ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (Oxy) è assegnata la funzione:

$$y=\frac{a+b\log x}{x}$$

ove $\log x$ denota il logaritmo naturale di x e a e b sono numeri reali non nulli.

a) Si trovino i valori di a e b per i quali il grafico G della funzione passa per i punti $(e^{-1}; 0)$ e $(e^2; 3e^{-2})$;
b) si studi e si disegni G;
c) si determini l'equazione della curva G' simmetrica di G rispetto alla retta $y=y(1)$;
d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per $1\leq x\leq 2$, da G e da G';
e) si disegnino, per i valori di a e b trovati, i grafici di:

$$y=\frac{a+b\log|x|}{|x|},\quad y=\left|\frac{a+b\log x}{x}\right|.$$

PROBLEMA 2

È data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;
b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;
c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto $r=1$ metro;
d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;
e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

QUESTIONARIO

1 Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).

2 Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

3 Calcolare la derivata rispetto a x della funzione $\int_x^b f(t)dt$, ove $f(x)$ è una funzione continua.

4 Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 \, dt}{x^4}.$$

5 Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $e^x \operatorname{sen} x = 1$ c'è almeno una radice reale di $e^x \cos x = -1$.

6 Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

7 Verificare che la funzione:

$$y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$$

è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(0)$.

8 Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x} dx$$

con un errore inferiore a 10^{-4}.

9 Verificato che l'equazione $\cos x - \log x = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

10 Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra «*concetto primitivo*» e «*assioma*» .

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Imponendo il passaggio del grafico G per i punti assegnati si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{a-b}{e^{-1}} \\ 3e^{-2} = \dfrac{a+2b}{e^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+2b=3 \end{cases}$$

Tale sistema ha per soluzione $a=b=1$. La funzione corrispondente a questi valori dei parametri è $f(x) = \dfrac{1+\log x}{x}$.

b) Il campo di esistenza della funzione f è l'intervallo $D =]0; +\infty[$. Quindi G non interseca l'asse y, mentre interseca l'asse x nel punto $(e^{-1}; 0)$. Inoltre la funzione è positiva per $x > e^{-1}$ e negativa per $0 < x < e^{-1}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza:

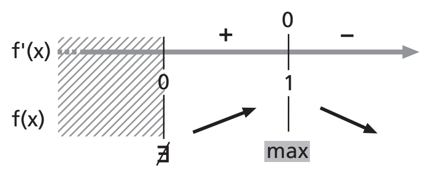
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\log x}{x} = -\infty$$

e, per il teorema di De L'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

La curva ha asintoto verticale $x=0$ e asintoto orizzontale $y=0$.
Studiamo la derivata prima:

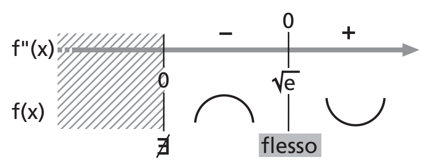
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\log x)}{x^2} = -\frac{\log x}{x^2}.$$



▲ **Figura 1.**

Tale derivata è positiva per $0 < x < 1$, negativa per $x > 1$ e nulla solo in $x = 1$. Nella figura 1 è riportato il quadro dei segni della derivata prima. Per $x=1$ la funzione presenta un massimo assoluto. Tale massimo ha immagine $f(1) = 1$.
Studiamo ora la derivata seconda:

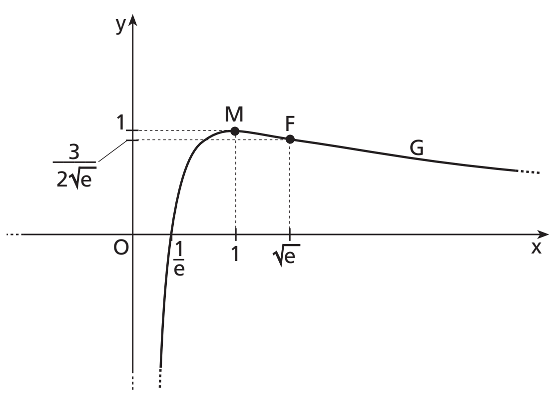
$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\log x}{x^4} = \frac{2\log x - 1}{x^3}.$$



