ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^2$.

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

QUESTIONARIO

1 Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3 Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza $\overline{AB}$. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza $\overline{PB}$, è tuttavia possibile misurare la distanza $\overline{AP}$. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza $\overline{AB}$.

4 Il dominio della funzione $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

A) $-1 < x \leq 3$; B) $-1 \leq x < 3$; C) $0 < x \leq 3$; D) $0 \leq x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5 La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6 La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7 Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

8 x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

A) è divisibile per 2 e per 3.

B) è divisibile per 2 ma non per 3.

C) è divisibile per 3 ma non per 2.

D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9 Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

10 Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

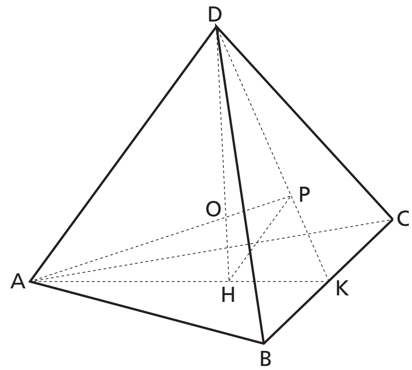
Durata massima della prova: 6 ore

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

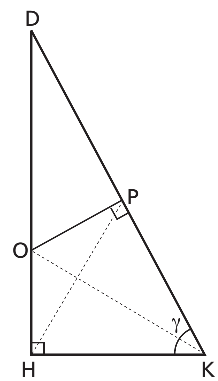
a) Detto s lo spigolo del tetraedro T, si ha che AK e DK sono le altezze di due facce di T (figura 1) e misurano $s\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le altezze AK e DK sono anche bisettrici e mediane. L'altezza DH cade nel baricentro del triangolo ABC, quindi $\overline{HK} = \frac{1}{3}\overline{AK} = s\frac{\sqrt{3}}{6}$. L'altezza DH si può calcolare con il teorema di Pitagora applicato al triangolo DHK (figura 2): risulta $\overline{DH} = s\sqrt{\frac{2}{3}}$.



▶ **Figura 1.**

Le altezze del tetraedro si incontrano nel punto O, centro della sfera inscritta in T, che ha raggio $OH = OP = r$.
I triangoli rettangoli KOH e KOP sono congruenti, allora KO è la bisettrice di $H\hat{K}P = \gamma$. Considerando il triangolo OHK, si può scrivere: $r = \overline{HK} \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = s\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, ma $\mathrm{tg}\gamma = \frac{\overline{DH}}{\overline{HK}} = 2\sqrt{2}$, da cui, attraverso le formule di bisezione si giunge a: $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. In definitiva risulta: $r = \frac{s}{2\sqrt{6}}$.

La superficie del tetraedro è: $S = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} s\right) = s^2\sqrt{3} = r^2 \cdot 24\sqrt{3}$.



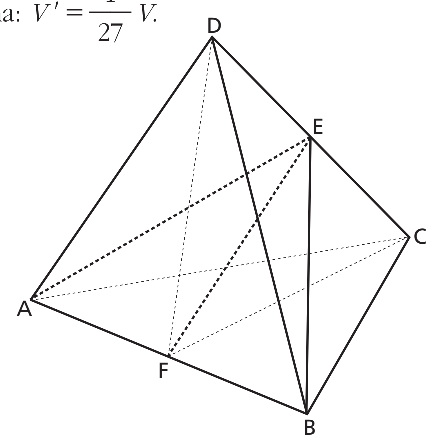
▲ **Figura 2.**

Il volume risulta: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 \cdot s\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = r^3 \cdot 8\sqrt{3}$, da cui segue: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot r$.

b) HP è uno spigolo del tetraedro T', con riferimento al triangolo HPK, nel quale si nota che $K\hat{H}P = K\hat{P}H = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, si ha: $\frac{\overline{HP}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\overline{HK}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \overline{HP} = 2 \cdot \overline{HK} \cdot \operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$. Dal valore di $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$ si ricava $\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Allora $s' = \overline{HP} = 2 \cdot s\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s}{3}$, da cui si ha: $V' = \frac{1}{27} V$.

