ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 9 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Le misure a, b, c dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

a) Si esprima, in funzione di k, il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo;

b) si stabilisca il valore di k per il quale r è massimo;

c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in b), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, ad ABC;

d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

PROBLEMA 2

Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto.
Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

a) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.

Successivamente, posto il volume della lattina pari a 2 decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

b) nel caso di cui al punto a);

c) nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia sezione aurea dell'altezza.

QUESTIONARIO

1 Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* illustrandone il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

2 Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

3 Dire qual è il dominio della funzione $f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$ e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = \pi$.

4 Calcolare, integrando per parti:

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

5 Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di «*concetto primitivo*» e di «*assioma*».

6 Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3, …, 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

7 Verificato che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8 Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

9 Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante:

> … *se del mezzo cerchio far si puote*
> *triangol sì ch'un retto non avesse.* (Paradiso, XIII, 101-102)

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

Una successione numerica si dice progressione aritmetica di ragione k quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante e vale k. Nel nostro caso, $b-a=c-b=k$ da cui si ricava $b=a+k$ e $c=b+k=a+2k$.

a) Se r è il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo di area $\mathscr{A}$, vale la relazione $r=\frac{\mathscr{A}}{p}$, dove $p=\frac{a+b+c}{2}$ è il semiperimetro del triangolo. Calcoliamo quest'ultimo sostituendo le espressioni dei lati in funzione di k:

$$p(k)=\frac{a+a+k+a+2k}{2}=\frac{3}{2}(a+k).$$

Poiché per la formula di Erone l'area è $\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sostituendo nuovamente le lunghezze dei lati si ottiene:

$$\mathscr{A}(k)=\sqrt{\frac{3}{2}(a+k)\cdot\left[\frac{3}{2}(a+k)-a\right]\cdot\left[\frac{3}{2}(a+k)-(a+k)\right]\cdot\left[\frac{3}{2}(a+k)-(a+2k)\right]}.$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\mathscr{A}(k)=\frac{a+k}{4}\sqrt{3(-3k^2+2ak+a^2)}.$$

Sostituiamo nella formula del raggio le espressioni del semiperimetro e dell'area:

$$r(k)=\frac{\mathscr{A}}{p}=\frac{1}{6}\sqrt{3(-3k^2+2ak+a^2)}.$$

b) Il valore di k che rende r massimo è il valore che massimizza la funzione $f(k)=-3k^2+2ak+a^2$. Il grafico di f è una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Pertanto il valore di k cercato corrisponde all'ascissa del vertice, cioè $k=\frac{a}{3}$.

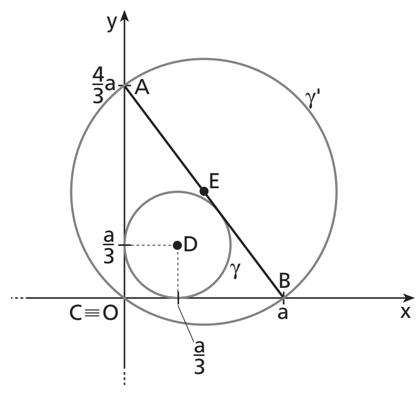
In tal caso i lati del triangolo ABC hanno lunghezza a, $\frac{4}{3}a$, $\frac{5}{3}a$. Osserviamo che vale $a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2=$ $=\left(\frac{5}{3}a\right)^2$ e che quindi il triangolo è rettangolo di cateti a e $\frac{4}{3}a$ e ipotenusa $\frac{5}{3}a$.

Il corrispondente valore del raggio della circonferenza inscritta è:

$$r=\frac{1}{6}\sqrt{3\left(-3\left(\frac{a}{3}\right)^2+2a\left(\frac{a}{3}\right)+a^2\right)}=\frac{1}{3}a.$$

c) Poiché per $k=\frac{a}{3}$ il triangolo ABC è rettangolo, scegliamo un sistema di riferimento come in figura 1, con $C\equiv O$, i vertici B e A rispettivamente sugli assi x e y.

Le coordinate dei vertici del triangolo sono $A\left(0;\frac{4}{3}a\right)$, $B(a;0)$ e $C(0;0)$.



▶ **Figura 1.**

Per quanto calcolato nel punto b), la circonferenza inscritta γ ha raggio $r=\frac{1}{3}a$ e centro $D\left(\frac{1}{3}a; \frac{1}{3}a\right)$.
La sua equazione è:

$$\left(x-\frac{1}{3}a\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{1}{9}a^2 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2-\frac{2}{3}ax-\frac{2}{3}ay+\frac{1}{9}a^2=0.$$

Essendo ABC un triangolo rettangolo, il centro della circonferenza γ' circoscritta (figura 1) coincide con il punto medio dell'ipotenusa AB, cioè $E\left(\frac{1}{2}a; \frac{2}{3}a\right)$, mentre il raggio è la metà dell'ipotenusa AB, ovvero $r'=\frac{5}{6}a$.