▲ **Figura 2.**

Il denominatore di tale derivata è sempre positivo nel campo di esistenza della funzione, quindi $f''(x)$ è positiva se $2\log x - 1 > 0$, cioè se $x > \sqrt{e}$, negativa se $0 < x < \sqrt{e}$ e nulla solo in $x = \sqrt{e}$ (figura 2).
La funzione f ha un flesso nel punto $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$, cioè in $F\left(\sqrt{e}; \dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.

Il grafico G della funzione f è rappresentato nella figura 3.



▶ **Figura 3.**

c) Le equazioni della simmetria rispetto al generico asse $y = c$ sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2c - y \end{cases}$$

Nel nostro caso, l'asse è $y = y(1) = 1$ e quindi la trasformazione ha equazioni:

$$s: \begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$$

Sostituendo tali relazioni nell'equazione $y = \dfrac{1 + \log x}{x}$, si ottiene:

$$2 - y' = \frac{1 + \log x'}{x'}.$$

Dunque la curva G' ha equazione $y = \dfrac{2x - 1 - \log x}{x}$.

d) Rappresentiamo nella figura 4 i grafici G e G' ed evidenziamo la superficie richiesta.

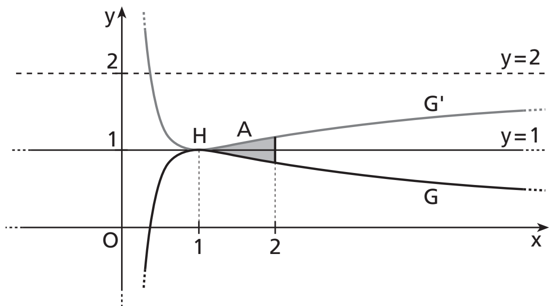


Figura 4.

Secondo il calcolo integrale, l'area vale:

$$\int_1^2 \left(\frac{2x - 1 - \log x}{x} - \frac{1 + \log x}{x} \right) dx = 2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x} \right) dx.$$

Per il calcolo approssimato di tale integrale utilizziamo il metodo dei trapezi. Non avendo alcun vincolo sulla precisione dell'approssimazione, scegliamo una suddivisione dell'intervallo [1; 2] in 4 sottointervalli di ampiezza $h = \dfrac{1}{4}$ mediante i cinque punti $x_k = 1 + k\dfrac{1}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Sia $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{\log x}{x}$. L'approssimazione fornita dal metodo dei trapezi si esprime nel seguente modo:

$$2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x} \right) dx \simeq 2 \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{g(1) + g(2)}{2} + g\left(\frac{5}{4}\right) + g\left(\frac{6}{4}\right) + g\left(\frac{7}{4}\right) \right].$$

Con l'aiuto di una calcolatrice scientifica ricaviamo un'approssimazione dei valori di $g(x)$, ottenendo:

$$2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x} \right) dx \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{0 + 0{,}153}{2} + 0{,}021 + 0{,}063 + 0{,}109 \right) \simeq 0{,}135.$$

Osserviamo che l'integrale di partenza può essere calcolato con esattezza:

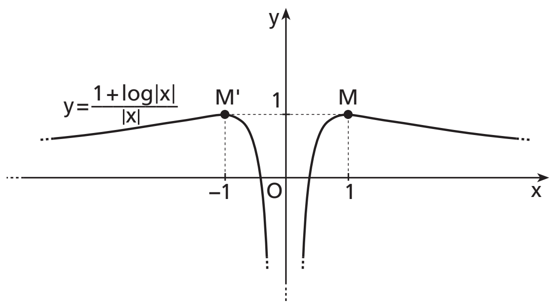
$$2 \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x} \right) dx = 2 \left[x - \log x - \frac{\log^2 x}{2} \right]_1^2 = 2 - 2\log 2 - \log^2 2 = 0{,}133\ldots$$

e) Disegniamo il grafico di $y = \dfrac{1+\log|x|}{|x|}$.

