# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
## Sessione ordinaria

**Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.**

### PROBLEMA 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali $x$, $y$:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove $a$ è un parametro reale positivo.

a) Esprimere $y$ in funzione di $x$ e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ($Oxy$).

b) Determinare per quali valori di $a$ la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta $t$ di equazione

$$x+y=4.$$

c) Scrivere l'equazione della circonferenza $k$ che ha il centro nel punto di coordinate (1; 1) e intercetta sulla retta $t$ una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da $k$ è diviso dalla retta $t$.

e) Determinare per quale valore del parametro $a$ il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza $k$.

### PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo $ABC$, siano $D$ ed $E$ due punti interni al lato $BC$ tali che:

$$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}.$$

Siano poi $M$ ed $N$ i punti medi rispettivamente dei segmenti $AD$ ed $AE$.

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo $ABC$.

b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove $a$ è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB}=13a$, $\overline{BC}=15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta $BC$ e passante per i punti $M$, $N$, $C$.

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo $ADC$.

## QUESTIONARIO

**1** Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to l$ per $x \to a$, essendo $l$ ed $a$ numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

**2** Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$.
Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x)\, dt}{2xe^x},$$

dove $e$ è la base dei logaritmi naturali.

**3** Si consideri il cubo di spigoli $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'D'C'$. Sia $E$ il punto medio dello spigolo $AB$. I piani $ACC'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

**4** Un tronco di piramide ha basi di aree $B$ e $b$ ed altezza $h$. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume $V$ è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h \left(B + b + \sqrt{Bd}\right).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

**5** Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni $x$ di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

**6** Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove $n$, $k$ sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

**7** Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

A) area massima e perimetro massimo;

B) area massima e perimetro minimo;

C) area minima e perimetro massimo;

D) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

**8** Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove $a$ è un parametro reale non nullo, determinare i valori di $a$ per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

**9** Il limite della funzione $\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando $x$ tende a $+\infty$,

A) è uguale a 0;

B) è uguale ad 1;

C) è un valore diverso dai due precedenti;

D) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

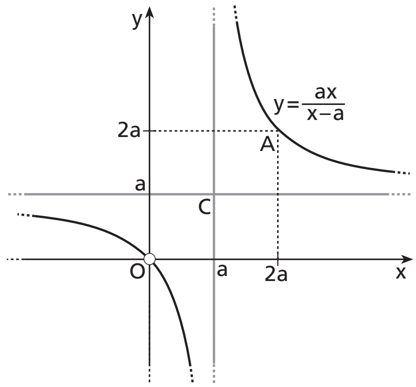
**10** Si consideri la funzione $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hospital.

---

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## PROBLEMA 1

**a)** Posto $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la relazione $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ diventa $ay+ax=xy$ da cui $y=\frac{ax}{x-a}$. La funzione da studiare è $y=\frac{ax}{x-a}$ con dominio $x \neq 0 \wedge x \neq a$. Si tratta di una funzione omografica il cui grafico è un'iperbole equilatera con asintoti $x=a$ e $y=a$, centro di simmetria $C(a;\ a)$ e vertici $A(2a;\ 2a)$, $O(0;\ 0)$. In quest'ultimo punto la funzione non è però definita e presenta una discontinuità di terza specie con $x \to 0 \frac{ax}{x-a}$. Si può tracciare il grafico (figura 1) nel quale il valore di $a$ è stato scelto in maniera arbitraria.




▲ **Figura 1.**

**b)** Si valuta la posizione reciproca tra la funzione e la retta discutendo il sistema $\begin{cases} y=\frac{ax}{x-a} \\ x+y=4 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è $x^2-4x+4a=0$; essa ammette soluzioni reali se e solo se il discriminante è positivo o nullo. Poiché $\frac{\Delta}{4}=4-4a$, risulta $4-4a \geq 0$ per $a \leq 1$.

Pertanto la retta $t$ è secante per $a<1$, è tangente per $a=1$.

