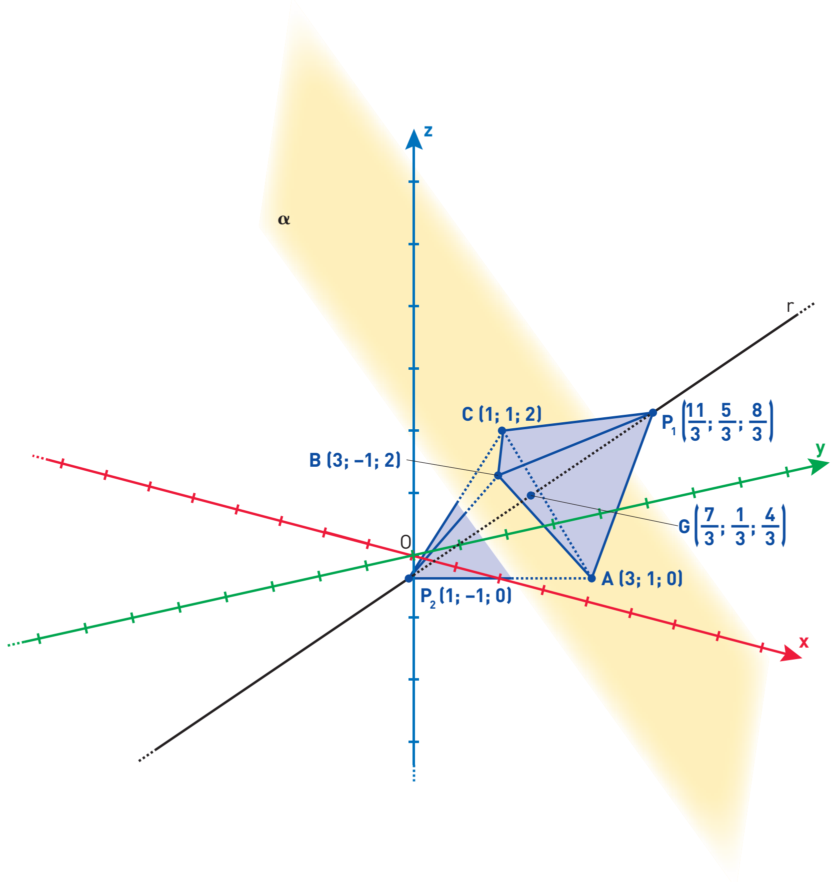
La distanza di P dal piano α è:

$$\frac{\left|\frac{7}{3}+t+\frac{1}{3}+t+\frac{4}{3}+t-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|3t|}{\sqrt{3}}.$$

Questa distanza deve essere uguale a $\overline{PG}$, cioè:

$$\frac{|3t|}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}} \quad\rightarrow\quad |3t|=4 \quad\rightarrow\quad 3t=\pm 4 \quad\rightarrow\quad t_1=\frac{4}{3},\ t_2=-\frac{4}{3}.$$

Le coordinate dei punti P_1 e P_2 si determinano come nel **metodo 1**.



Metodo 3

Consideriamo il generico punto $P(x; y; z)$.

Affinché il tetraedro sia regolare, deve essere $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{AB}$, ovvero $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2=\overline{AB}^2$. Ciò si traduce nel sistema:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=8\\(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=8\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=8.\end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono due soluzioni, che corrispondono alle coordinate dei punti P_1 e P_2 trovati nei metodi precedenti.

Metodo 4

Consideriamo il generico punto $P(x; y; z)$.

In un tetraedro regolare, l'altezza del triangolo di base deve essere congruente alle altezze delle facce laterali. Poiché le facce sono triangoli equilateri, le altezze coincidono con le mediane.

Chiamiamo M, N, Q i punti medi di AB, BC, CA. Le loro coordinate sono:

$$M(3; 0; 1) \qquad N(2; 0; 2) \qquad Q(2; 1; 1).$$

Calcoliamo $\overline{CM}$:

$$\overline{CM} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

Deve essere $\overline{PM} = \overline{PN} = \overline{PQ} = \overline{CM}$, ovvero $\overline{PM}^2 = \overline{PN}^2 = \overline{PQ}^2 = \overline{CM}^2$.

Dal sistema

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 6 \\ (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 6 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6 \end{cases}$$

si ottengono le stesse coordinate dei punti P_1 e P_2 trovati nei metodi precedenti.