Osserviamo che si può scrivere:

$$y = \frac{1+\log|x|}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{1+\log x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1+\log(-x)}{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi il grafico di tale funzione coincide con G per $x > 0$, mentre è il simmetrico di G rispetto all'asse y per $x < 0$ (figura 5).

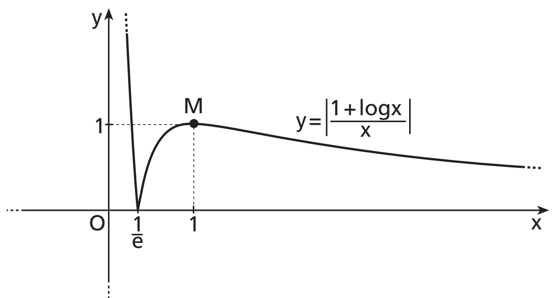


▶ **Figura 5.**

Per rappresentare la funzione $y = \left|\dfrac{1+\log x}{x}\right|$ notiamo che si può scrivere:

$$y = \left|\frac{1+\log x}{x}\right| = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione è tracciato nella figura 6.



▶ **Figura 6.**

PROBLEMA 2

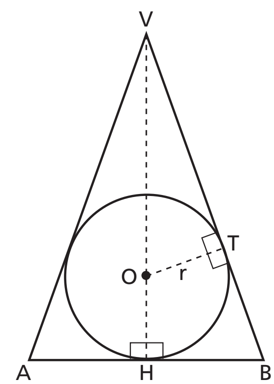
a) La figura 7 mostra una sezione del cono C circoscritto alla sfera, ottenuta sezionando con un piano passante per il vertice V e perpendicolare alla base. Scegliamo come incognita la misura dell'altezza del cono, cioè $x = \overline{VH}$. Tale incognita può variare nell'intervallo $]2r; +\infty[$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo VOT si ottiene:

$$\overline{VT} = \sqrt{\overline{VO}^2 - \overline{OT}^2} = \sqrt{(x-r)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2rx}.$$

Poiché i triangoli VOT e VBH sono simili (in quanto triangoli rettangoli con un angolo acuto in comune), si ha che $\overline{VT} : \overline{OT} = \overline{VH} : \overline{HB}$, da cui:

$$\overline{HB} = \frac{\overline{OT} \cdot \overline{VH}}{\overline{VT}} = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}}.$$



▲ **Figura 7.**

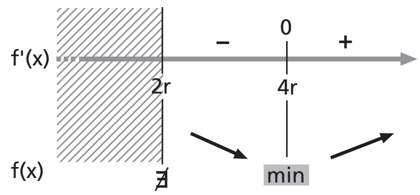
Il volume del cono C è:

$$V_C = \frac{\pi}{3}\overline{HB}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot \frac{x^2}{x-2r}.$$

Determiniamo il minimo della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2r}$ nell'intervallo $]2r; +\infty[$, calcolando la derivata prima della f:

$$f'(x) = \frac{2x(x-2r) - x^2}{(x-2r)^2} = \frac{x^2 - 4rx}{(x-2r)^2}.$$

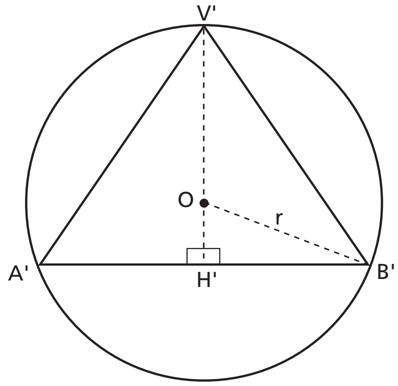
Lo schema in figura 8 riassume il segno della derivata prima.