**c)** La circonferenza $k$ ha centro $C'(1;\ 1)$ noto e raggio incognito. Si tracci la perpendicolare $C'H$ alla retta $t$ (figura 2). Per un teorema della geometria euclidea, tale perpendicolare divide a metà la corda $BD$ che la circonferenza stacca sulla retta. La distanza del punto $C'(1;\ 1)$ dalla retta $x+y=4$ vale:

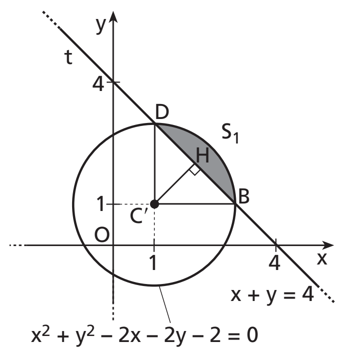
$$\overline{C'H}=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2},$$

mentre $\overline{HB}=\frac{\overline{BD}}{2} \to \overline{HB}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $BC'H$, risulta $\overline{C'B}=2$. Esso è il raggio cercato.

L'equazione della circonferenza $k$ è:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \text{ ovvero } x^2+y^2-2x-2y-2=0.$$




▲ **Figura 2.**

**d)** Ponendo a sistema l'equazione della circonferenza $k$ e la retta $t$ si trovano le coordinate dei punti $B$ e $D$:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-2=0 \\ x+y=4 \end{cases} \to B\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases};\ D\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

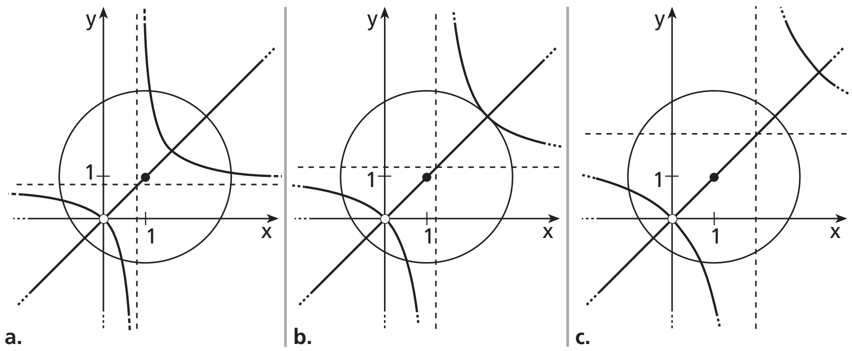
Valutando le coordinate dei punti $C'$, $B$ e $D$ si osserva che i segmenti $C'B$ e $C'D$ sono rispettivamente paralleli agli assi cartesiani e quindi tra loro perpendicolari. Pertanto il settore circolare delimitato dall'angolo $B\hat{C}'D$ è la quarta parte del cerchio corrispondente alla circonferenza. Indicata con $S_1$ l'area del minore dei segmenti circolari in cui la retta $t$ divide la circonferenza $k$, essa si ottiene per differenza tra l'area del settore e l'area del triangolo $C'BD$.

$$S_1 = \frac{\pi(2)^2}{4} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2.$$

L'area $S_2$ del restante segmento circolare si ricava per differenza tra l'area del cerchio e $S_1$:

$$S_2 = \pi(2)^2 - (\pi - 2) = 3\pi + 2.$$

**e)** La risoluzione è compiuta per via geometrica poiché la discussione algebrica della tangenza tra circonferenza e iperbole porterebbe a un sistema di quarto grado difficilmente risolvibile per via elementare. Nella figura 3 sono rappresentate le possibili posizioni dell'iperbole parametrica rispetto alla circonferenza.




◀ **Figura 3.**

Si osserva che entrambe le curve sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante: nella circonferenza il centro si trova sulla bisettrice che è pertanto diametro e quindi asse di simmetria della circonferenza; nell'iperbole la retta $x = y$ costituisce l'asse trasverso dell'iperbole stessa e pertanto è asse di simmetria. Ne consegue che i punti di intersezione tra le due curve sono a due a due simmetrici rispetto all'asse di simmetria $y = x$. Nel caso della tangenza due di questi punti devono coincidere e quindi trovarsi sulla bisettrice. Si trova il punto di tangenza $T$ (figura 3b) risolvendo il sistema:

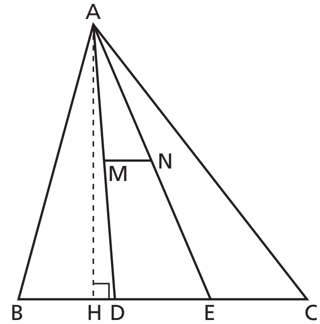
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \text{(non accettabile)} \vee \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

Si impone all'iperbole $x = \dfrac{ax}{x - a}$ il passaggio per il punto $T(1 + \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2})$:

$$1 + \sqrt{2} = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2} - a} \rightarrow (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - a) = a(1 + \sqrt{2}) \rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

