# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
## Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

### PROBLEMA 1

Sia $AB$ un segmento di lunghezza $2a$ e $C$ il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane monometriche $(Oxy)$:

a) si verifichi che il luogo dei punti $P$ tali che $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ ($k$ costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di $k$ per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico $\gamma$ dei punti $X$ che vedono $AC$ sotto un angolo di 45°;

c) posto $X$ appartenente a $\gamma$ in uno dei due semipiani di origine la retta per $A$ e per $B$ e indicato con $\alpha$ l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = \left(\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2$ e $x = \operatorname{tg}\alpha$.

### PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche $(x, y)$ è assegnata la funzione:

$y = x^2 + a\ln(x + b)$, con $a$ e $b$ diversi da zero.

a) Si trovino i valori di $a$ e $b$ tali che la curva $\Gamma$ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$.

b) Si studi e si disegni $\Gamma$.

c) Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di $\Gamma$ con l'asse $x$.

d) Si determini l'equazione della curva $\Gamma'$ simmetrica di $\Gamma$ rispetto alla retta $y = y(1)$;

e) Si disegni, per i valori di $a$ e $b$ trovati il grafico di $y = \left|x^2 + a\ln(x + b)\right|$.

### QUESTIONARIO

**1** Provare che una sfera è equivalente ai $\dfrac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

**2** Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$.

**3** Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

**4** Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$. Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

**5** Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

**6** Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ e si confronti il risultato con il valore esatto dell'integrale.

**7** Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

**8** Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

**9** Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

**10** Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema del valor medio o di Lagrange, se è vero che "se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la velocità media è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h".

---

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
## CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
### Sessione ordinaria

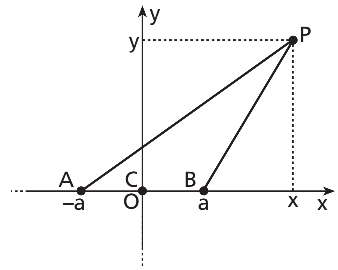
**PROBLEMA 1**

**a)** Fissato il sistema cartesiano di origine nel punto $C$ e asse $x$ passante per i punti $A$ e $B$ (figura 1), si prenda un punto $P(x; y)$ diverso da $B$ (altrimenti la frazione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ perderebbe di significato).

Si calcoli l'espressione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ attraverso la formula della distanza tra due punti:

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = k.$$

Essendo $k$ positivo si elevano al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza e si ottiene:




▶ **Figura 1.**

$$(x+a)^2+y^2 = k^2[(x-a)^2+y^2] \rightarrow (1-k^2)\,x^2+(1-k^2)\,y^2+2a(1+k^2)\,x+(1-k^2)\,a^2 = 0.$$

Se $k=1$, l'equazione si riduce alla retta $x=0$ che è l'asse del segmento $AB$.

Se $k \neq 1$, si ottiene $x^2+y^2+2a\frac{(1+k^2)}{1-k^2}x+a^2=0$ con $x \neq a$. Si tratta di una circonferenza con centro nel punto $C'\left(-a\frac{1+k^2}{1-k^2}; 0\right)$ e raggio uguale a $\frac{2ka}{|1-k^2|}$.

**b)** La risoluzione non segue la via unicamente algebrica, perché troppo complessa, ma si basa su alcune considerazioni geometriche, ricordando che gli angoli alla circonferenza, che sottendono lo stesso arco, sono uguali. Osservando la figura 2, un punto del semipiano $y \geq 0$, che appartiene al luogo, è il vertice $Q$ del triangolo rettangolo isoscele costruito sul cateto $AC$. Esso ha coordinate $Q(0; a)$. Costruita la circonferenza di diametro $AQ$, tutti i suoi punti di ordinata positiva soddisfano la proprietà richiesta dal luogo. Il centro della circonferenza, punto medio di $AQ$, ha coordinate $C_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$; il raggio vale $\frac{\overline{AQ}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Per $y \geq 0$, l'equazione del luogo geometrico è

