ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali a un numero reale a non nullo.
Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche $(x; y)$:

a) si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a;

b) si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x; y)$ che soddisfano al problema;

c) si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;

d) si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;

e) si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

PROBLEMA 2

I raggi $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.
Si chiede di determinare:

a) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';

b) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';

c) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

QUESTIONARIO

1 Se a e b sono numeri positivi assegnati qual è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

2 Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré* (1610-1685), amico di *Blaise Pascal*: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"

3 Assumendo che i risultati – X, 1, 2 – delle 13 partite di Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

4 Calcolare:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

5 Cosa si intende per *funzione periodica*? Qual è il *periodo* di $f(x) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di $\operatorname{sen} 2x$?

6 Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ (p, $q \in \mathbb{R}$), se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

7 Data la funzione: $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 3x$, calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

8 Verificare che la funzione $3x + \ln x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

9 Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos(\pi x)$.

10 Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

a) Tenendo conto che il parametro a non è nullo, le relazioni assegnate dal testo sono:

$$x+y=a \text{ e } \frac{x}{y}=a, \text{ con } x, y \neq 0.$$

$x+y=a \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ è l'equazione di un fascio improprio di rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante esclusa la retta $y=x$, perché $a\neq 0$.

$\frac{x}{y}=a \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ cioè $y=\frac{1}{a}x \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ rappresenta un fascio proprio di rette con centro $(0;0)$, esclusi il punto $(0;0)$ stesso e gli assi cartesiani.

Per quanto detto, confrontando le due equazioni, si deduce che le rette che rappresentano non coincidono per nessun valore di $a\neq 0$, mentre sono parallele per $a=-1$.

Pertanto per $a\neq 0 \wedge a\neq -1$, esse si intersecano in un solo punto.

Si può arrivare alle stesse conclusioni valutando il sistema:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-ay=0 \end{cases}, \text{ con } a\neq 0 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0.$$

Con il metodo di Cramer si trova $\Delta=-a-1$, $\Delta_x=-a^2$, $\Delta_y=-a$. Quindi se $a=-1$ non ci sono soluzioni; se $a\neq -1$ esiste la soluzione $\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{a+1} \\ y=\dfrac{a}{a+1} \end{cases}$.

b) Dal sistema $\begin{cases} x+y=a \\ \dfrac{x}{y}=a \end{cases}$, con $a\neq 0 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$, eliminando a, segue l'equazione cartesiana del luogo γ in forma implicita:

$$x+y=\frac{x}{y} \rightarrow y^2+xy-x=0.$$

c) Le equazioni della simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante sono: $\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$. La trasformata dell'equazione $x=y^2+xy-x=0$, $y\neq 1 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0$ diventa: $x^2+xy-y=0$, ossia in forma esplicita

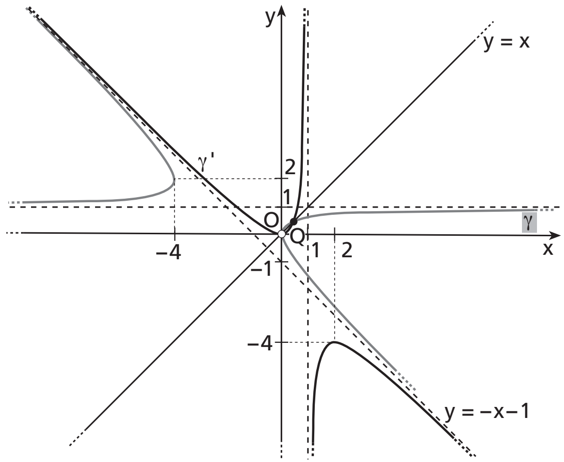
$$\gamma' : y=\frac{x^2}{1-x}, \; x\neq 1 \wedge x\neq 0 \wedge y\neq 0.$$

Si sceglie di studiare dettagliatamente γ' in modo da costruire il grafico di γ per simmetria. Si indichi per comodità con f la funzione della curva γ'.