L'iperbole è tangente alla circonferenza $k$ per $a = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

## PROBLEMA 2




▲ **Figura 4.**

**a)** Compiuta la costruzione (figura 4), si applica una proprietà conseguenza del teorema di Talete al triangolo $ADE$: una retta, che determina su due lati di un triangolo segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato. Pertanto, essendo $AM : MD = AN : NE = 1$, $MN$ è parallelo a $BC$ e il quadrilatero $DENM$ è un trapezio. I triangoli $AMN$ e $ADE$ sono simili per il primo criterio e il rapporto di similitudine vale $\dfrac{1}{2}$. Ne consegue che il rapporto tra le aree risulta $\dfrac{1}{4}$, quindi: $S_{AMN} = \dfrac{1}{4} S_{ADE}$ e quindi $S_{DENM} = \dfrac{3}{4} S_{ADE}$.
Osservando i tre triangoli $ABD$, $ADE$ e $AEC$, in cui è diviso il triangolo $ABC$, essi hanno base e altezza rispettivamente congruenti. Sono quindi

equivalenti. Si può scrivere allora $S_{ADE} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, che, sostituita all'ultima relazione trovata, porta all'espressione:

$$S_{DENM} = \frac{3}{4} S_{ADE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

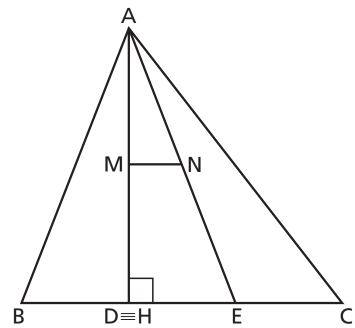
**b)** Poiché l'area del quadrilatero *DENM* è un quarto dell'area del triangolo *ABC*, quest'ultimo ha superficie $90a^2$. Si può ricavare l'altezza *AH*:

$$\overline{AH} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{AH} = \frac{2 \cdot 90a^2}{15a} = 12a.$$

Si applichi il teorema di Pitagora al triangolo *ABH*:

$$\overline{BH} = \sqrt{AB^2 - AH^2} \rightarrow \overline{BH} = \sqrt{169a^2 - 144a^2} = 5a.$$

Risulta $\overline{BH} = \frac{1}{3} \overline{BC}$ e quindi $H \equiv D$. Il trapezio *DENM* è dunque rettangolo (figura 5).




▲ **Figura 5.**

**c)** Si ponga un sistema di assi cartesiani come nella figura 6, con $O \equiv C$.
Dai dati geometrici precedenti le coordinate dei punti sono:

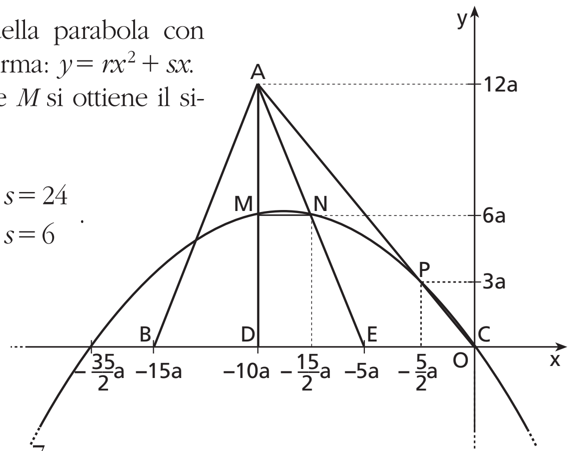
$$A(-10a; 12a),\ M(-10a; 6a),\ N\left(-\frac{15}{2}a; 6a\right),\ B(-15a; 0),\ D(-10a; 0) \text{ e } E(-5a; 0).$$

Vista la scelta del sistema cartesiano l'equazione della parabola con asse di simmetria perpendicolare al lato *BC* è della forma: $y = rx^2 + sx$.
Imponendo alla funzione il passaggio per i punti *N* e *M* si ottiene il sistema a due incognite:

$$\begin{cases} 6a = r\left(-\frac{15}{2}a\right)^2 + s\left(-\frac{15}{2}a\right) \\ 6a = r(-10a)^2 + s(-10a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 225a \cdot r - 30 \cdot s = 24 \\ 100a \cdot r - 10 \cdot s = 6 \end{cases}.$$

Risolvendo si ricava la soluzione $\begin{cases} r = -\frac{2}{25a} \\ s = -\frac{7}{5} \end{cases}$.