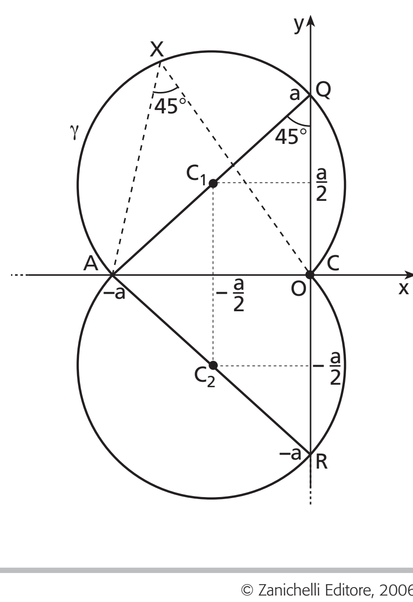
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

ovvero $x^2+y^2+ax-ay=0$.
Con le stesse considerazioni si trova l'arco nel semipiano $y<0$:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2} \rightarrow x^2+y^2+ax+ay=0.$$

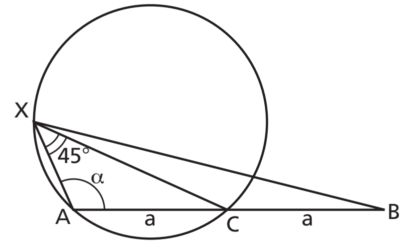
Pertanto la curva $\gamma$ ha equazione:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax-ay=0 & \text{con } y \geq 0 \\ x^2+y^2+ax+ay=0 & \text{con } y<0 \end{cases}$$




▶ **Figura 2.**

**c)** Si risolve la domanda per via trigonometrica.
Si osservi la figura 3. Per dimostrazione precedente, la circonferenza ha raggio uguale a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.




▲ **Figura 3.**

Per il teorema della corda:

$$\overline{XA} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(135° - \alpha) = a(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha);$$

per il teorema di Carnot:

$$\overline{XB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{XA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\alpha =$$

$$= a^2 + 2a^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 4a^2 - 2a(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \cdot 2a \cdot \cos\alpha = 5a^2\operatorname{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha - 2a^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Risulta allora: $\left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2 = \frac{a^2(5\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{a^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{5\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 1}$, con $\alpha \neq 90°$, e, tenendo conto delle assegnazioni nell'ipotesi, $x = \operatorname{tg}\alpha$ e $f(x) = \left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2$, si ricava:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}.$$

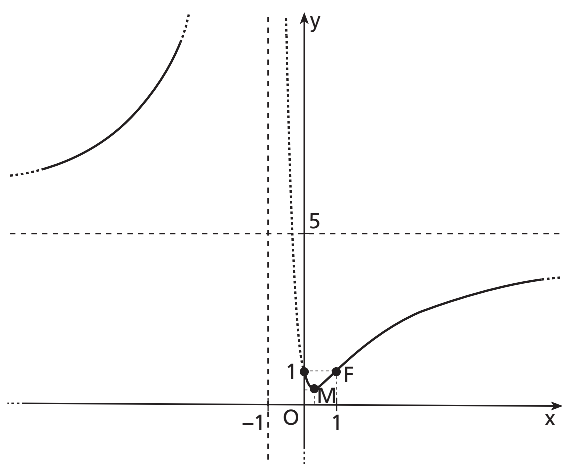
La funzione va considerata secondo le limitazioni geometriche del problema: poiché $0 \leq \alpha < 135° \wedge \alpha \neq 90°$, risulta $x < -1 \vee x \geq 0$.

Per completezza si svolge lo studio di $y = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$ nel suo campo di esistenza.

Il C.E. è $x \neq -1$; la funzione non è né pari né dispari; interseca l'asse $y$ nel punto $(0; 1)$ e non ha intersezioni con l'asse delle ascisse; è sempre positiva. Tenendo conto che $\lim_{x \to -1} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = +\infty$ e $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = 5$, la curva ammette asintoto verticale $x = -1$ e asintoto orizzontale $y = 5$.

La derivata prima è $f'(x) = \frac{4(3x-1)}{(1+x)^3}$; pertanto la funzione è crescente per $x < -1$ e $x > \frac{1}{3}$ e decrescente per $-1 < x < \frac{1}{3}$. Ha minimo relativo $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

La derivata seconda vale $f''(x) = \frac{24(1-x)}{(1+x)^4}$; dunque la curva ha concavità verso l'alto per $x < -1$ e $-1 < x < 1$ e concavità verso il basso per $x > 1$. Ha flesso $F(1; 1)$. Nella figura 4, la parte della curva che rispetta le condizioni geometriche è indicata con tratto continuo.