Il campo di esistenza f è $x\neq 1 \wedge x\neq 0$. La funzione non è né pari né dispari. L'intersezione di $y=\frac{x^2}{1-x}$ con gli assi cartesiani è (0; 0) non accettabile per le C.E.. La funzione è positiva per $x<1 \wedge x\neq 0$, è negativa per $x>1$. I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-x}=0$, quindi $x=0$ è un punto di discontinuità di terza specie; $\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^2}{1-x}=\mp\infty$, $x=1$ è un asintoto verticale; $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x}=\mp\infty$.

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-x^2}=-1$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=-1$, pertanto la funzione ha asintoto obliquo $y=-x-1$.

Lo studio del segno della derivata prima $f'(x)=\frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$ implica che la funzione avrebbe un minimo in $x=0$, se tale punto non fosse escluso dal campo di esistenza, e ha un massimo in $(2;-4)$. Valutando il segno della derivata seconda $f''(x)=\frac{-2}{(x-1)^3}$ si deduce che la concavità è rivolta verso l'alto per $x<1$, verso il basso per $x>1$. Nella figura 1 sono tracciati i grafici di f e della sua simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

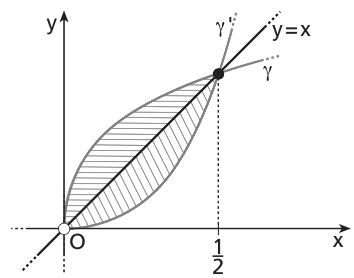


▲ **Figura 1.**

d) Poiché γ e γ' sono due curve simmetriche rispetto alla retta $y=x$, esse devono intersecarsi in punti appartenenti alla retta stessa. Pertanto si determinano tali punti ponendo a sistema l'equazione della curva γ' e l'equazione della bisettrice:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{1-x} \\ y=x \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

I due punti comuni a γ e γ' sono $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ e $O(0,0)$.



▲ **Figura 2.**

Grazie alla simmetria, il calcolo dell'area S, compresa tra le curve γ e γ', si riconduce al calcolo della superficie compresa tra γ' e la retta $y=x$, raddoppiandone poi il risultato.

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{x^2-1+1}{x-1}\right)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=2\Big[x^2+x+\ln|x-1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}-2\ln 2.$$

Si può determinare la superficie S per via numerica calcolando l'integrale $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx$ attraverso il metodo dei trapezi. Si divide l'intervallo $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ in 10 parti uguali e si compila la corrispondente tabella.

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,40	0,45	0,5
$x-\frac{x^2}{1-x}$	0	0,0474	0,0889	0,1235	0,15	0,1667	0,1714	0,1615	0,1333	0,08182	0

Per la formula dei trapezi vale:

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^2}{1-x}\right)dx \simeq 2\,\frac{\frac{1}{2}-0}{10}\left(\frac{0+0}{2}+0{,}0474+0{,}0889+\ldots+0{,}0818\right)=0{,}112452.$$

Si osserva che l'integrale esatto ha valore $\frac{3}{2}-2\ln 2$ che, determinato con la calcolatrice, risulta uguale a 0,1137… .

Pertanto il valore approssimato ottenuto con il metodo dei trapezi è certo fino alla cifra dei centesimi.

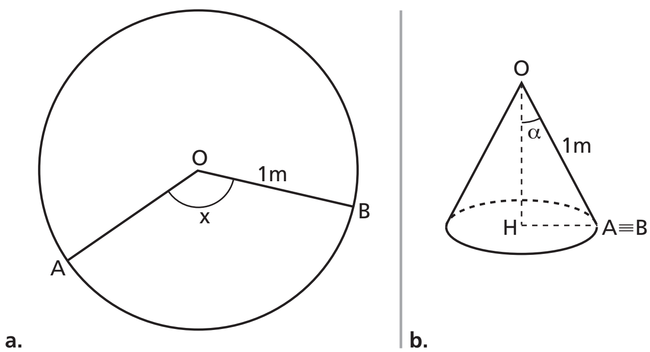
e) Se $x=1$, la relazione $x+y=\frac{x}{y}$ diventa $1+y=\frac{1}{y}$ cioè $y^2+y-1=0$. Ricavando y si trova: $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Si osserva che la relazione $1+y=\frac{1}{y}$ può essere scritta in forma di proporzione cioè $1:y=(1+y):1$.