c) Con riferimento alla figura 3, detto F il punto medio di AB, allora DF e CF sono le mediane delle facce ADB e ACB rispettivamente, il triangolo DFC è quindi isoscele e l'altezza EF è anche mediana: il piano α interseca CD nel punto medio E. AE è la mediana della faccia CAD, BE è la mediana della faccia CBD, quindi ABE è isoscele e la mediana EF è anche altezza. Dal teorema di Pitagora per AEF:

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AF}^2} = \sqrt{\left(s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = s\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



▶ **Figura 3.**

d) Scelto il sistema di riferimento con origine nel punto F, asse delle ascisse coincidente con la retta orientata AB, asse delle ordinate coincidente con la retta orientata FE (figura 4), si scrive l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, passante per i punti $A\left(-\frac{s}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{s}{2}; 0\right)$, $E\left(0; s\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Risulta: $\begin{cases} 0 = a \cdot \left(-\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{s}{2}\right) + c \\ 0 = a \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{s}{2}\right) + c \\ s\frac{\sqrt{2}}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \\ b = 0 \\ c = s\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}.$

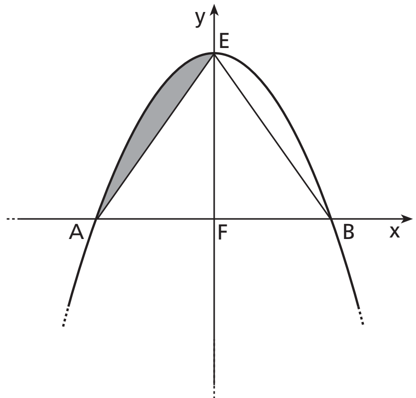


Figura 4.

e) L'area del segmento parabolico ABE è $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$, l'area del triangolo ABE risulta $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$.

L'area delimitata dalla parabola e dalla retta EA è quindi: $A = \frac{1}{2} \cdot (A_1 - A_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} s\right) = \frac{s^2\sqrt{2}}{24}$, che risulta pari a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^2 quando $s = 2\sqrt{2}$ cm.

PROBLEMA 2

a) La funzione $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale si può scrivere come:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2+2m}, & \text{per } m>0\\[2mm] \dfrac{2x+1}{x^2}, & \text{per } m\le 0\end{cases},\quad f(x) \text{ è derivabile } \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}, & \text{per } m>0\\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}, & \text{per } m\le 0\end{cases}.$$

b) Per $m\le 0$ risulta: $f'(x)=\dfrac{2x^2-2x(2x+1)}{x^4}\Rightarrow f'(1)=-4\neq 0$.

Per $m>0$ risulta: $f'(x)=\dfrac{2(x^2+2m)-2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{4(m-1)}{(1+2m)^2}=0\Rightarrow m=1$.

c) La funzione da studiare è: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Le intersezioni con gli assi sono: $A\left(-\dfrac{1}{2};\,0\right)$ con l'asse delle ascisse, $B\left(0;\,\dfrac{1}{2}\right)$ con l'asse delle ordinate.

Si ha inoltre: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0^-$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+$. Il grafico ha l'asintoto orizzontale $y=0$.

La derivata prima risulta: $f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$,

$f'(x)\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 1$, quindi (vedi anche figura 5) si ha un minimo nel punto $m\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$ ed un massimo nel punto $M(1;1)$.

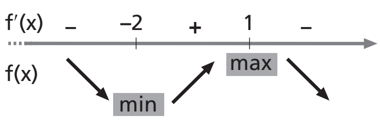


Figura 5.