L'equazione della circonferenza γ' è:

$$\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{25}{36}a^2 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2-ax-\frac{4}{3}ay=0.$$

d) Poiché $r=\frac{1}{3}a$ e $r'=\frac{5}{6}a$ sono i raggi delle sfere le cui sezioni diametrali sono le circonferenze γ e γ', il rapporto dei corrispondenti volumi vale:

$$\frac{V}{V'}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{3}a\right)^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{6}a\right)^3}=\frac{8}{125}.$$

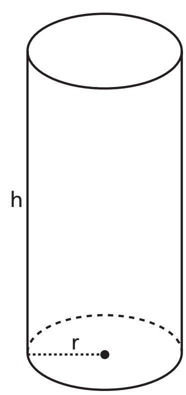
PROBLEMA 2

a) Rappresentiamo una lattina secondo un cilindro circolare retto di raggio di base r e di altezza h (figura 2).
Poiché è assegnata la capacità della lattina, possiamo supporre il suo volume V costante. Pertanto vale $V=\pi r^2 h$ da cui si ricava l'altezza in funzione del raggio cioè $h=\frac{V}{\pi r^2}$.
Minimizzare la quantità di materiale per realizzare una lattina significa minimizzare l'area totale del cilindro. Tale area è data dalla somma del doppio dell'area di base con l'area laterale, ovvero:

$$A_{tot}=2A_b+A_l=2\pi r^2+2\pi rh=$$

sostituendo l'espressione di h trovata

$$=2\pi r^2+\frac{2V}{r}=2\frac{\pi r^3+V}{r}.$$



▲ **Figura 2.**

Cerchiamo il minimo della funzione $f(r)=2\frac{\pi r^3+V}{r}$ per $r>0$. Studiamo il segno della sua derivata:

$$f'(r)=2\frac{3\pi r^2\cdot r-(\pi r^3+V)}{r^2}=2\frac{2\pi r^3-V}{r^2}.$$

Ne segue che $f'(r) \geq 0$ per $r \geq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e la funzione è decrescente per $< r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e crescente per $r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Si ha pertanto un minimo in corrispondenza di $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, cioè considerando come base per la lattina un cerchio di diametro $d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

In questo caso l'altezza della lattina risulta $h = \frac{V}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2\pi}{V}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

Osserviamo che la lattina che minimizza il materiale da utilizzare è tale da avere il diametro di base coincidente con l'altezza. Si tratta perciò di un cilindro equilatero.

b) Poiché vale l'equivalenza $1\,\mathrm{l} = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, se $V = 2$ dl risulta:

$$V = 2\,\mathrm{dl} = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6\,\mathrm{cm}^3 = 200\ \mathrm{cm}^3,$$

$$d = h = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 200}{\pi}}\ \mathrm{cm} = 2\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\ \mathrm{cm} \simeq 6{,}3\,\mathrm{cm}.$$

c) Il diametro d è sezione aurea di h se $h : d = d : (h - d)$, cioè se $d^2 = h(h - d)$. Risolvendo tale equazione di secondo grado nell'incognita d si ottiene come soluzione accettabile $d = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} h$.

Inoltre, essendo il volume del cilindro di 200 cm^3, vale anche $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = 200\,\mathrm{cm}^3$, cioè $h = \frac{800}{\pi d^2}$. Sostituiamo tale espressione nella formula del diametro:

$$d = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} h = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{800}{\pi d^2} \quad \rightarrow \quad d^3 = \frac{400(\sqrt{5} - 1)}{\pi}.$$

Risolviamo l'equazione ottenuta:

$$d = \sqrt[3]{\frac{400(\sqrt{5} - 1)}{\pi}} \simeq 5{,}4\,\mathrm{cm}.$$

Il valore corrispondente dell'altezza è:

$$h = \frac{800}{\pi d^2} \quad \rightarrow \quad h = \frac{800}{\pi\left[\sqrt[3]{\frac{400(\sqrt{5} - 1)}{\pi}}\right]^2} \simeq 8{,}7\,\mathrm{cm}.$$

QUESTIONARIO

1 Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione $y = f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a; b]$ ed è derivabile in ogni punto interno a esso, esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Questo teorema è una generalizzazione del teorema di Rolle. Infatti, considerando il caso particolare in cui risulta $f(a) = f(b)$ (ipotesi del teorema di Rolle), dal teorema di Lagrange segue che esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione $f'(c) = 0$, che è la tesi del teorema di Rolle.
Il teorema di Lagrange permette di dimostrare il seguente importante risultato riguardante la crescenza o decrescenza delle curve.
Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I, essa è:

- crescente in I, se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è positiva;
- decrescente in I, se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è negativa.

