ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

[1] $a + 2x,\ a - x,\ 2a - x,$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

QUESTIONARIO

1 Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2 Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$.

3 Considerati i numeri reali a, b, c, d – comunque scelti – se $a > b$ e $c > d$ allora:

A $a + d > b + c$;

B $a - d > b - c$;

C $ad > bc$;

D $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4 Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5 Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+1}$$

sia un'identità.

6 Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

7 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt, \text{ con } x > 0.$$

8 La funzione reale di variabile reale è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1; 3] e derivabile nell'intervallo aperto]1, 3[. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo]1; 3[. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

9 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

A un punto;

B due punti;

C infiniti punti;

D nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10 La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a, \int_0^6 f(x)\,dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4.$$

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

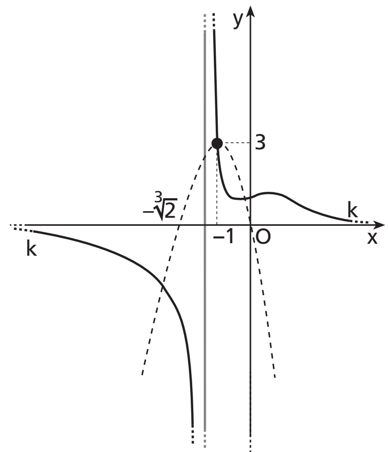
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

a) Si discute la positività della funzione: si ha $\frac{x^2+2}{x^3+2}>0$ per $x>-\sqrt[3]{2}$, $\frac{x^2+2}{x^3+2}<0$ per $x<-\sqrt[3]{2}$. Pertanto il grafico è situato nel semipiano $y>0$ per $x>-\sqrt[3]{2}$ e nel semipiano $y<0$ per $x<-\sqrt[3]{2}$.

b) Il punto della curva k di ascissa -1 ha ordinata $f(-1)=3$ e quindi coordinate $(-1;3)$.
La parabola richiesta ha equazione $y=ax^2+bx$. Il passaggio per $(-1;3)$ implica che $a-b=3$ e quindi l'equazione diventa $y=ax^2+(a-3)x$. Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola è dato da $y'=2ax+a-3$ e nel punto di ascissa -1 vale $m=-a-3$.
Il coefficiente angolare m' della retta tangente alla curva k nel punto $x=-1$ è uguale a $f'(-1)$. Poiché $f'(x)=\frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$, $m'=f'(-1)=-11$. Imponendo la condizione di perpendicolarità tra le due tangenti, $m\cdot m'=-1$, si trova $-11(-a-3)=-1\rightarrow a=-\frac{34}{11}$.
L'equazione della parabola cercata è: $y=-\frac{34}{11}x^2-\frac{67}{11}x$.

c) Per le considerazioni al punto b, la retta passante per $(-1;3)$ e tangente alla curva k ha equazione:
$y-3=-11(x+1)\rightarrow y=-11x-8$. Le intersezioni tra tale retta e la curva si trovano risolvendo il sistema:
$\begin{cases} y=-11x-8 \\ y=\frac{x^2+2}{x^3+2} \end{cases}$. L'equazione risolvente è
$11x^4+8x^3+x^2+22x+18=0$. Poiché $x=-1$ è un punto di tangenza, il polinomio sarà divisibile due volte per il binomio $(x+1)$. Applicando la regola di Ruffini, esso si scompone nel modo seguente: $(x+1)^2(11x^2-14x+18)$.



▲ **Figura 1.**

Il discriminante di $11x^2-14x+18$ vale: $\frac{\Delta}{4}=49-198<0$; pertanto non esistono soluzioni reali del polinomio diverse da $x=-1$.
Se ne conclude che la retta tangente interseca la curva k solo nel punto $(-1;3)$.