Applicando la proprietà dello scomporre si ottiene $(1-y):y=y:1$ dove y rappresenta il medio proporzionale fra 1 e quanto rimane togliendo la stessa quantità da 1. La soluzione positiva $y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ rappresenta, per definizione, la parte aurea dell'unità, mentre, il numero 1 è la parte aurea di $\left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right|$ che è il valore assoluto della soluzione negativa.

PROBLEMA 2

a) Considerato il cerchio di centro O e raggio pari a 1 m, lo si tagli in due settori circolari con angoli rispettivamente x e $2\pi-x$ (figura 3a). Unendo fra loro i segmenti OA e OB si ricavano due coni di apotema uguale a 1 m e circonferenza di base pari all'arco $\widehat{AOB}$ del corrispondente settore circolare ottenuto dal cerchio di partenza (figura 3b).



◀ **Figura 3.**

Il volume V del cono C (figura 3b), corrispondente al settore circolare di ampiezza x, è $V=\frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2\cdot\overline{OH}$.

Ora, $\overline{AH}$ è il raggio della circonferenza la cui lunghezza è pari all'arco $\widehat{AOB}$. Poiché un arco di una circonferenza è dato dal prodotto del raggio per l'angolo corrispondente espresso in radianti, si ha $\widehat{AOB}=1\cdot x=x$; pertanto $\overline{AH}=\frac{\widehat{AOB}}{2\pi}\to\overline{AH}=\frac{x}{2\pi}$. Applicando il teorema di Pitagora si trova $\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}$ ovvero $OH=\sqrt{1-\frac{x^2}{4\pi^2}}$.

Il volume del cono C risulta quindi:

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{x^2}{4\pi^2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4\pi^2}}=\frac{x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-x^2}. \qquad (1)$$

Si studiano gli estremanti della funzione $V(x)=\dfrac{x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-x^2}$ per $x\in[0;2\pi]$, considerando il segno della derivata prima. Poiché $V'=\dfrac{x(8\pi^2-3x^2)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}$ e tenendo conto dell'intervallo di definizione di x, la derivata è positiva per $0<x<\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$, nulla per $x=\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$ e negativa per $\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi<x<2\pi$.

Quindi il volume del cono C è massimo per il settore circolare di ampiezza $x=\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$.

L'arco corrispondente ha lunghezza $\overset{\frown}{AOB}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$ m; il rapporto percentuale con il cerchio vale:

$$\frac{\sqrt{\frac{8}{3}}\pi}{2\pi}=\sqrt{\frac{2}{3}}\simeq 81{,}6\,\%.$$

Il volume massimo del cono C risulta: $V_{\max}=\dfrac{\frac{8}{3}\pi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\dfrac{8}{3}\pi^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi\,\text{m}^3$.

Si calcola ora il volume del cono C' dalla formula (1), assegnando a x il valore $2\pi-\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$.

$$V'=\frac{\left(2\pi-\sqrt{\frac{8}{3}}\pi\right)^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\left(2\pi-\sqrt{\frac{8}{3}}\pi\right)^2}$$

$$=\frac{5-2\sqrt{6}}{18}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{6}-2}{3}}=\frac{5-2\sqrt{6}}{9}\sqrt{\frac{2\sqrt{6}-2}{3}}\pi\,\text{m}^3.$$

b) Utilizzando l'equivalenza tra litri e m^3, ovvero $1\ \text{m}^3=1000$ l, si ricava:

$V\approx 0{,}40307\,\text{m}^3=403{,}07$ l;

$V'\approx 0{,}03466\,\text{m}^3=34{,}66$ l.