Studiando la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x)=-2\cdot\frac{(2x+1)(x^2+2)-2(x^2+x-2)\cdot 2x}{(x^2+2)^3}=\frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3},$$

$f''(x)\ge 0\Rightarrow 2x^3+3x^2-12x-2\ge 0$, l'equazione non si scompone con la regola di Ruffini, ma si osserva che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha al massimo tre radici, quindi tre flessi. I risultati ottenuti in precedenza per i limiti negli estremi del dominio ed i valori dei punti di massimo e di minimo permettono di determinare che i flessi devono essere almeno tre. In definitiva i flessi sono proprio tre.
In conclusione si può tracciare il grafico della funzione (figura 6).

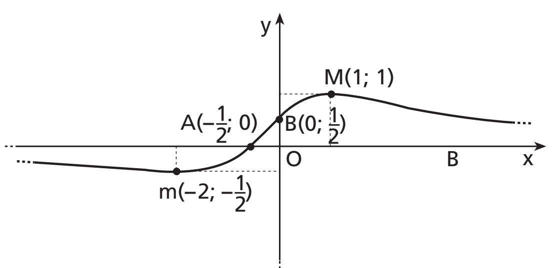


Figura 6.

d) L'area richiesta (figura 7) si ottiene dall'integrale:

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x+1}{x^2+2}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2+2}\,dx=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx,$$

ma $d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx$, allora

$$A=\Big[\ln(x^2+2)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0{,}963193.$$

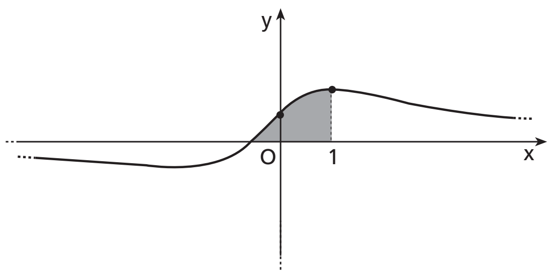


Figura 7.

QUESTIONARIO

1 Due rette si dicono *sghembe* se non giacciono su uno stesso piano. La proposizione è falsa. Considerando infatti le rette *r*, *s*, e *t* su cui giacciono gli spigoli di un parallelepipedo (figura 8), si verifica facilmente che *r* e *s* sono sghembe, *s* e *t* sono sghembe, ma *r* e *t* non lo sono, in quanto incidenti in un vertice del parallelepipedo.

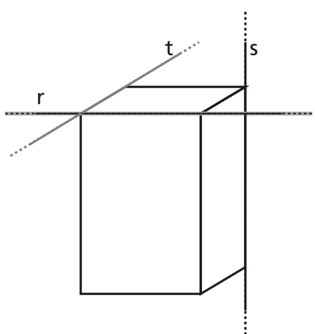


Figura 8.

2 In generale si ottiene un quadrilatero sezione convesso, con i seguenti casi particolari:

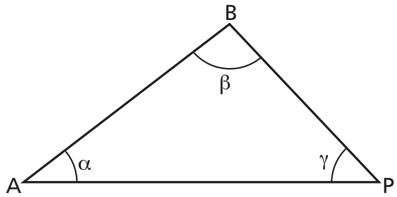
a) se il piano è parallelo alla base, il quadrilatero sezione è un quadrato;

b) se il piano è parallelo ad un lato del quadrato di base, il quadrilatero sezione ha due lati paralleli e due no, si ottiene un trapezio isoscele;

c) se il piano è parallelo ad una diagonale del quadrato di base, si ottiene un romboide.

3 Con riferimento alla figura 9 si misura direttamente la distanza AP, quindi si misurano con un goniometro gli angoli α e γ, posti nei vertici A e P ai quali è possibile accedere e dai quali è visibile anche B. Si ricava indirettamente l'angolo β posto nel vertice B: $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.

Per il teorema dei seni: $\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AP} \cdot \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}$.