d) Si tratta di determinare i punti stazionari della funzione f, dove, cioè, la derivata prima si annulla. Nel punto *b)* si era calcolato $f'(x)=\frac{-x(x^3+6x-4)}{(x^3+2)^2}$. Pertanto si hanno punti stazionari per $x=0$ e nelle eventuali soluzioni dell'equazione $x^3+6x-4=0$. Poiché quest'ultima non è risolvibile per via elementare, si consideri la funzione $g(x)=x^3+6x-4$. Essa è continua e assume in R sia valori positivi che negativi. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, ammette almeno uno zero e, essendo la derivata prima $g'(x)=x^2+6$ di segno costante, per non andare contro il teorema di Rolle, esisterà un solo zero.
In conclusione, i punti in cui la curva k ha tangente parallela all'asse x sono due, $x=0$ e l'unica radice dell'equazione $x^3+6x-4=0$.

e) Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a;b]$ ed è derivabile in ogni punto interno a esso, allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.
Essendo la funzione $f(x)=\frac{x^2+2}{x^3+2}$ non definita nel punto $x=-\sqrt[3]{2}$ e $-\sqrt{2}<-\sqrt[3]{2}<0$, essa non è quindi continua nell'intervallo $[-\sqrt{2};0]$. Di conseguenza il teorema di Lagrange non è applicabile.

PROBLEMA 2

a) Tenendo conto che x e a, in quanto lunghezze, sono non negative, le condizioni che devono essere soddisfatte sono la positività delle lunghezze dei lati e le disuguaglianze triangolari:

$$\begin{cases} a+2x>0 \\ a-x>0 \\ 2a-x>0 \\ a+2x<a-x+2a-x \\ a-x<a+2x+2a-x \\ 2a-x<a+2x+a-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+2x>0 \text{ sempre verificato} \\ x<a \\ x<2a \\ x<\dfrac{a}{2} \\ 2x+2a>0 \text{ sempre verificato} \\ 2x>0 \text{ sempre verificato} \end{cases} \rightarrow x<\frac{a}{2}.$$

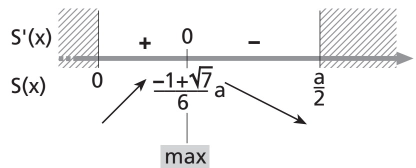
Per avere un triangolo non degenere deve essere $0<x<\dfrac{a}{2}$.

b) Per calcolare l'area del triangolo, noti i lati, si usa la formula di Erone:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ove p è il semiperimetro.

$p=2a \rightarrow S(x)=\sqrt{2a(a-2x)(a+x)x}=\sqrt{2a}\sqrt{-2x^3-ax^2+a^2x}$.

La funzione S è continua nell'intervallo $\left]0;\dfrac{a}{2}\right[$; la sua derivata prima è $S'(x)=\sqrt{2a}\,\dfrac{-6x^2-2ax+a^2}{2\sqrt{-2x^3-ax^2+a^2x}}$. Studiando il suo segno si ricava che $S'(x)>0$ quando $-6x^2-2ax+a^2>0$, che ha soluzione $0<x<a\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$. Lo schema che si ottiene è il seguente (figura 2).

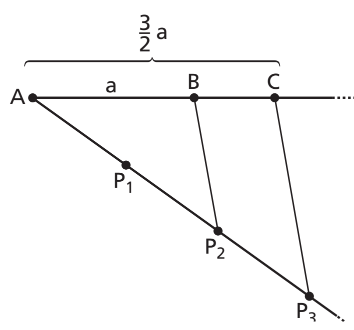


▲ Figura 2.

Pertanto il triangolo non degenere ha area massima per $x=a\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$. Si osservi che per $x=0$ e $x=\dfrac{a}{2}$ la superficie assumerebbe il valore minimo zero ma questi casi corrispondono a triangoli degeneri.

c) Nel punto a) si è trovato che le lunghezze sono lati di un triangolo non degenere quando $0<x<\dfrac{a}{2}$, allora ciò è vero per $x=\dfrac{a}{4}$. In tal caso i lati hanno lunghezze $\dfrac{3}{2}a$, $\dfrac{3}{4}a$ e $\dfrac{7}{4}a$, tutti e tre multipli di a secondo numeri razionali. Dato un segmento che assumiamo di lunghezza a, si costruisce il segmento di lunghezza $\dfrac{m}{n}a$, per esempio, $\dfrac{3}{2}a$, nel seguente modo (figura 3).