Pertanto la capacità complessiva dei due coni è uguale a $403{,}07\ \text{l}+34{,}66\ \text{l}=437{,}73$ l.

c) Osservando la figura 2b il cono C ha angolo di apertura $\alpha=\text{arcsen}\dfrac{\overline{AH}}{\overline{OA}}=\text{arcsen}\,\overline{AH}$ (perché $\overline{OA}=1$).

Nella risoluzione del punto a) del problema si era determinato $\overline{AH}=\dfrac{x}{2\pi}$.

Poiché $x=\sqrt{\dfrac{8}{3}}\pi$, risulta $\overline{AH}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Pertanto $\alpha=\text{arcsen}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Se si vuole esprimere l'angolo in gradi sessagesimali, basta utilizzare la calcolatrice scientifica nella modalità DEG e calcolare il valore attraverso il tasto della funzione arcoseno di cui l'apparecchio è comunemente provvisto . Si trova: $\alpha°=54{,}73561032°\simeq 54°\,44'\,8''$.

Un calcolo approssimato dell'angolo α, il cui seno vale $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, può essere compiuto cercando la radice dell'equazione $\text{sen}\,x-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=0$ nell'intervallo $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. La funzione $f(x)=\text{sen}\,x-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ è continua e strettamente crescente e assume agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto. Pertanto la funzione ammette un unico zero. Per determinare tale valore, si utilizza il metodo delle tangenti. Poiché $f''(x) = = \operatorname{sen} x$ è sempre negativa nell'intervallo e $f(0) < 0$, si utilizza come ascissa iniziale $x = 0$. Si costruisce la tabella con la formula di ricorrenza delle tangenti compiendo 6 passi.

n	x_n (RAD)	x_n (°)
0	0,00000	0,0000000
1	0,81650	46,7818081
2	0,94463	54,1235068
3	0,95524	54,7310780
4	0,95532	54,7356101
5	0,95532	54,7356103
6	0,95532	54,7356103

Si osserva che il valore trovato, cioè $\alpha° \simeq 54{,}73561°$, ha cifre certe fino alla quinta cifra dopo la virgola.

QUESTIONARIO

1 Siano a e b due numeri reali positivi. La loro media aritmetica è $M = \frac{a+b}{2}$, mentre quella geometrica è $G = \sqrt{ab}$. Si valuta se $M \geq G$ cioè se la relazione $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ è vera o falsa. Poiché a e b sono positivi, i due membri della disuguaglianza sono anch'essi positivi e si possono elevare entrambi al quadrato: $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \rightarrow (a-b)^2 \geq 0$. Quest'ultima relazione è sempre verificata per qualsiasi a e b. Si osserva che vale il segno di uguale se e solo se $a = b$.
Pertanto, la media aritmetica tra due numeri positivi, diversi tra loro, è maggiore della media geometrica; se i due numeri sono uguali le medie coincidono.
In generale, se i numeri assegnati sono n, x_1, x_2, …, x_n, la media aritmetica è il quoziente fra la loro somma e il numero n, $M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, mentre la media geometrica è la radice n-esima del prodotto degli n valori, $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

2 Inizialmente si deve determinare la probabilità che, lanciando quattro volte un dado, esca almeno una volta il numero 1.
La probabilità che in un lancio esca 1 è $\frac{1}{6}$. Ogni lancio è indipendente dall'altro e la probabilità che non esca mai il numero 1 in quattro lanci è una probabilità composta per eventi indipendenti. Essa vale:

$$P(\text{“in quattro lanci non esce mai 1”}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Poiché “il numero 1 esce almeno una volta” è l'evento contrario, si trova:

$$P(\text{“il numero 1 esce almeno una volta”}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \simeq 0{,}5177.$$

Per calcolare la probabilità del doppio 1 con ventiquattro lanci, si ragiona in modo analogo, tenendo conto che i lanci dei due dadi sono indipendenti:

$$P(\text{“esce un doppio 1”}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$P(\text{“in 24 lanci non esce mai il doppio 1”}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$,

$P(\text{“in 24 lanci il doppio 1 esce almeno una volta”}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0{,}4914$.

