ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y=(a-1)x^2-2ax+a^2$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.

b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.

c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.

d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y=\frac{3}{2}$.

PROBLEMA 2

In un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto a un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure dei lati del trapezio.

b) Riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

c) Tra le centro-affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

trovare quella che trasforma il vertice B del trapezio nel vertice C e il vertice C nel vertice D.

d) Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.

e) Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

QUESTIONARIO

1 Nota lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.
(Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.)

2 Nello spazio ordinario sono dati due piani α e β e una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3 Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:

- A $x \leq 0$ e/o $x > 2$;
- B $x \leq 0$ e/o $x \geq 2$;
- C $x = 0$ e/o $x > 2$;
- D $x = 0$ e/o $x \geq 2$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4 Si consideri un polinomio di grado $n \geq 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = \alpha$.

5 Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per:

a) $x \to +\infty$; b) $x \to -\infty$; c) $x \to 0$;

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

6 Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.
Dire se l'affermazione: «il sistema ammette la sola soluzione $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ per ogni valore di k diverso da 1» è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7 Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

8 In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = (a + 1)x - by + a \\ y' = (a - 1)x + 2by - 1 \end{cases}$$

dove a, b sono parametri reali.
Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

9 Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estratte a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:
a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
c) è messa da parte senza guardarne il colore?

10 Considerata l'equazione in x:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

a) Per determinare i punti di intersezione tra le parabole $y=(a-1)x^2-2ax+a^2$ con $a\neq 1$ e l'asse x, risolviamo l'equazione $(a-1)x^2-2ax+a^2=0$, che è un'equazione di secondo grado per qualunque valore di a, essendo $a\neq 1$ per ipotesi. Per trovare le radici reali dell'equazione, calcoliamo il discriminante ridotto:

$$\frac{\Delta}{4}=a^2-(a-1)a^2=a^2(2-a).$$

Si ha:

$$\frac{\Delta}{4}\geq 0 \quad \leftrightarrow \quad a^2(2-a)\geq 0 \leftrightarrow a=0 \vee a\leq 2 \text{ (essendo } a^2 \text{ sempre non negativo).}$$

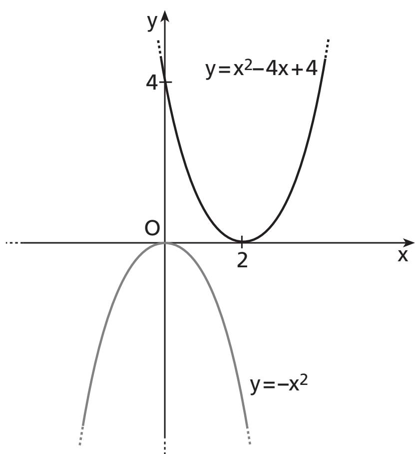
Più sinteticamente si può dire che le parabole date hanno punti in comune con l'asse x per $a\leq 2$.

b) Data la parabola di equazione $y=(a-1)x^2-2ax+a^2$,
l'ascissa del suo vertice è $x_V=\dfrac{a}{(a-1)}$.
Quindi la parabola data ha vertice in un punto di ascissa a se:

$$\frac{a}{(a-1)}=a \leftrightarrow a=a(a-1) \leftrightarrow a(a-2)=0 \leftrightarrow a=0 \vee a=2.$$

Le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a sono (figura 1) :

$$a=0 \quad \rightarrow \quad y=-x^2.$$
$$a=2 \quad \rightarrow \quad y=x^2-4x+4$$



▲ **Figura 1.**

c) Le due parabole determinate nel punto b) e disegnate in figura 1 hanno entrambe asse parallelo all'asse y e hanno medesimo valore assoluto dell'apertura, che è il coefficiente di x^2. La parabola $y=-x^2$ è congruente alla parabola $y=-x^2-4x+4$ perché la seconda si ottiene dalla prima con la simmetria centrale di centro (1; 0) che è il punto medio del segmento che congiunge i vertici delle due parabole. Le equazioni della simmetria centrale sono:

$$\begin{cases} x'=2\cdot 1-x \\ y'=2\cdot 0-y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=2-x' \\ y=-y' \end{cases}$$

Sostituendo in $y=-x^2$ otteniamo:

$$-y'=-(2-x')^2 \rightarrow y'=x'^2-4x'+4.$$

Pertanto le due parabole sono congruenti perché si corrispondono in una isometria.

d) Nel punto b) è stata determinata l'ascissa del vertice delle parabole date: $x_V = \frac{a}{a-1}$. L'ordinata è $y_V = a^2 \cdot \frac{a-2}{a-1}$. Le equazioni parametriche del luogo L sono quindi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{a-1} \\ y = a^2 \cdot \dfrac{a-2}{a-1} \end{cases}.$$

Ricaviamo a in funzione di x dalla prima equazione :

$$a = ax - x \rightarrow a = \frac{x}{x-1} \text{ con } x \neq 1,$$

e sostituiamo nella seconda equazione del luogo:

$$y = \frac{x^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{\dfrac{x}{x-1} - 2}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{x^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x - 2x + 2}{x - x + 1} = \frac{2x^2 - x^3}{(x-1)^2} \text{ con } x \neq 1.$$

L'equazione cartesiana del luogo L dei vertici delle parabole date è:

$$y = \frac{2x^2 - x^3}{(x-1)^2} \quad \text{con } x \neq 1.$$

Studiamo la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - x^3}{(x-1)^2}$.