Infatti, siano x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange, applicato a $f(x)$ nell'intervallo $[x_1; x_2]$, si ha:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \text{ con } c \in]x_1; x_2[.$$

Essendo $x_2 - x_1 > 0$ e supponendo per ipotesi $f'(c) > 0$, anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, da cui $f(x_2) > f(x_1)$. Poiché x_1 e x_2 sono punti qualsiasi di I, la funzione è crescente in tale intervallo. Analogamente si dimostra la decrescenza, supponendo $f'(c) < 0$.

2 Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \text{arctg}\, x - \text{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$ è $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Calcoliamo la derivata di f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Poiché la derivata prima è nulla in ogni punto del dominio si può concludere che la funzione è costante a tratti, cioè costante negli intervalli $]-\infty; -1[$ e $]-1; +\infty[$. Pertanto:

- se $x < -1$, allora $f(x) = f(-\sqrt{3}) = \text{arctg}(-\sqrt{3}) - \text{arctg}(2 + \sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{5}{12}\pi = -\dfrac{3}{4}\pi$,
- se $x > -1$, allora $f(x) = f(0) = \text{arctg}\, 0 - \text{arctg}(-1) = \dfrac{\pi}{4}$.

3 La funzione di potenza $y = x^{\pi}$, a esponente irrazionale, ha campo di esistenza $]0; +\infty[$, mentre la funzione esponenziale $y = \pi^x$, di base π, ha campo di esistenza $\mathbb{R}$. Quindi la funzione f, espressa dalla loro differenza, è definita nell'intervallo $]0; +\infty[$.
Applicando le regole di derivazione calcoliamo la derivata prima e seconda di f:

$$f'(x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^x \ln \pi,$$

$$f''(x) = \pi(\pi - 1)x^{\pi-2} - \pi^x \ln^2 x.$$

In particolare nel punto $x = \pi$ vale:

$f'(\pi) = \pi \cdot \pi^{\pi-1} - \pi^{\pi} \ln \pi = \pi^{\pi}(1 - \ln \pi) < 0$ (essendo $\pi > e, \ln \pi > 1$),

$f''(\pi) = \pi(\pi - 1)\pi^{\pi-2} - \pi^{\pi} \ln^2 \pi = (\pi - 1)\pi^{\pi-1} - \pi^{\pi} \ln^2 \pi < \pi \cdot \pi^{\pi-1} - \pi^{\pi} \ln^2 \pi = \pi^{\pi}(1 - \ln^2 \pi) < 0$ (essendo $\ln \pi > 1, \ln^2 \pi > 1$).

In conclusione, sia la derivata prima che seconda sono negative nel punto $x = \pi$.

4 Integriamo per parti l'integrale:

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x\,dx = \int_0^1 1\cdot \operatorname{arcsen} x\,dx = [x\operatorname{arcsen} x]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 -2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}.$$

5 In matematica vi sono alcuni «oggetti» che non si definiscono ma vengono accettati come noti. Essi sono detti «concetti primitivi» o «enti primitivi». Ad esempio, gli enti primitivi della geometria euclidea sono il punto, la retta e il piano. A partire da questi oggetti si definiscono tutti gli altri. Gli «assiomi» o «postulati» chiariscono la natura degli enti primitivi fornendone le proprietà di base. Più precisamente, gli assiomi sono proposizioni accettate come vere, senza dimostrazione, che stabiliscono le relazioni che intercorrono tra gli enti primitivi nella particolare branca della matematica alla quale si riferiscono. Ad esempio, nella geometria euclidea si postula che «per un punto passano infinite rette», «per due punti distinti passa una sola retta». Il più famoso postulato della geometria euclidea è quello delle rette parallele («data una retta r e un punto P non appartenente a essa, esiste un'unica retta passante per P e parallela ad r»). Modificando questo postulato si creano geometrie diverse, dette «non euclidee».

6 Estraiamo contemporaneamente due cifre nell'insieme $\{1, 2, \dots, 9\}$. Consideriamo i due eventi:

$A = \{$La somma delle due cifre è pari$\}$,

$B = \{$Le due cifre sono entrambe dispari$\}$.

Vogliamo calcolare la probabilità condizionata $P(B|A)$ che per il teorema di probabilità composta vale $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$P(A\cap B)$ e $P(A)$ si calcolano come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

Tutte le possibili coppie che si possono estrarre, poiché l'ordine non conta, sono le combinazioni $C_{9,2}=\binom{9}{2}$.

Le coppie formate da due cifre dispari (la cui somma è sempre pari) sono in totale 10 e precisamente:

(1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (3, 5), (3, 7), (3, 9), (5, 7), (5, 9), (7, 9).

