ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proposizioni:

   $OD : DB = OA : DP$

   $OC : DP = DP : BC$

   ove D è la proiezione ortogonale di B su OA.
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$;
3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari;
2. $f(0) = 2$;
3. $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{3}{2\ln 2}$.

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.
Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.
Si calcoli $\int \dfrac{1}{g(x)}\,dx$.
Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

QUESTIONARIO

1 Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

2 Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?

3 Qual è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

4 Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

5 Dimostrare, usando il ***teorema di Rolle*** [da *Michel Rolle*, matematico francese (1652-1719)], che se l'equazione:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \dots\dots + a_1 = 0$$

6 Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di b?

7 Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

8 Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3\,dx$.

9 Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\operatorname{sen} x$ e che $f'(0) = 1$.
Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

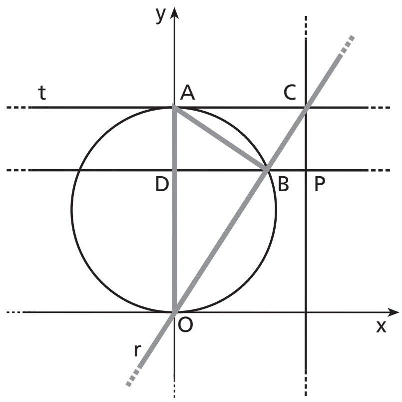
10 Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. Con riferimento alla figura 1 si osserva che la similitudine tra i triangoli ODB e OAC permette di scrivere: $OD : DB = OA : AC$; essendo $AC = DP$ la prima proporzione è dimostrata.

Il triangolo OAB è inscritto in una semicirconferenza, quindi $O\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$, i triangoli OAC e ABC sono simili, quindi: $OC : AC = AC : BC$ che equivale alla seconda proporzione, essendo ancora $AC = DP$.



▶ **Figura 1.**

2. Scegliendo il sistema di riferimento come in figura 1, l'equazione cartesiana del luogo Γ si otterrà dalle coordinate del punto P.
Le coordinate di B sono date dall'intersezione tra il cerchio γ ed il fascio di rette passanti per l'origine.

$$B: \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \\ y = mx \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{am}{1+m^2} \\ y = \frac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$$

Le coordinate di C sono date dall'intersezione tra la retta $y = a$ ed il fascio di rette passanti per l'origine.

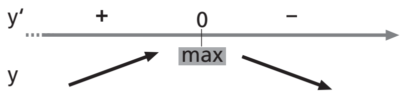
$$C: \begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = a \end{cases}$$

Ma $y_P = y_B$ e $x_P = x_C$, dunque $P: \begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = \frac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$, allora ricavando m dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene: $y = \dfrac{a\left(\frac{a}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$.

3. Γ: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ è una funzione definita $\forall x \in \mathbb{R}$, pari (simmetrica rispetto all'asse delle y), e sempre positiva. Interseca l'asse delle y nel punto $A(0; a)$, non interseca l'asse delle x.
$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0$, il grafico ha un asintoto orizzontale $y = 0$.

$$y' = \frac{-2a^3x}{(x^2 + a^2)^2} > 0, \text{ per } x < 0.$$

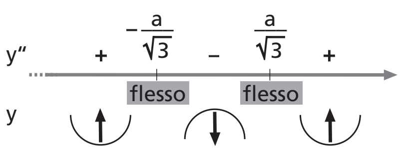
Il punto $A(0; a)$ è un punto di massimo (figura 2).



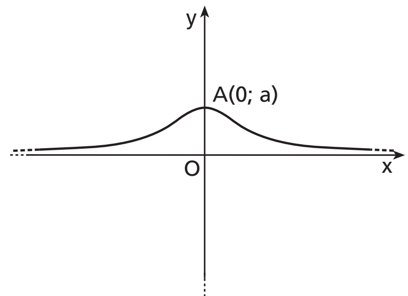
◀ **Figura 2.**

$$y'' = \frac{2a^3(3x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^3} > 0, \text{ per } x < -\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ e per } x > \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

La concavità ha l'andamento di figura 3.



◀ **Figura 3.**



▲ **Figura 4.**

Si hanno due punti di flesso: $F_1\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}a\right)$ e $F_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}a\right)$.

In definitiva il grafico è quello rappresentato in figura 4.