Campo di esistenza: $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Segno:

la funzione può essere scritta nel seguente modo: $f(x) = x^2 \frac{2-x}{(x-1)^2}$, quindi il segno di f è concorde con il segno di $2 - x$:

$$f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee x = 2;$$

$$f(x) < 0 \leftrightarrow x > 2;$$

$$f(x) > 0 \leftrightarrow x < 2 \text{ e } x \neq 1.$$

Limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(2-x)}{x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-x}{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \mp\infty$$

e tenendo presente il segno della funzione, che in un intorno di 1 è sempre positiva, si ha:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - x^3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \text{e} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 - x^3}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui di equazione: $y = mx + q$, con $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$. Si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-x^2}{x^2-2x+1}=-1$$

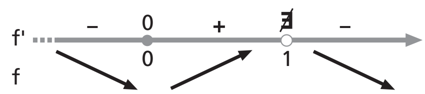
$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2-x^3}{(x-1)^2}+x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x^3+x^3-2x^2+x}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(x-1)^2}=0.$$

Quindi la retta $y=-x$ è asintoto obliquo di f.

Derivate.

$$f'(x)=\frac{(4x-3x^2)(x-1)^2-2(x-1)(2x^2-x^3)}{(x-1)^4}=-\frac{(4x-3x^2)(x-1)-2(2x^2-x^3)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{-x^3+3x^2-4x}{(x-1)^3}=\frac{-x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3}.$$



▲ **Figura 2.**

Essendo x^2-3x+4 sempre maggiore di 0, f' si annulla in $x=0$ e il segno di f' è concorde al segno di $\frac{-x}{(x-1)^3}$ come illustrato in figura 2 assieme alle conseguenze sulla crescenza e decrescenza di f.

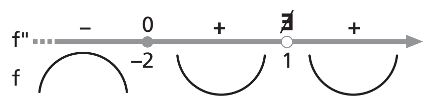
Quindi $x=0$ è punto di minimo relativo per f e $f(0)=0$. Il punto $x=1$ non è estremante di f perché non appartiene al suo campo di esistenza.

La derivata seconda:

$$f''(x)=\frac{(-3x^2+6x-4)(x-1)^3-3(x-1)^2(-x^3+3x^2-4x)}{(x-1)^6}=$$

$$=-\frac{(-3x^2+6x-4)(x-1)-3(-x^3+3x^2-4x)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2x+4}{(x-1)^4}=2\frac{x+2}{(x-1)^4}$$

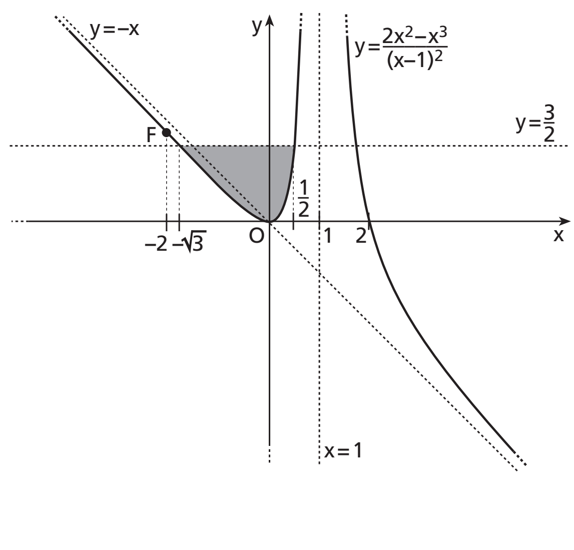


▲ **Figura 3.**

si annulla in $x=-2$. Dallo studio del segno di f'', riportato in figura 3 assieme alle conseguenze sulla concavità di f, segue che $x=-2$ è punto di flesso per f e $f(-2)=\frac{16}{9}$.

Il grafico di $f(x)$ ed i suoi asintoti sono illustrati in figura 4.

▼ **Figura 4.**



e) Determiniamo le intersezioni tra la curva L e la retta $y=\frac{3}{2}$ risolvendo l'equazione $\frac{2x^2-x^2}{(x-1)^2}=\frac{3}{2}$ con $x\neq 1$.