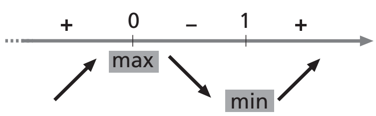
◀ **Figura 9.**

4 Il dominio della funzione $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$ si ottiene ponendo l'argomento del logaritmo maggiore di zero, quindi $\sqrt{x+1} - (x-1) > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > (x-1)$. La disequazione è verificata per:

$$\begin{cases} x-1<0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 > x^2-2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ 0<x<3 \end{cases}$$

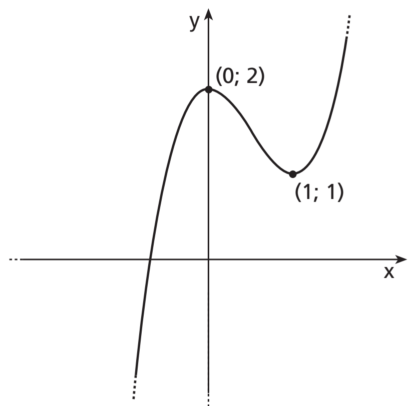
quindi le soluzioni sono: $-1 \leq x < 1 \cup 1 \leq x < 3 \Rightarrow -1 \leq x < 3$, ovvero la risposta B è esatta.

5 La funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ è una cubica, quindi ha al più tre intersezioni con l'asse delle ascisse. La derivata prima risulta: $f'(x) = 6x^2 - 6x \geq 0$ per $x \leq 0$ e $x \geq 1$. Lo schema di figura 10 mostra che per $x = 0$ si ha un massimo e per $x = 1$ si ha un minimo.



◀ **Figura 10.**

Risulta poi $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$, quindi le coordinate dei punti di massimo e di minimo sono, rispettivamente: $M(0;\ 2)$ e $m(1;\ 1)$. Considerato che la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$ e che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, se ne deduce che la funzione interseca l'asse delle x in un solo punto, di ascissa negativa, come risulta anche dal grafico di figura 11.



▶ **Figura 11.**

6 Posto $g(x) = x^2$ la funzione $f(x)$ è una funzione composta e risulta: $f(x) = \varphi(g(x)) = \int_0^{g(x)} e^{-t^2}\,dt$. La derivata risulta: $f'(x) = \varphi'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Si ha: $g'(x) = 2x$, mentre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene: $\varphi'(g(x)) = e^{-(g(x))^2}$, quindi $f'(x) = 2x \cdot e^{-(g(x))^2} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x^4}$.

7 In generale risulta:

$$(1+2+\ldots+n)^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2+2(1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+1\cdot n+2\cdot 3+\ldots+2\cdot n+\ldots+(n-1)\cdot n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\left(\sum_{k\neq h} hk\right) \Rightarrow \sum_{k\neq h} hk = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right].$$

Valgono le seguenti relazioni, che si dimostrano facilmente per induzione:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ e } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Si ha infine: $\sum_{k\neq h} hk = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right] = \frac{1}{24} n(n^2-1)(3n+2)$. La risposta D è quella esatta.

8 Considerando che $(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2(x^2+xy+y^2)$, allora (x^3-y^3) è divisibile per 2. Inoltre $x-y=2 \Rightarrow y=x-2 \Rightarrow x^2+xy+y^2=3x^2-6x+4$, che equivale a: $3(x^2-2x+1)+1$, che non è divisibile per 3. La risposta esatta è B.

9 Sono le possibili combinazioni di 3 oggetti scelti tra 88 (i 90 numeri dell'urna, tranne 1 e 90). Le possibili cinquine sono quindi: $C_{88,3} = \binom{88}{3} = \frac{88!}{3!\cdot 85!} = \frac{88\cdot 87\cdot 86}{1\cdot 2\cdot 3} = 109\,736$.

10 Per la definizione di logaritmo: $2 = 3^{\log_3 2} = (2^{\log_2 3})^{\log_3 2} = 2^{\log_2 3\cdot\log_3 2} \Rightarrow 1 = \log_2 3 \cdot \log_3 2$.