▲ **Figura 4.**

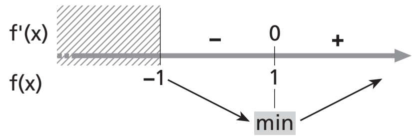
## PROBLEMA 2

**a)** Il C.E. della funzione è $x > -b$. Per il passaggio dall'origine risulta $a \ln b = 0$ e, poiché $a \neq 0$ per ipotesi, si deduce che $\ln b = 0$ da cui $b = 1$ e quindi $x > -1$.
Considerato $y = x^2 + a\ln(x+1)$, la condizione necessaria per avere un estremante nel punto $x = 1$ ri-

chiede che $y'(1)=0$. Dato che $y'(x)=2x+\dfrac{a}{x+1}$, $y'(1)=2+\dfrac{a}{2}=0 \to a=-4$. La funzione ha forma $y=x^2-4\ln(x+1)$.

Ora bisogna verificare se $x=1$ è un punto di minimo assoluto.

La derivata prima $y'(x)=2x-\dfrac{4}{x+1}=2\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$ ha denominatore sempre positivo, pertanto essa è complessivamente positiva se $x^2+x-2>0 \to x<-2 \vee x>1$. Tenendo conto della condizione di esistenza, si riporta nella figura 5 il quadro della monotonia di $f$.




▲ **Figura 5.**

Si ricava che la funzione ha un minimo assoluto in $x=1$.

**b)** Data $f(x)=x^2-4\ln(x+1)$, per le precedenti considerazioni, essa ha C.E.: $x>-1$, minimo assoluto $M(1;\, 1-4\ln 2)$ e interseca l'asse $y$ nell'origine del sistema. Non è possibile determinare in modo esatto i punti di intersezione con l'asse $x$ perché l'equazione $x^2-4\ln(x+1)=0$ non è risolvibile algebricamente e si rimanda al punto c per il calcolo numerico. Si osserva comunque che $f(2)=4-4\ln 3<0$ e $f(3)=9-4\ln 4>0$ e, quindi, c'è un'intersezione positiva compresa tra 2 e 3.

I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono:

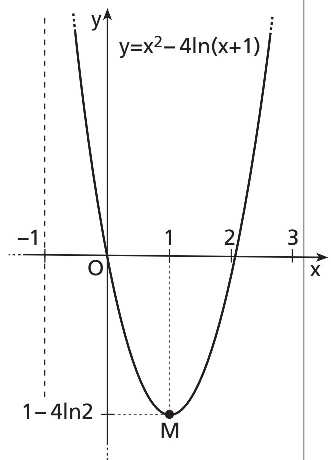
$$\lim_{x\to -1^+}(x^2-4\ln(x+1))=+\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x^2-4\ln(x+1))=\lim_{x\to +\infty} x^2\left(1-4\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)=(\text{De L'Hospital})=+\infty.$$

La funzione ha asintoto verticale $x=-1$ e non ha asintoti orizzontali. Inoltre, poiché

$\lim_{x\to +\infty}\dfrac{(x^2-4\ln(x+1))}{x}=+\infty$, la funzione non ha asintoti obliqui.

La derivata seconda $y''(x)=2+\dfrac{4}{(x+1)^2}$ è sempre positiva, pertanto la curva ha sempre concavità verso l'alto. La figura 6 rappresenta il grafico di $\Gamma$.




▲ **Figura 6.**

**c)** Consideriamo l'intervallo [2; 3]: poiché $f(2)<0$ e $f(3)>0$, esiste solo uno zero in tale intervallo essendo in esso la derivata prima non nulla. Si valuta lo zero attraverso il metodo di bisezione. La tabella di iterazione è la seguente:

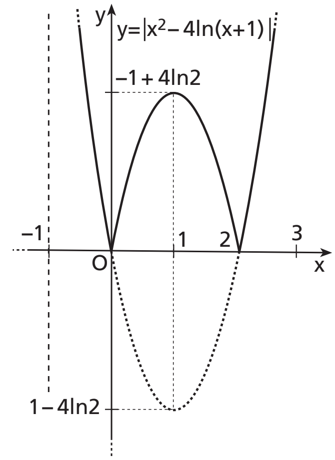
| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $m_n$ | $\varepsilon_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | 2 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 2 | 2 | $\frac{9}{4}$ | $\frac{17}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 3 | $\frac{17}{8}$ | $\frac{9}{4}$ | $\frac{35}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |
| 4 | $\frac{17}{8}$ | $\frac{35}{16}$ | $\frac{69}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |
| 5 | $\frac{17}{8}$ | $\frac{69}{32}$ | $\frac{137}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

Il valore approssimato dell'intersezione è $x=\dfrac{137}{64}\simeq 2{,}14$ con un errore inferiore a $\dfrac{1}{64}$ cioè a 0,015625.