Confrontando i due risultati si deduce che è maggiore la probabilità del primo evento.

3 La probabilità che una partita finisca in parità vale $\frac{1}{3}$ e la probabilità che ciò non accada è $\frac{2}{3}$. Il calcolo della probabilità che tutte le tredici partite, eccetto una, terminino in parità, si può ricondurre allo schema delle prove ripetute o di Bernoulli e cioè che su 13 prove si abbiano 12 successi. Pertanto la probabilità P cercata vale:

$$P = \binom{13}{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 13 \cdot \frac{2}{3^{13}} = \frac{26}{3^{13}}.$$

4 Si tratta di calcolare il limite della successione $\frac{3^n}{n!}$. Per $n \to +\infty$, si ha la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Si scriva per esteso l'espressione $\frac{3^n}{n!}$:

$$\frac{3^n}{n!} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n}.$$

Si associno i fattori nel seguente modo:

$$\left(\frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{3}{n}\right).$$

Per $n \to +\infty$, cioè per n grande, il primo fattore è costante, il secondo fattore è minore di 1. Si può scrivere allora la seguente disuguaglianza:

$$0 \leq \frac{3^n}{n!} = \left(\frac{9}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{3}{n}\right) \leq \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{n} \quad \to \quad 0 \leq \frac{3^n}{n!} \leq \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{n}.$$

Poiché $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{27}{2n} = 0$, per il teorema del confronto vale: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

5 Una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$ si dice periodica di periodo T, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, si ha: $f(x) = f(x + kT)$ per ogni x del dominio di f.

Si determina il periodo di $f(x) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$, considerando la definizione di periodo stesso:

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{3} kT\right).$$

Poiché il periodo del seno è 2π, deve valere $\frac{\pi}{3} T = 2\pi$ cioè $T = 6$.

Allo stesso modo si calcola il periodo di $\operatorname{sen} 2x$:

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(2x + 2kT).$$

Quindi $2T = 2\pi \to T = \pi$.

6 Considerata la funzione $f(x) = x^n + px + q$, essa è continua e derivabile nel campo reale. La sua derivata vale $f'(x) = nx^{n-1} + p$. Si ricorda che se a e b sono due punti per cui $f(a) = f(b) = 0$, si può applicare il teorema di Rolle: esiste un punto c interno all'intervallo $[a; b]$ tale che: $f'(c) = 0$.
Nel caso particolare si valuta l'equazione $f'(x) = 0$ cioè $nx^{n-1} + p = 0$.

Se n è pari e quindi $n-1$ dispari, essa ammette una e una sola radice reale. Pertanto se ci fossero tre punti per cui $f(a) = = f(b) = f(d) = 0$, ci dovrebbero essere due punti interni agli intervalli $[a; b]$ e $[b; d]$ per cui la derivata è nulla. Ciò va contro l'unicità della soluzione di $nx^{n-1} + p = 0$.
Se, invece, n è dispari, cioè $n-1$ pari, l'equazione $nx^{n-1} + p = 0$ ammette sempre due soluzioni se $p < 0$, nessuna soluzione se $p > 0$.
Per $p < 0$, ci sono al più tre soluzioni di $f(x) = 0$, poiché se ce ne fossero quattro, si andrebbe contro l'unicità di solo due radici per $nx^{n-1} + p = 0$.
Se $p > 0$, c'è al più una soluzione di $f(x) = 0$; infatti se ce ne fossero due, per il teorema di Rolle esisterebbe un punto in cui la derivata si annulla e questo andrebbe contro alla non esistenza della soluzione dell'equazione $nx^{n-1} + p = 0$.