▲ **Figura 8.**

Si deduce che la funzione ha un minimo assoluto per $x = 4r$. In corrispondenza di tale valore il volume del cono C vale $\frac{8}{3}\pi r^3$.

b) La figura 9 rappresenta una sezione del cono inscritto alla sfera, ottenuta sezionando con un piano passante per il vertice V' e perpendicolare alla base.



◀ **Figura 9.**

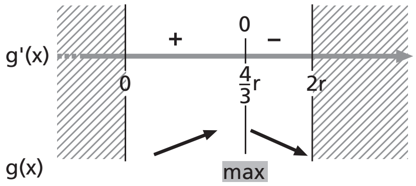
Scegliamo come incognita la misura dell'altezza del cono, cioè $x = \overline{V'H'}$, con $x \in]0; 2r[$. Ne segue che $\overline{OH'} = |x - r|$ e, per il teorema di Pitagora, $\overline{H'B'} = \sqrt{\overline{OB'} - \overline{OH'}^2} = \sqrt{r^2 - |x - r|^2} = \sqrt{2rx - x^2}$.
Il volume del cono C' è pertanto:

$$V_{C'} = \frac{\pi}{3}\overline{H'B'}^2 \cdot \overline{V'H'} = \frac{\pi}{3}(2rx - x^2)x = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3).$$

Determiniamo il massimo della funzione $g(x) = 2rx^2 - x^3$ nell'intervallo $]0; 2r[$.

$$g'(x) = 4rx - 3x^2 = x(4r - 3x).$$

Lo schema della figura 10 riassume il segno della derivata prima.
Si ha il massimo assoluto della funzione g per $x = \frac{4}{3}r$. In corrispondenza di tale valore il volume del cono C' vale $\frac{32}{81}\pi r^3$.



▲ **Figura 10.**

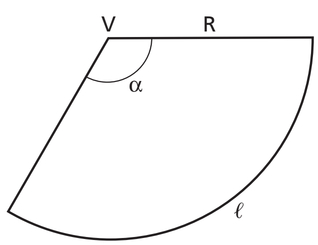
c) Ponendo $r = 1$ metro e tenendo conto che 1 m^3 corrisponde a 1000 litri, il volume in litri del cono C vale:

$$V_C = \frac{8}{3}\pi \text{ m}^3 \simeq 8{,}37758 \text{ m}^3 = 8377{,}58 \text{ litri}.$$

Il volume, in litri, del cono C' è invece:

$$V_{C'} = \frac{32}{81}\pi \text{ m}^3 \simeq 1{,}24112 \text{ m}^3 = 1241{,}12 \text{ litri}.$$

d) Sia α l'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C, come mostrato nella figura 11.



▲ **Figura 11.**

La misura in radianti dell'angolo α è, per definizione, il rapporto fra la lunghezza l dell'arco da esso sotteso (uguale alla lunghezza della circonferenza di base del cono) e il raggio R del settore circolare (che è uguale a $\overline{VA}$ di figura 7).
L'arco l è: $l = 2\pi \cdot \overline{HB}$; sostituendo $x = \overline{VH} = 4r$ nell'espressione di $\overline{HB}$ trovata nel punto a), otteniamo che $\overline{AH} = \overline{HB} = \sqrt{2}\,r$ e quindi $l = 2\pi\sqrt{2}\,r$. Applicando poi il teorema di Pitagora al triangolo AVH, si trova:

$$R = \overline{VA} = \sqrt{(4r)^2 + (\sqrt{2}\,r)^2} = 3\sqrt{2}\,r.$$

In conclusione, la misura in radianti di α è $\dfrac{2\pi\,\overline{HB}}{\overline{VA}} = \dfrac{2\pi \cdot \sqrt{2}\,r}{3\sqrt{2}\,r} = \dfrac{2}{3}\pi$ e quindi, in gradi sessagesimali, vale 120°.

e) Si chiede un'approssimazione della misura dell'angolo $H\hat{V}B$ del cono C. Sappiamo che $\operatorname{sen}(H\hat{V}B) = \dfrac{\overline{HB}}{\overline{VB}} = \dfrac{1}{3}$, pertanto tale angolo vale $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Cerchiamo di approssimare la soluzione dell'equazione $h(x) = 0$, con $h(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3}$ nell'intervallo [0; 90°], con un errore, ad esempio, inferiore al centesimo di grado.