**d)** Si determini l'equazione della curva $\Gamma'$ simmetrica di $\Gamma$ rispetto alla retta $y = y(1)$.
L'asse di simmetria è $y = y(1)$ cioè la retta parallela all'asse delle $y$, $y = 1 - 4\ln 2$. Le equazioni della simmetria sono $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - 8\ln 2 - y \end{cases}$.
La curva trasformata risulta di equazione:

$$y = 4\ln\frac{x+1}{4} - x^2 + 2.$$

**e)** Il grafico di $y = \left| x^2 - 4\ln(x+1) \right|$ coincide con quello di $f(x) = x^2 - 4\ln(x+1)$ per quei valori di $x$ in cui la funzione $f$ è positiva o nulla, mentre, per i restanti valori, si traccia la simmetrica rispetto all'asse delle $x$. (figura 7).




▲ **Figura 7.**

## QUESTIONARIO

**1** La dimostrazione che segue è compiuta per via analitica osservando che le due figure sono volumi di rotazione. Fissato un piano cartesiano al centro della sfera di raggio $r$, quest'ultima è ottenuta dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse della semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $-r \le x \le r$. Pertanto il volume della sfera vale:

$$V_{\text{sfera}} = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Il cilindro circoscritto è il solido di rotazione intorno all'asse $x$ della retta $y = r$, con $-r \le x \le r$. $V_{\text{cilindro}} = \pi \int_{-r}^{r} r^2\, dx = 2\pi r^3$. Pertanto $\dfrac{V_{\text{sfera}}}{V_{\text{cilindro}}} = \dfrac{2}{3}$.

La dimostrazione può essere fatta per via geometrica come nel libro per lo studente, assumendo note le formule del volume del cilindro e del cono e dimostrata l'equivalenza tra la sfera e l'anticlessidra.

**2** Poiché $x = 0$ non è soluzione, l'equazione di partenza è equivalente a $e^x + e^{-x} - \dfrac{2}{x} = 0$.

Posto $f(x) = e^x + e^{-x} - \dfrac{2}{x}$, si tratta di determinare quanti zeri ha la funzione $f$. Per $x < 0$ essa è sempre positiva, pertanto in questo intervallo non ha zeri. Nell'intervallo $]0; +\infty[$ i limiti agli estremi valgono: $\lim_{x \to 0^+} f = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$ e, essendo la funzione ivi continua, essa assume sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste allora almeno uno zero. Se si assume che ci sono due zeri, deve valere $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pertanto per il teorema di Rolle esiste almeno un punto $c \in ]x_1; x_2[$ tale che $f'(c) = 0$.

La derivata prima è $f'(c) = e^x - e^{-x} + \dfrac{2}{x^2}$ che è sempre positiva per $x > 0$. Infatti per $x > 0$ si ha $e^x > e^{-x}$, quindi $e^x - e^{-x} > 0$, mentre $\dfrac{2}{x^2}$ è una quantità sempre positiva. Si è raggiunto così un assurdo, quindi la funzione ha un solo zero. In conclusione, l'equazione $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$ ha una sola radice.

**3** Considerata la funzione $y = p(x)$, essa è continua e derivabile nel campo reale. Se $x_1$ e $x_2$ sono due radici distinte di $p(x)$, la funzione assume nei due punti lo stesso valore, in questo caso, zero, pertanto vale il teorema di Rolle cioè esiste almeno un $c \in ]x_1; x_2[$ tale che $p'(c) = 0$. Il valore $c$ è quindi radice di $p'(x)$.

**4** Il campo di esistenza della funzione continua $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$ è $[-1; 1]$. La derivata vale:

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ con $x \in ]-1; 1[$. Per una conseguenza del teorema di Lagrange, la funzione $f(x)$ è costante nell'intervallo e vale $f(x) = f(0) = \operatorname{arcsen} 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

**5** Osservando che la derivata di $\ln x$ è $\frac{1}{x}$, si tratta di un integrale la cui primitiva è una funzione composta. Risulta $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$.