Tracciato il segmento AB che misura a, si disegna da A una semiretta non contenente B. Su essa si sceglie un generico punto P_1 e col compasso si riporta per tre volte (il massimo tra m e ed n nel caso generale) il segmento AP_1. Congiunto B con P_2, si manda da P_3 la parallela a BP_2. Il segmento AC per il teorema di Talete ha lunghezza $\dfrac{3}{2}a$.



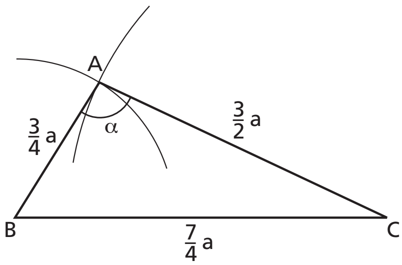
▲ Figura 3.

Allo stesso modo si ottengono i segmenti di lunghezza $\dfrac{3}{4}a$ e $\dfrac{7}{4}a$. La costruzione del triangolo ABC avviene nel piano con l'uso del compasso. Partendo, per esempio, dal segmento più lungo BC (figura 4), si riporta puntando il compasso prima in un estremo poi nell'altro rispettivamente i restanti segmenti trovati. L'intersezione dei due archi individua il punto A.

Si valuta il tipo di triangolo applicando il teorema trigonometrico di Carnot:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\alpha.$$

Ricavando $\cos\alpha$ e sostituendo le lunghezze dei lati, si trova $\cos\alpha = -\frac{1}{9}$. Pertanto il triangolo è ottusangolo.



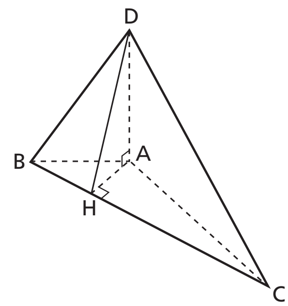
▲ **Figura 4.**

d) Compiuta la costruzione, si tracci da A la perpendicolare a BC e si consideri il triangolo rettangolo HAD (figura 5). L'angolo da valutare è $D\hat{H}A$.

Dai teoremi sui triangoli rettangoli si può scrivere:

$\operatorname{tg} D\hat{H}A = \frac{\overline{DA}}{\overline{HA}}$. $\overline{DA} = a$ per ipotesi, HA è l'altezza del triangolo ABC rispetto alla base BC. Pertanto se S è l'area del triangolo ABC, $\overline{HA} = \frac{2S}{\overline{BC}}$. Dal punto b) del problema si ricava:

$$S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \sqrt{2a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{5a}{4}\cdot\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2.$$



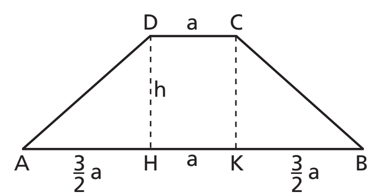
▲ **Figura 5.**

Quindi: $\overline{HA} = \dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{4}a^2}{\frac{7}{4}a} = \frac{2\sqrt{5}}{7}a$ e $\operatorname{tg} D\hat{H}A = \frac{7}{10}\sqrt{5}$, da cui $D\hat{H}A = \operatorname{arctg}\frac{7}{10}\sqrt{5}$. Utilizzando la calcolatrice scientifica si trova: $D\hat{H}A \simeq 57{,}4°$.

QUESTIONARIO

1 Si costruisca un trapezio isoscele $ABCD$ di base minore CD di lunghezza a e altezza h (figura 6).

Per ipotesi risulta $\overline{AB} = 4a$ e $\overline{AH} = \overline{KB} = \frac{3}{2}a$. Compiendo una rotazione attorno alla base maggiore, il solido ottenuto è dato da un cilindro e due coni congruenti. Esso ha quindi volume V_1:



▲ **Figura 6.**

$$V_1 = \pi h^2\cdot a + 2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot\frac{3}{2}a = 2\pi a h^2.$$

Eseguendo una rotazione intorno alla base minore, si ottiene un cilindro con due cavità coniche uguali. Il volume V_2 è:

$$V_2 = \pi h^2\cdot 4a - 2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot\frac{3}{2}a = 3\pi a h^2.$$

Si trova così che il rapporto $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi a h^2}{3\pi a h^2} = \frac{2}{3}$ è indipendente dai valori di a e di h e quindi i dati del problema sono sufficienti.