7 Si calcolano i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} - \dfrac{3x}{e^x}\right)$,

poiché $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x} = 0$ per il teorema del confronto e $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{e^x} = 0$ per il teorema di De L'Hospital, risulta $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - \operatorname{sen} x - 3x) = +\infty$, essendo sen$x$ una funzione limitata ed $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$.

Per la seconda parte della domanda, si calcola $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = e - \operatorname{sen} 1 - 3 < 0$. Poiché la funzione è continua si applica il teorema degli zeri ovvero esiste un valore $\alpha \in]0; 1[$ tale che $f(\alpha) = 0$.

8 La funzione $f(x) = 3x + \ln x$ è definita e continua nell'intervallo $]0; +\infty[$. La sua derivata prima vale $f'(x) = = 3 + \dfrac{1}{x}$. Poiché $f'(x) > 0$ nel dominio, la funzione è strettamente crescente.
Pertanto si tratta di una funzione biunivoca per la quale esiste la funzione inversa g.
Per il teorema sulla derivata della funzione inversa risulta: $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ con $y_0 = f(x_0)$.
Se $y_0 = 3$, x_0 soddisfa l'equazione $3x_0 + \ln x_0 = 3$. Quest'ultima è un'equazione trascendente. Si osserva che $x_0 = 1$ è una sua soluzione che è unica per la stretta monotonia della funzione corrispondente. Si ricava che allora che $g'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{1}} = \dfrac{1}{4}$.

9 Per il teorema del calcolo integrale, posto $\int_0^x f(t) = F(x)$, risulta $f(x) = F'(x)$. Nel caso in questione $F(x) = x\cos(\pi x)$, pertanto si ha: $f(x) = D[x\cos(\pi x)] = \cos(\pi x) - \pi x \operatorname{sen}(\pi x)$.
Per $x = 4$, $f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \operatorname{sen} 4\pi = 1 - 0 = 1$.

10 In un piano cartesiano Oxy, un'omotetia di rapporto $k (k \neq 0)$ e centro C è quella trasformazione che associa a un punto P il punto P' tale che $\vec{CP'} = k \cdot \vec{CP}$. Le equazioni della trasformazione sono:

$$\omega_{C,k}: \begin{cases} x' = k(x - x_C) + x_C \\ y' = k(y - y_C) + y_C \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = kx + x_C(1-k) \\ y' = ky + y_C(1-k) \end{cases}.$$

Una similitudine di rapporto h è una trasformazione che mantiene costante il rapporto tra segmenti corrispondenti cioè, comunque si scelgano due punti A e B, considerati i loro trasformati A' e B', si ha: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = h$.

Le equazioni della similitudine sono della forma:

$$\sigma_1 : \begin{cases} x' = mx - ny + c \\ y' = nx + my + c' \end{cases} \text{ oppure } \sigma_2 : \begin{cases} x' = mx + ny + c \\ y' = nx - my + c' \end{cases}, \text{ con } h = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Nel primo caso si parla di similitudine diretta, nel secondo, indiretta.

Un'omotetia è un caso particolare di similitudine: infatti, ponendo $m = k$ e $n = 0$ nelle trasformazioni della similitudine diretta, si ottiene un'omotetia. Non vale però il viceversa: una similitudine non è necessariamente un'omotetia. Per esempio, tutte le similitudini indirette non sono omotetie.

Dal punto di vista geometrico, un'omotetia trasforma una retta in una retta a essa parallela. Non tutte le similitudini possiedono tale proprietà: per esempio, nella simmetria assiale, che è una similitudine, solo le rette parallele o perpendicolari all'asse di simmetria sono parallele alla propria trasformata.