**6** Si utilizza per il calcolo, il metodo dei trapezi. Dividendo in sei parti uguali l'intervallo $[0; \pi]$ si costruisce la seguente tabella.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen} x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

Per la formula dei trapezi:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx \simeq \frac{\pi - 0}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}(\sqrt{3} + 2) \simeq 1{,}954097.$$

Secondo il metodo dei trapezi l'errore che si compie è minore o uguale a $\frac{\pi^3}{12 \cdot 36} \simeq 0{,}07$.

Con il calcolo esatto: $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = 2$. Si osserva che $2 - 1{,}954097 = 0{,}045903$ che è, come si aspettava, minore di 0,07.

**7** Posto $f(x) = x - e^{-x}$, la funzione è continua e assume agli estremi dell'intervallo $[0; 1]$ valori di segno opposto. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste allora almeno uno zero. Se ci sono due zeri, $x_1$ e $x_2$ appartenenti a $]0; 1[$, deve valere $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pertanto per il teorema di Rolle esiste almeno un punto $c \in ]x_1; x_2[$ tale che $f'(c) = 0$. Poiché la derivata prima $f'(x) = 1 + e^{-x}$ è sempre positiva, la funzione è strettamente crescente e ciò va contro l'ipotesi di due zeri per $f(x)$. Quindi la funzione ha un solo zero cioè l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ha una sola radice positiva compresa tra 0 e 1. Si determina il suo valore approssimato attraverso il metodo delle tangenti. La derivata seconda è negativa nell'intervallo e $f(0) = -1 < 0$; il punto di partenza è quindi $x = 0$. Di seguito è riportata la tabella che si ottiene attraverso la formula di ricorrenza $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, fino a $n = 6$.

| $n$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|
| 0 | 0,566311003 |
| 1 | 0,567143165 |
| 2 | 0,567143290 |
| 3 | 0,567143290 |
| 4 | 0,567143290 |
| 5 | 0,567143290 |
| 6 | 0,567143290 |

Il valore approssimato della radice dell'equazione è 0,567143290.

**8** Gli insiemi di classe 3 che si possono formare con 16 elementi sono $\binom{16}{3}$ e questi costituiscono i casi possibili. I casi favorevoli dell'evento $E =$ "tutti gli studenti scelti sono maschi" sono $\binom{12}{3}$. Pertanto la probabilità dell'evento $E$ è: $p(E) = \dfrac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \dfrac{220}{560} = \dfrac{11}{28}$.

**9** La geometria euclidea si basa su una struttura assiomatico-deduttiva evidenziata nell'opera *Gli elementi* di Euclide. Il metodo utilizzato è quello deduttivo: dimostrare una proprietà attraverso altre proprietà precedentemente dimostrate. Il sistema assiomatico è un gruppo di proprietà (assiomi o postulati) che vengono assunte come primitive ossia non dedotte ma accettate come vere perché autoevidenti e non dimostrabili. In tale ottica, i teoremi sono enunciati la cui verità può essere dimostrata attraverso una sequenza di deduzioni a partire dai postulati o da altri teoremi. Gli assiomi soddisfano alcune caratteristiche: sono indipendenti, cioè un assioma non può essere dedotto da un altro; non sono contraddittori, cioè non si può dimostrare partendo da essi una proposizione e la sua negazione.

**10** Nota l'equazione del moto $s = s(t)$, la funzione della velocità è $v = s'(t)$ mentre la velocità media tra due generici istanti $t_1$ e $t_2$ vale $v_m(t_1;\ t_2) = \dfrac{s(t_1) - s(t_2)}{t_2 - t_1}$. Se si calcola la velocità media sull'intero tratto con $t_1 = 0$ e $t_2 = T$ e $s(0) = 0$, risulta $v_m(0;\ T) = \dfrac{s(T) - 0}{T - 0} = \dfrac{s(T)}{T} = 60\,\text{km/h}$. Si applichi il teorema di Lagrange alla funzione $s$ nell'intervallo [0; T]:

$$\frac{s(T) - s(0)}{T - 0} = \frac{s(T)}{T} = s'(t^*) \text{ con } t^* \in \,]0;\ T[.$$

Pertanto esiste un istante $t^*$ in cui la velocità vale 60 km/h, pari alla velocità media sull'intero percorso.