2 Due tetraedri regolari sono figure simili, pertanto se il rapporto di lunghezze corrispondenti (rapporto di similitudine) è a, allora il rapporto delle aree vale a^2 e il rapporto dei volumi a^3. Per ipotesi $\frac{A'}{A''}=2$, quindi il rapporto di similitudine risulta uguale a $\sqrt{2}$. Ne consegue: $\frac{V'}{V''}=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$.

3 Date le disuguaglianze $a>b$ e $c>d$, per la proprietà dell'addizione di disuguaglianze dello stesso senso vale $a+c>b+d \rightarrow a-d>b-c$. La risposta esatta è B.

4 Siano a e b due numeri reali positivi. La loro media aritmetica è $\frac{a+b}{2}$, mentre quella geometrica vale $\sqrt{ab}$. Bisogna valutare se la disuguaglianza $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ è vera o falsa. Poiché a e b sono positivi, i due membri della disuguaglianza sono anch'essi positivi e si possono elevare entrambi al quadrato: $\frac{(a+b)^2}{4}>ab \rightarrow (a-b)^2>0$. Quest'ultima relazione è sempre verificata per $a\neq b$. Pertanto, non essendoci nessuna ipotesi a questo riguardo, la proprietà del testo è vera soltanto per $a\neq b$.

5 Consideriamo membro a membro la possibile identità.

Primo membro: $\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-3)(x+1)}$.

Secondo membro: $\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}=\frac{x(a+b)+a-3b}{(x-3)(x+1)}$

Per l'identità dei polinomi, i due membri sono uguali se vale il sistema:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-3b=1 \end{cases} \text{cioè} \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

6 La funzione f, essendo riconducibile a un polinomio, è continua nel campo reale e in particolare nell'intervallo chiuso $\left[\frac{1}{2};\, 2\right]$. Vale allora il teorema di Weierstrass, per il quale la funzione ammette il massimo e il minimo assoluto.

7 Si consideri un valore $x_0>0$ tale che $x<x_0<x+1$. Per la proprietà dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione si può scrivere:

$$f(x)=\int_x^{x+1}\ln t\,dt=\int_x^{x_0}\ln t\,dt+\int_{x_0}^{x+1}\ln t\,dt=-\int_{x_0}^{x}\ln t\,dt+\int_{x_0}^{x+1}\ln t\,dt.$$

Per definizione della funzione integrale $F(x)=\int_{x_0}^{x}\ln t\,dt$, risulta:

$$f(x)=F(x+1)-F(x).$$

Derivando membro a membro e alla luce del teorema fondamentale del calcolo integrale si trova:

$$f'(x)=F'(x+1)-F'(x)=\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}.$$

8 Poiché sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange, esiste un punto $c\in\,]1;\,3[$ tale che:

$$f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{f(3)-1}{2}.$$

Essendo $0 \leq f'(x) \leq 2$, risulta $0 \leq \dfrac{f(3)-1}{2} \leq 2$, e quindi $1 \leq f(3) \leq 5$.

9 La condizione di realtà delle radici richiede che il campo di esistenza della funzione soddisfi il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}.$$

Il campo di esistenza contiene solo -1 e 1 e pertanto il luogo è formato da due punti: la risposta esatta è quindi B.

10 Considerati gli integrali $\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2$ e $\int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4$, si compia il cambiamento di variabile $2x = t$:

Se $x = \dfrac{t}{2}$, $dx = \dfrac{1}{2}dt$ quindi

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)\,dt = \ln 2 \rightarrow \int_0^6 f(t)\,dt = \ln 4;$$

$$\int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4 \rightarrow \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)\,dt = \ln 4 \rightarrow \int_2^6 f(t)\,dt = \ln 16;$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ottiene: $\int_0^2 f(t)\,dt = -\ln 4$.

Ora, poiché $\int_0^2 f(x)\,dx = a$ e $\int_0^6 f(x)\,dx = b$, si conclude per confronto che $a = -\ln 4$ e $b = \ln 4$.