Nell'intervallo [0; 90°] la funzione $y = \operatorname{sen} x$ è crescente, inoltre $\operatorname{sen} 0 = 0 < \dfrac{1}{3}$, mentre $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$.

Possiamo quindi concludere che la soluzione x cercata è tale che $0 < x < 30°$.
Utilizziamo il metodo di bisezione restringendo l'intervallo [0; 30°] di partenza in successivi intervalli $[a_n; b_n]$ finché $\varepsilon_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} < 0{,}01°$.

n	a_n	b_n	$m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	ε_n
0	0	30	15	15
1	15	30	22,5	7,5
2	15	22,5	18,75	3,75
3	18,75	22,5	20,265	1,875
4	18,75	20,625	19,6875	0,9375
5	18,75	19,6875	19,21875	0,46875
6	19,21875	19,6875	19,453125	0,234375
7	19,453125	19,6875	19,5703125	0,11711875
8	19,453125	19,5703125	19,51171875	0,05859375
9	19,453125	19,51171875	19,48242188	0,02929688
10	19,453125	19,48242188	19,46777344	0,01464844
11	19,46777344	19,48242188	19,47509766	0,00732422

Un'approssimazione della soluzione a meno di 0,01 è, dunque, $19{,}47509766 \simeq 19°28'30''$.
Possiamo controllare tale risultato utilizzando la funzione «$\sin^{-1}$» di una calcolatrice scientifica: si ottiene $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 19{,}47122063\ldots$

QUESTIONARIO

1 Il numero dei possibili gruppi formati da 4 elementi, estratti da un insieme di 90 elementi distinti, che differiscono per almeno un elemento, sono le combinazioni $C_{90,4}$:

$$C_{90,4} = \binom{90}{4} = \frac{90!}{(90-4)! \cdot 4!} = 2555190.$$

La probabilità di estrarre una particolare quaterna, nel nostro caso (7, 47, 67, 87), è data da:

$$P = \frac{1}{2555190} \simeq 0{,}000000391 = 3{,}91 \cdot 10^{-7}.$$

2 L'evento considerato E è l'evento composto dei seguenti dieci eventi indipendenti:

E_i = "in un lancio esce testa o croce", con $i = 1, 2, 3, 4$,
E_k = "in un lancio esce testa", con $k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Poiché $p(E_i) = 1$ e $p(E_k) = \frac{1}{2}$, risulta:

$$p(E) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}.$$

3 Per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale $D\left[\int_b^x f(t)dt\right] = f(x)$. Quindi:

$$D\left[\int_x^b f(t)dt\right] = D\left[-\int_b^x f(t)dt\right] = -f(x).$$

4 Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo il teorema di De L'Hospital, calcolando la derivata del numeratore tramite il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3} =$$

per il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ risulta $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} = 1$ e quindi:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

5 Siano a e b due soluzioni dell'equazione $e^x \operatorname{sen} x = 1$. Dalla relazione $e^x \operatorname{sen} x = 1$ ricaviamo $\operatorname{sen} x = e^{-x}$. Consideriamo ora la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x - e^{-x}$. Si ha $f(a) = f(b) = 0$. Inoltre f è continua e derivabile nell'intervallo $]a; b[$. Pertanto la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[a; b]$. Esiste quindi un punto c interno all'intervallo tale che $f'(c) = 0$. Essendo $f'(x) = \cos x + e^{-x}$, si ha che $f'(c) = \cos c + e^{-c} = 0$. Pertanto c è soluzione dell'equazione $\cos x = -e^{-x}$; ossia $e^x \cos x = -1$.