L'equazione della parabola è pertanto: $y = -\frac{2}{25a}x^2 - \frac{7}{5}x$.
Nella figura 6 è tracciata la parabola.




▲ **Figura 6.**

**d)** Osservando la figura 6, si nota che la curva interseca il segmento *AC* oltre che nel punto $O(0; 0)$ anche in un ulteriore punto *P*, di cui è necessario calcolare le coordinate.

La retta passante per *A* e *C* ha equazione $y = -\frac{6}{5}x$.

Il sistema $\begin{cases} y = -\frac{6}{5}x \\ y = -\frac{2}{25a}x^2 - \frac{7}{5}x \end{cases}$ ha soluzioni $(0; 0)$ e $P\left(-\frac{5}{2}a; 3a\right)$.

Si calcolano le aree delle figure mistilinee in cui la parabola divide il triangolo *ADC* attraverso l'integrazione definita.

$$S_{AMP} = \int_{-10a}^{-\frac{5}{2}a} \left[-\frac{6}{5}x - \left(-\frac{2}{25a}x^2 - \frac{7}{5}x\right)\right]dx = \left[\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{75a}x^3\right]_{-10a}^{-\frac{5}{2}a} = \frac{5}{24}a^2 + \frac{50}{3}a^2 = \frac{135}{8}a^2.$$

L'area rimanente $S_{MPCD}$, che si trova sotto alla parabola, si calcola per differenza tra l'area del triangolo $ADC$ e l'area $S_{AMP}$:

$$S_{MPCD} = \frac{1}{2} \cdot 10a \cdot 12a - \frac{135}{8} a^2 = \frac{345}{8} a^2.$$

## QUESTIONARIO

**1** Se esiste finito il limite $\lim_{x \to a} f(x) = l$, ciò è insufficiente per affermare che l'immagine della funzione nel punto $x = a$ vale $f(a) = l$. Infatti, nelle ipotesi, non è noto che il punto $a$ appartenga al dominio della funzione. Tale punto potrebbe essere soltanto un punto di accumulazione del dominio.

È il caso, per esempio, della funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Essa non è definita nel punto $x = 2$ ma esiste il limite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$. Il punto in questione è di discontinuità di terza specie.

Diversamente, qualora il valore  appartenga al dominio della funzione $f$, può essere che $f(a) \neq l$.

Per esempio, la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ ammette limite $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ ma ciò è diverso dall'immagine $f(2) = 1$.

Si tratta ancora di un punto di discontinuità di terza specie.

**2** Partendo dal numeratore della frazione di cui è richiesto il calcolo del limite, poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$, si può applicare il teorema della media integrale alla funzione $f$ nell'intervallo $[0; x]$:

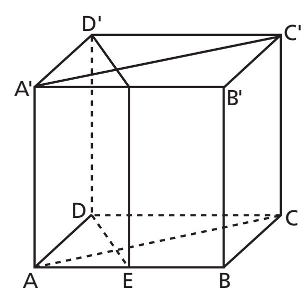
$$\int_0^x f(t)\, dt = f(z) \cdot (x - 0) = x \cdot f(z), \text{ con } z \in [0; x].$$

Pertanto $\lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\, dt}{2xe^x} = \dfrac{x \cdot f(z)}{2xe^x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(z)}{2e}$.

Ora, essendo $z \in [0; x]$, se $x$ tende a 0 anche $z$ tenderà a 0 e $\lim_{x \to 0} f(z) = \lim_{x \to 0} f(z) = 2$ per l'ipotesi di continuità.

Risulta quindi $\lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\, dt}{2xe^x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(z)}{2e^x} = \dfrac{2}{2e^0} = 1.$

**3** La costruzione richiesta dalle ipotesi è la seguente.

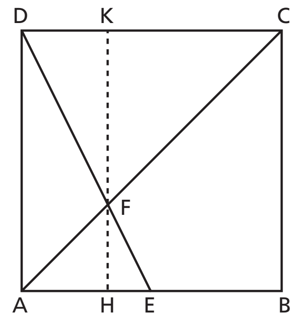



▲ **Figura 7.**

Osservando la figura si nota che le quattro parti in cui viene suddiviso il cubo sono prismi retti che hanno la stessa altezza, pari allo spigolo del cubo (figura 7). Il confronto dei volumi richiesto si riduce così a un problema di geometria piana dove si confrontano le aree in cui viene a essere scomposta la superficie di base $ABCD$ (figura 8).