L'area del cerchio γ è $\pi \cdot \frac{a^2}{4}$

L'area compresa tra Γ e l'asintoto $y = 0$ si ottiene da: $2\int_0^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2}\, dx = 2 \lim_{k \to +\infty} \int_0^k \frac{a}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\, dx$, ponendo $t = \frac{x}{a}$, si ottiene $2 \lim_{k \to +\infty} \left[a^2 \cdot \text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^k = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$, quindi è pari a quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

1. Se la funzione è pari, allora

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c \Rightarrow a(2^x - 2^{-x}) = b(2^x - 2^{-x}) \Rightarrow a = b.$$

2. $f(0) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2.$

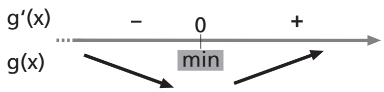
3. $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{3}{2\ln 2} \Rightarrow \int_0^1 (a2^x + b2^{-x} + c)\, dx = \left[a \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - b \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} + cx\right]_0^1 = \frac{2a + b}{2\ln 2} + c = \frac{3}{2\ln 2}.$

Le tre condizioni costituiscono il sistema $\begin{cases} a = b \\ a + b + c = 2 \\ \frac{2a + b}{2\ln 2} + c = \frac{3}{2\ln 2} \end{cases}$ con soluzioni $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$, quindi la funzione cercata è $g(x) = 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{2^{2x} + 1}{2^x}$.

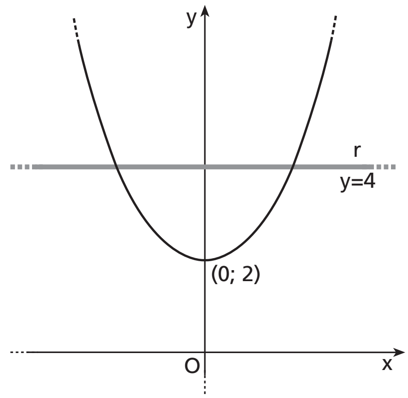
Studiamo la funzione $g(x)$.
È definita positiva su tutto $\mathbb{R}$; la funzione è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse delle y.
Il grafico interseca l'asse delle y nel punto $(0; 2)$, non interseca l'asse delle x.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$, il grafico non presenta asintoti orizzontali.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x + 2^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2^x - 2^{-x}) \cdot \ln 2}{1} = +\infty$, il grafico non presenta asintoti obliqui.

$g'(x) = (2^x - 2^{-x}) \cdot \ln 2 > 0$, se $x > 0$. Il punto $(0; 2)$ è un punto di minimo (figura 5).



◀ **Figura 5.**



▲ **Figura 6.**

$g''(x) = (2^x + 2^{-x}) \cdot \log^2 2 > 0$, $\forall x$. Non ci sono flessi, la concavità è sempre rivolta verso l'alto. Il grafico è rappresentato in figura 6.

x_1	x_2	$h(x_1)$	$h(x_2)$	α
1	2	−3	1	1,5
1,5	2	−2,31…	1	1,75
1,75	2	−1,14…	1	1,875
1,875	2	−0,22…	1	1,9375
1,875	1,9375	−0,22…	0,35…	…

Determiniamo le intersezioni tra la retta $y = 4$ e $y = g(x)$:

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{-x} - 4 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di bisezione alla funzione $h(x) = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1$:
Si arriva infine al valore $\alpha = 1{,}89997$.
$2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$, valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.
Il valore dell'area richiesta è data dall'integrale:

$$2\int_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} (4 - 2^x - 2^{-x})\, dx = 2\left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} = 8\log_2(2+\sqrt{3}) - \left(\frac{4\sqrt{3}}{\ln 2}\right) \cong 5{,}2044$$

$\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}\, dx = \int \frac{2^x}{1 + 2^{2x}}\, dx$, posto $t = 2^x$ e $dt = (2^x \ln 2)\, dx$, segue:

$$\frac{1}{\ln 2}\int \frac{t}{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{\ln 2} \cdot \text{arctg}(2^x) + c.$$

Le equazioni della simmetria assiale, con asse la retta $y = 4$ sono:

$\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}$, dunque $y' = g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}$.

QUESTIONARIO

1 Le partite disputate sono pari alle disposizioni di 2 squadre distinte, ovvero le disposizioni semplici di 18 elementi distinti di classe 2:

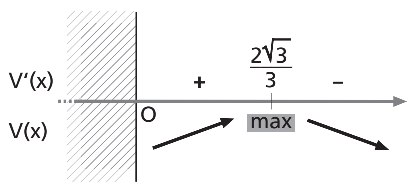
$D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306.$

2 Detti A, B, C, E gli eventi così definiti:

A = estrazione di una lampada dalla scatola A;
B = estrazione di una lampada dalla scatola B;
C = estrazione di una lampada dalla scatola C;
E = estrazione di una lampada difettosa.

Per il teorema delle probabilità totali: $P(E) = P(E|A) \cdot P(A) + P(E|B) \cdot P(B) + P(E|C) \cdot P(C)$, nel caso in esame: $P(E) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{60} \cong 0{,}1167.$

3 Detta x l'altezza del cono e r la misura del raggio di base, si ha: $r = \sqrt{4 - x^2}$, dunque il volume risulta: $V(x) = \frac{1}{3}\pi(4 - x^2)\,x$. Per i vincoli geometrici del problema, $0 \leq x \leq 2$.