6 Consideriamo la funzione $f(t)=\log t$ nell'intervallo $[1;\ x]$. Essa è derivabile e continua in tale intervallo. Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di Lagrange. Ne segue che esiste un punto $c\in\,]1;\ x[$ tale che $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$, cioè $\frac{\log x-\log 1}{x-1}=\frac{1}{c}$. Pertanto vale $\frac{1}{c}=\frac{\log x}{x-1}$.

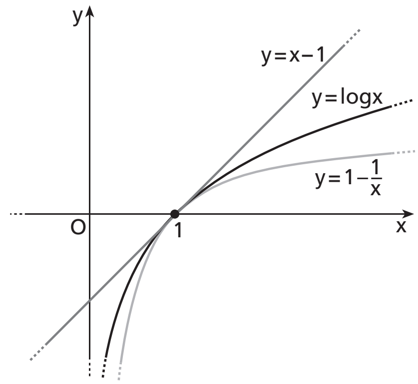
Inoltre, essendo $1<c<x$, si ha che $\frac{1}{x}<\frac{1}{c}<1$. Ne segue:

$$\frac{1}{x}<\frac{\log x}{x-1}<1.$$

Moltiplicando per $x-1>0$ i termini della doppia disuguaglianza si ottiene:

$$\frac{x-1}{x}<\log x<x-1 \ \rightarrow\ 1-\frac{1}{x}<\log x<x-1.$$

La figura 12 mostra come il grafico della funzione $y=\log x$ sia compreso nella regione delimitata dai grafici del ramo di iperbole $y=1-\frac{1}{x}$, con $x>1$, e della retta $y=x-1$.



▲ **Figura 12.**

7 La funzione $f(x)=\frac{1-e^{1-x}}{1+e^{1-x}}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, in quanto il denominatore non si annulla per nessun valore di x. Calcoliamo la derivata prima di f:

$$f'(x)=\frac{e^{1-x}(1+e^{1-x})-(1-e^{1-x})(-e^{1-x})}{(1+e^{1-x})^2}=\frac{2e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}.$$

Essa è positiva per ogni valore di x. Quindi f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Pertanto la funzione f è invertibile.

Definita la funzione inversa $g(x)=f^{-1}(x)$, calcoliamo $g'(0)$. Osserviamo che $f(1)=0$, cioè $f^{-1}(0)=1$. Quindi, ricordando il teorema di derivazione della funzione inversa, risulta:

$$g'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{2}{4}}=2.$$

8 Valutiamo l'integrale definito della funzione $f(x)=\frac{\log x}{x}$ nell'intervallo $[1;\ 3]$ attraverso il metodo delle parabole. La funzione ammette derivata quarta continua su $[1;\ 3]$, $f^{(4)}(x)=\frac{24\log x-50}{x^5}$. Il massimo del valore assoluto di tale derivata nell'intervallo considerato vale $M=50$. Indicato con $2n$ il numero di parti in cui dividiamo l'intervallo generico $[a;\ b]$, è noto che l'errore che si compie con il metodo delle parabole è minore o uguale a ε_n, con:

$$\varepsilon_n=\frac{(b-a)^5}{2880n^4}\cdot M.$$

Nel nostro caso $\varepsilon_n=\frac{(3-1)^5}{2880n^4}\cdot 50=\frac{5}{9n^4}$.

Posto $\frac{5}{9n^4}<10^{-4}$ si ricava $n>\sqrt[4]{\frac{10^4\cdot 5}{9}}\simeq 8{,}63$. Pertanto, preso $n=9$, dividiamo l'intervallo $[1;\ 3]$ in diciotto sottointervalli di ampiezza $h=\frac{3-1}{18}=\frac{1}{9}$. Costruiamo la seguente tabella.

a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
1	$\frac{10}{9}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{14}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{17}{9}$	$\frac{6}{3}$
$f(a)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
0	0,09482	0,16419	0,21576	0,25458	0,28404	0,3065	0,32364	0,3367	0,34657

x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	b
$\frac{19}{9}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{26}{9}$	3
y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}	$f(b)$
0,35394	0,35933	0,36313	0,36565	0,36715	0,36781	0,36779	0,36722	0,3662

Applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson:

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x}\,dx \simeq \frac{h}{3}[f(a)+f(b)+2(y_2+y_4+y_6+\ldots+y_{16})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+\ldots+y_{17})]=0{,}60346.$$

Osserviamo che tale integrale è calcolabile esattamente e il suo valore è:

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}[\log^2 x]_1^3 = \frac{1}{2}\log^2 3 = 0{,}6034744\ldots$$

Si osserva che l'errore commesso, di circa $1{,}4\cdot 10^{-5}$, è inferiore a quello richiesto (10^{-4}).