Si indica con $a$ il lato del cubo. I triangoli $AEF$ e $DFC$ sono simili per il primo criterio di similitudine tra triangoli. Il rapporto di similitudine risulta:. $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{1}{2}$. Tale rapporto vale anche per le altezze $HF$ e $FK$ e quindi $\overline{HF}=\frac{1}{2}\overline{FK}$. Poiché $\overline{HF}+\overline{FK}=a$ ne consegue che:

$$\overline{HF}=\frac{a}{3} \text{ e } \overline{FK}=\frac{2}{3}a.$$



▲ **Figura 8.**

Si calcolano così le superfici:

$$S_{AEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}=\frac{a^2}{12}; \qquad S_{CFD}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{3}a=\frac{a^2}{3};$$

$$S_{AFD}=S_{ACD}-S_{CDF}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{3}=\frac{a^2}{6};$$

$$S_{FEBC}=S_{ABC}-S_{AEF}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{12}=\frac{5}{12}a^2;$$

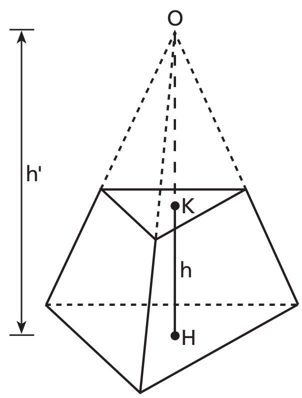
La superficie più estesa $S_{FEBC}$ è il quintuplo della superficie meno estesa $S_{AEF}$. Tale relazione è mantenuta per i corrispondenti volumi.

**4** Si prolunghino gli spigoli laterali del tronco di piramide di base, per esempio, triangolare (figura 9) e si tracci l'altezza $OH$ della piramide ottenuta. Si assuma $\overline{OH}=h'$.
Nota l'espressione del volume di una piramide, il volume del tronco di piramide si calcola come la differenza dei volumi delle piramidi di vertice $O$ e basi coincidenti con quelle del tronco. Pertanto:

$$V=\frac{1}{3}B\cdot h'-\frac{1}{3}b\cdot(h'-h)=\frac{1}{3}[h'(B-b)+bh].$$

Ricordando il teorema relativo alle sezioni parallele di una piramide, in cui le aree delle sezioni sono direttamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide, si può scrivere: $B : b=h'^2 : (h'-h)^2$ e, estraendo la radice quadrata, $\sqrt{B} : \sqrt{b}=h' : (h'-h)$.
Da quest'ultima relazione si ricava $h'$:

$$h'=\frac{h}{1-\sqrt{\dfrac{b}{B}}}=\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}=h\frac{B+\sqrt{Bb}}{B-b}.$$



▲ **Figura 9.**

Infine, si sostituisce tale risultato nell'espressione del volume:

$$V=\frac{1}{3}[h'(B-b)+bh]=\frac{1}{3}[h(B+\sqrt{Bb})+bh]=\frac{1}{3}h(B+b+\sqrt{Bb}).$$

**5** Si prenda un punto $x\in[a;\ b]$. Nell'intervallo $[a;\ x]$ la funzione soddisfa il Teorema di Lagrange cioè esiste almeno un punto $c\in\,]a; x[$ tale che:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c).$$

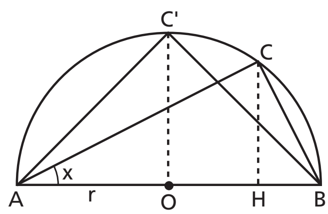
Per ipotesi $f'(c)=0$, pertanto $f(x)-f(a)=0$, cioè $f(x)=f(a)$ per ogni $x\in[a; b]$.
La funzione è quindi costante nell'intervallo di definizione.

**6** Si tratta della formula di Stifel dei coefficienti binomiali. Tale espressione, assunta come vera, può essere verificata membro a membro utilizzando la legge dei tre fattoriali $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Diversamente, essa si dimostra facendo riferimento al significato di $\binom{n}{k}$ come il numero delle combinazioni di classe $k$ i cui elementi sono scelti da un insieme $A$ di $n$ elementi distinti. Indicato con $a$ un elemento di $A$, le combinazioni di classe $k$ che contengono l'elemento $a$ sono quelle combinazioni di $n-1$ elementi di classe $k-1$, a cui si aggiunge l'elemento $a$ stesso. Il numero di questi sottoinsiemi è $\binom{n-1}{k-1}$.