Le coppie la cui somma delle cifre è pari sono in totale 16 in quanto alle precedenti si aggiungono le coppie:

(2, 4), (2, 6), (2, 8), (4, 6), (4, 8), (6, 8).

Pertanto vale $P(A)=\dfrac{16}{C_{9,2}}$ e $P(A\cap B)=\dfrac{10}{C_{9,2}}$, da cui si ottiene:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}.$$

7 La funzione $f(x) = x^3 - 2x - 5$ è continua su [2; 3], ammette derivata prima $f'(x) = 3x^2 - 2$, positiva in tale intervallo, e risulta $f(2) = -1 < 0$ e $f(3) = 16 > 0$. Per il primo teorema dell'unicità dello zero, la funzione ammette un unico zero nell'intervallo [2; 3].

Ricaviamo una soluzione con un'approssimazione pari a 0,01 procedendo con il metodo iterativo della bisezione, restringendo l'intervallo [2; 3] di partenza in successivi intervalli $[a_n; b_n]$ finché $\frac{b_n - a_n}{2} < 0{,}01$.

n	a_n	b_n	$\frac{a_n + b_n}{2}$	$\frac{b_n - a_n}{2}$
1	2	3	2,5	0,5
2	2	2,5	2,25	0,25
3	2	2,25	2,125	0,125
4	2	2,125	2,0625	0,0625
5	2,0625	2,125	2,09375	0,03125
6	2,09375	2,125	2,109375	0,015625
7	2,09375	2,109375	2,1015625	0,0078125

Un'approssimazione della soluzione a meno di 0,01 è dunque 2,1015625.

8 È dato un cilindro equilatero, cioè con diametro di base pari all'altezza del solido, inscritto in una sfera. Sia r il raggio della base del cilindro e R il raggio della sfera (figura 3).

L'area totale del cilindro vale:

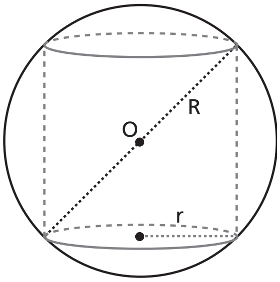
$$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2.$$

Il diametro della sfera circoscritta misura $2r\sqrt{2}$, dunque la sfera ha raggio $R = r\sqrt{2}$. La sua area totale è:

$$A_{\text{sfera}} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2r^2 = 8\pi r^2.$$

Il rapporto richiesto è pertanto:

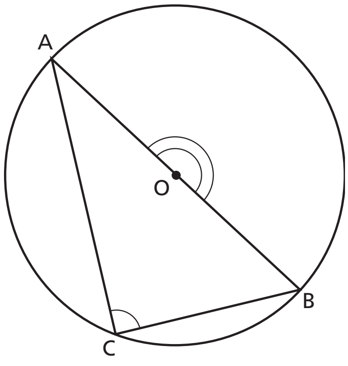
$$\frac{A_{\text{cilindro}}}{A_{\text{sfera}}} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}.$$



▲ **Figura 3.**

9 È data una circonferenza di centro O e diametro AB. Si inscrive in una delle semicirconferenze un generico triangolo ABC (figura 4). Si vuole dimostrare che un qualunque triangolo inscritto a una semicirconferenza è rettangolo, ovvero che $A\hat{C}B$ è retto.

Supponiamo per assurdo che l'angolo $A\hat{C}B$ non sia retto, cioè non sia la metà di un angolo piatto. È noto il teorema che afferma che, in una circonferenza, un angolo al centro è doppio del corrispondente angolo alla circonferenza. Nel nostro caso risulta $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$. Pertanto se $A\hat{C}B$ non è retto risulta che l'angolo doppio $A\hat{O}B$ non è piatto. Ma ciò va contro l'ipotesi che il triangolo ABC sia inscritto in una semicirconferenza cioè tale che il triangolo abbia un lato coincidente con il diametro. Pertanto l'angolo $A\hat{C}B$ è retto.



▲ **Figura 4.**

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 236 pag. V 198 • Problema 16 pag. L 430 • Esercizio 145 pag. π 90
Problema 2	• Quesito 5 pag. W 177 • Problema 287 pag. V 208
Quesito 1	• Quesito 1 pag. V 136 • Quesito 2 pag. V 136
Quesito 2	• Quesito 4 pag. W 167 • Quesito 10 pag. W 171
Quesito 3	• Esercizio 39 pag. U 23
Quesito 4	• Quesito 8 pag. W 171 • Esercizio 343 pag. W 53
Quesito 5	• Quesito 1 pag. ω 55
Quesito 6	• Esercizio 60 pag. α 81 • Esercizio 63 pag. α 81
Quesito 7	• Esercizio 16 pag. ι 23 • Esercizio 29 pag. ι 24 • Quesito 5 pag. W 171
Quesito 8	• Quesito 9 pag. W 171 • Problema 14 pag. π 143