9 La funzione $f(x)=\cos x - \log x$ è continua su [1; 2], ammette derivata prima $f'(x)=-\operatorname{sen} x-\frac{1}{x}$ che risulta negativa in tale intervallo. Inoltre vale $f(1)>0$ e $f(2)<0$. Per il primo teorema dell'unicità dello zero, la funzione ammette un unico zero nell'intervallo [1; 2]. Ricaviamo un'approssimazione di tale zero a meno di 0,1 procedendo con il metodo iterativo della bisezione, restringendo l'intervallo [1; 2] di partenza in successivi intervalli $[a;\ b]$ finché $\frac{b-a}{2}<0{,}1$.

n	a_n	b_n	$\frac{a_n+b_n}{2}$	ε_n
0	1	2	1,5	0,5
1	1	1,5	1,25	0,25
2	1,25	1,5	1,375	0,125
3	1,25	1,375	1,3125	0,0625

Un'approssimazione della soluzione a meno di 0,1 è pertanto 1,3125.

10 In matematica vi sono alcuni «oggetti» che non si definiscono ma vengono accettati come noti. Essi sono detti «concetti primitivi» o «enti primitivi». Ad esempio, gli enti primitivi della geometria euclidea dello spazio sono il punto, la retta e il piano. A partire da questi oggetti si definiscono tutti gli altri. Gli «assiomi» o «postulati» chiariscono la natura degli enti primitivi fornendone le proprietà di base. Più precisamente, gli assiomi sono proposizioni accettate come vere, senza dimostrazione, che stabiliscono le relazioni che intercorrono tra gli enti primitivi nella particolare branca della matematica alla quale si riferiscono. Ad esempio, nella geometria euclidea si postula che «per un punto passano infinite rette», «per due punti distinti passa una sola retta». Il più famoso postulato della geometria euclidea è quello delle rette parallele («data una retta r ed un punto P non appartenente a essa, esiste un'unica retta passante per P e parallela a r»). Modificando questo postulato si creano geometrie diverse, dette «non euclidee».

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 2 pag. W 168 (punti a, b, c) • Esercizio 122 pag. J_1 62 • Problema 7 pag. ι 57
Problema 2	• Problema 1 pag. W 168 • Problema 16 pag. V 290 • Esercizio 69 pag. ι 28
Quesito 1	• Esercizio 144 pag. α 92 • Esercizio 145 pag. α 92 • Problema 12 pag. α 95
Quesito 2	• Esercizio 142 pag. α 92 • Problema 11 pag. α 99
Quesito 3	• Quesito 3 pag. W 165 • Quesito 1 pag. W 136 • Quesito 8 pag. W 136
Quesito 4	• Esercizio 194 pag. W 115 • Quesito 3 pag. W 70
Quesito 5	• Quesito 2 pag. W 170 • Esercizio 27 pag. V 115
Quesito 6	• Quesito 6 pag. W 169 • Quesito 5 pag. V 288
Quesito 7	• Esercizio 111 pag. V 125 • Esercizio 112 pag. V 125 • Quesito 3 pag. W 167
Quesito 8	• Problema 17 pag. ι 59 (punti b, c) • Problema 16 pag. ι 64 (punto b)
Quesito 9	• Esercizio 20 pag. ι 23 • Esercizio 74 pag. ι 28 • Quesito 1 pag. ι 62
Quesito 10	• Quesito 1 pag. ω 55