Le combinazioni di classe $k$ che non contengono l'elemento $a$ sono invece $\binom{n-1}{k}$. Pertanto, sommando le combinazioni che contengono $a$ con quelle che non lo contengono, si ottiene il numero complessivo delle combinazioni di $n$ elementi di classe $k$ cioè:

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}.$$

**7** Osservando la figura 10 si nota che un triangolo inscritto nella semicirconferenza ha area massima quando è massima l'altezza $CH$. Ciò si realizza quando quest'ultima coincide con il raggio $r$ della semicirconferenza e il triangolo è isoscele ($ABC'$).




▲ **Figura 10.**

Posto $x=B\hat{A}C$, con $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, si trova il perimetro $f(x)$ del triangolo $ABC$:

$$f(x)=2r+2r\cos x+2r\operatorname{sen} x.$$

Si valutano i massimi e i minimi della funzione discutendo il segno della derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x)=2r(-\operatorname{sen} x+\cos x)>0.$$

Risolvendo la disequazione risulta che $f$ è crescente per $0\leq x<\frac{\pi}{4}$, decrescente per $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ e ha massimo nel punto $x=\frac{\pi}{4}$.

Se $B\hat{A}C=\frac{\pi}{4}$; il triangolo $ABC$ è isoscele. Pertanto il triangolo isoscele inscritto ha area e perimetro massimo e la risposta esatta è A).

**8** La funzione polinomiale $f(x)=ax^3+2ax^2-3x$ è continua e derivabile nel campo reale. Essa ha degli estremanti solo se la sua derivata prima, $f'(x)=3ax^2+4ax-3$, non ha segno costante. Ciò avviene se il discriminante di $f'(x)$ risulta strettamente maggiore di zero, cioè:

$$\frac{\Delta}{4}=4a^2+9a>0\rightarrow a<-\frac{9}{4}\vee a>0.$$

Si può concludere che per $a<-\frac{9}{4}\vee a>0$ la funzione $f$ ha estremanti, mentre per $-\frac{9}{4}\leq a<0$ non ne ha.

Si noti che nel caso limite $a=-\dfrac{9}{4}$ la derivata prima diventa:

$$f'(x)=\frac{27}{4}x^2-9x-3=-3\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

Essa si annulla nel punto $x=-\dfrac{3}{2}$ ed è negativa per ogni altro valore di $x$. In tal caso la funzione non ha estremanti e ha in $x=-\dfrac{3}{2}$ un punto di flesso orizzontale.

**9** Si tratta di calcolare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x-\cos x}{x}$. La funzione al numeratore, $\operatorname{sen}x-\cos x$, non ammette limite per $x\to+\infty$ ma è comunque limitata se si tiene conto che $-1\le\operatorname{sen}x\le 1$ e $-1\le\cos x\le 1$. Si può scrivere:

$$-2\le\operatorname{sen}x-\cos x\le 2 \text{ e pertanto } -\frac{2}{x}\le\frac{\operatorname{sen}x-\cos x}{x}\le\frac{2}{x}.$$

Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{x}=0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$, per il teorema del confronto risulta $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x-\cos x}{x}=0$ e la risposta esatta è A).

**10** Dato il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}$, si raccoglie $x$ al numeratore e al denominatore della frazione:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{\cos x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{\cos x}{x}\right)}.$$

Poiché $-1\le\operatorname{sen}x\le 1$ e quindi $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\le\dfrac{1}{x}$, per il teorema del confronto vale $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=0$.

Allo stesso modo si dimostra che $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$. Pertanto esiste il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{\cos x}{x}\right)}=1.$$

Alla luce del teorema di De L'Hospital, volendo trattare il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, una delle condizioni dell'ipotesi è che deve esistere un valore $M$ tale che, $\forall x>M$, le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili e $g'(x)\ne 0$. Nel caso in questione $g(x)=x-\cos x$ e $g'(x)=1+\operatorname{sen}x$. Si osserva che la derivata prima si annulla per $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ con $k$ intero e quindi non esiste un intorno di $+\infty$ in cui valga sempre $g'(x)\ne 0$. Pertanto il teorema non può essere applicato.