◀ **Figura 7.**

Si studia la derivata prima: $V'(x) = \frac{1}{3}\pi(4 - 3x^2) > 0$, per $0 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Lo schema di figura 7 mostra che il valore massimo si ha per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Il volume corrispondente è pari a

$$V_{\max} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}\,\text{dm}^3 = 100 \cdot \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}\,\text{cl} \cong 322{,}45\,\text{cl}.$$

4 $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) + 2.$

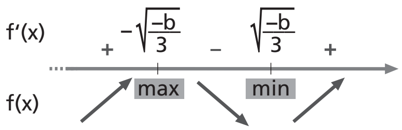
5 Il teorema di Rolle afferma:
"Data una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$, definita nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, se la funzione soddisfa le ipotesi:

a. è continua in $[a; b]$
b. è derivabile in $]a; b[$
c. $f(a) = f(b)$

allora esiste un numero reale c appartenente all'intervallo tale che $f'(c) = 0$".

Nel caso in esame: $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1x + a_0$ è una funzione polinomiale, sempre continua e derivabile, con derivata $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \ldots\ldots + a_1$.
Se a e b sono due radici reali, allora $f(a) = f(b) = 0$, la funzione nell'intervallo $[a; b]$ verifica il teorema di Rolle e quindi esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui la derivata prima si annulla: tale punto è la radice cercata.

6 L'equazione possiede tre radici reali se la funzione $x^3+bx-7=0$, continua e derivabile ovunque, interseca tre volte l'asse delle ascisse. La cubica deve possedere un massimo e un minimo relativo e questi devono avere segno discorde. La derivata prima $f'(x)=3x^2+b$ possiede due radici distinte, $x=\pm\sqrt{\frac{-b}{3}}$, se $b<0$. $f'(x)=3x^2+b>0$, se $x<-\sqrt{\frac{-b}{3}}$ o $x>\sqrt{\frac{-b}{3}}$. Lo schema in figura 8 mostra che per $x=-\sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un massimo e per $x=\sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un minimo.



◀ **Figura 8.**

$$f\left(\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)<0\Rightarrow\frac{2b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}}-7<0,\ \forall b<0.$$ Poiché $f(0)=-7$, il minimo è sempre negativo.

Invece: $f\left(-\sqrt{\frac{-b}{3}}\right)>0\Rightarrow\frac{b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}}-\frac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{3}}-7>0\Rightarrow-b^3>\frac{49\cdot27}{4}\Rightarrow b<\sqrt[3]{\frac{-1323}{4}}\cong-6{,}92.$

Quindi $b=-7$, per esempio soddisfa già la condizione richiesta.

7 $4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=4[\operatorname{arctg}x]_0^1=4(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\pi.$

Per il calcolo approssimato di π si può utilizzare il metodo dei rettangoli, dividendo l'intervallo $[0;1]$ in $n=5$ parti uguali, si ottiene:

$$4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx\cong4\cdot\frac{1-0}{5}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\right]=\frac{4}{5}\left[1+\frac{25}{26}+\frac{25}{29}+\frac{25}{34}+\frac{25}{41}\right],$$

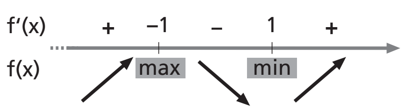
ovvero $\pi\cong3{,}35$. Aumentando il numero n si può migliorare l'approssimazione.

8 Il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle ascisse della curva $y=f(x)$ in $[a;b]$ è $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Nel caso in esame $V=\pi\int_0^1 x^3\,dx$, dunque la rotazione attorno all'asse delle ascisse di $y=x^{\frac{3}{2}}$ in $[0;1]$ genera il solido.

9 $\begin{cases}f''(x)=\operatorname{sen}x\\ f'(0)=1\end{cases}$, integrando si ottiene: $f'(x)=\int\operatorname{sen}x\,dx=-\cos x+k_1$, $f'(0)=1\Rightarrow k_1=2$.

$f(x)=\int(-\cos x+2)\,dx=-\operatorname{sen}x+2x+k_2$. Allora $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=\pi-1$.

10 Analogamente al quesito 6 la funzione $f(x)=x^3-3x+1$ ha tre intersezioni con l'asse delle ascisse se possiede un massimo ed un minimo relativo e questi sono di segno discorde. La funzione è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. $f'(x)=3x^2-3>0\Rightarrow x<-1\cup x>1$. Per $x=-1$ si ha un punto di massimo di ordinata $f(-1)=3$. Per $x=1$ si ha un punto di minimo di ordinata $f(1)=-1$ (figura 9).



◀ **Figura 9.**

Essendo $f(0)=1>0$ e $f(1)=-1<0$, per il teorema di esistenza degli zeri, la funzione ammette uno zero all'interno dell'intervallo $[0; 1]$.
Utilizzando il metodo di bisezione:

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	α
0	1	1	-1	0,5
0	0,5	1	$-0,375$	0,25
0,25	0,5	0,266	$-0,375$	0,375
0,25	0,375	0,266	$-0,072$	0,3125
0,3125	0,375	0,093	$-0,072$	…

Si giunge infine al valore $\alpha \cong 0,3473$.