Si ottiene l'equazione di terzo grado $2x^3-x^2-6x+3=0$. Per un teorema dell'algebra, le eventuali radici razionali del polinomio di terzo grado a coefficienti interi sono frazioni il cui numeratore è un divisore del termine noto 3 e il cui denominatore è un divisore del coefficiente 2 del termine x^3. Quindi le possibili radici appartengono all'insieme $\left\{\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\}$. Siccome $p\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-6\frac{1}{2}+3=0$, il polinomio è divisibile per $\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Applicando la regola di Ruffini:

	2	−1	−6	3
$\frac{1}{2}$		1	0	−3
	2	0	−6	0

otteniamo la fattorizzazione: $2x^3-x^2-6x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-6)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.
Quindi:

$$2x^3-x^2-6x+3=0 \quad \leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2} \vee x=\sqrt{3} \vee x=-\sqrt{3}.$$

Le ascisse dei punti estremi della regione finita di piano di cui si vuole calcolare l'area (vedi figura 4) sono $x=-\sqrt{3}$ e $x=\frac{1}{2}$.

$$Area=\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-f(x)\right)dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{2x^2-x^3}{(x-1)^2}\right)dx.$$

Notiamo che $\frac{2x^2-x^3}{(x-1)^2}=-x\cdot\frac{x^2-2x+1-1}{x^2-2x+1}=-x\left(1-\frac{1}{x^2-2x+1}\right)=-x+\frac{x}{x^2-2x+1}$, quindi:

$$Area=\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}+x-\frac{x}{(x-1)^2}\right)dx=\frac{3}{2}[x]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}[x^2]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}-\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{(x-1)^2}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-3\right)-\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{(x-1)^2}dx=-\frac{5}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{(x-1)^2}dx.$$

Per calcolare $\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{(x-1)^2}dx$ cerchiamo i valori A e B che rendono vera l'identità:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}.$$

Essendo $\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$ si ha:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases}A=1\\-A+B=0\end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$

e quindi $\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{(x-1)^2}dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x-1)}dx+\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x-1)^2}dx=\left[\ln|x-1|-\frac{1}{(x-1)}\right]_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-\ln 2-\ln(1+\sqrt{3})+2-\frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

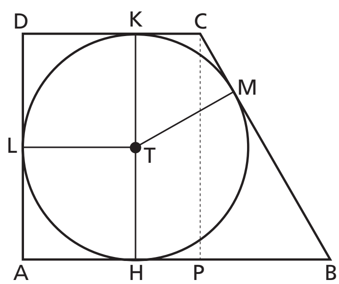
Possiamo infine determinare l'area della regione limitata richiesta:

$$Area=-\frac{5}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{x}{(x-1)^2}dx=-\frac{5}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\ln 2+\ln(1+\sqrt{3})-2+\frac{1}{1+\sqrt{3}}=$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{25}{8}+\ln(2+2\sqrt{3}).$$

PROBLEMA 2

a) Siano H, K, L ed M i punti di tangenza del cerchio di centro T ai lati del trapezio rettangolo $ABCD$, come si osserva in figura 5.
I raggi condotti alle tangenti sono perpendicolari alle tangenti stesse, quindi, essendo per ipotesi $AB\perp AD$ e $AD\perp DC$, si ha $TH\perp TL$ e $TK\perp TL$. Inoltre, poiché $LA\cong AH$ e $LD\cong DK$, in quanto segmenti di tangente condotti da punti esterni alla circonferenza, i quadrilateri $AHTL$ e $LTKD$ sono entrambi due quadrati, di lato 2, quindi $\overline{AD}=4$. Per ipotesi $2p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{DC}+\overline{AD}=18$. Ricordiamo che, per un teorema di geometria euclidea, in un quadrilatero circoscritto la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due. Quindi:



▲ **Figura 5.**

$$\begin{cases}\overline{AD}+\overline{BC}=9\\ \overline{AB}+\overline{DC}=9\\ \overline{AD}=4\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\overline{BC}=5\\ \overline{AB}+\overline{DC}=9\\ \overline{AD}=4\end{cases}.$$

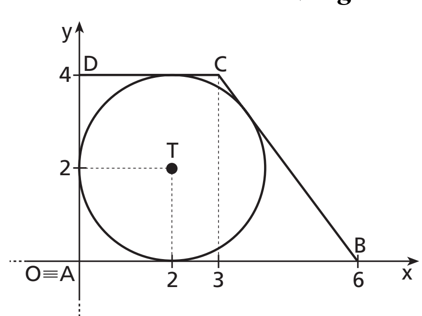
Sia P il punto in cui la perpendicolare ad AB per C incontra il lato AB. Si ha $CP\cong AD$, quindi per il teorema di Pitagora:

$$\overline{PB}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

ed essendo $\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{DC}+\overline{PB}$, vale:

$$\overline{AB}+\overline{DC}=9\ \leftrightarrow\ 2\overline{DC}+\overline{PB}=9\ \leftrightarrow\ \overline{DC}=\frac{9-3}{2}=3.$$

▼ **Figura 6.**



I lati del trapezio misurano:

$$\overline{AD}=4,\quad \overline{AB}=6,\quad \overline{BC}=5,\quad \overline{DC}=3.$$

b) Scegliamo un sistema di assi cartesiani Oxy che ha origine O coincidente con il vertice A, asse x la retta AB orientata da A verso B, asse y la retta AD orientata da A verso D (figura 6).
Le coordinate dei vertici del trapezio rispetto al sistema di riferimento sono:

$$A(0;0);\quad B(6;0);\quad D(0;4);\quad C(3;4).$$

c) Una centro-affinità è un'affinità in cui l'origine del sistema di riferimento è un punto unito. Il sistema di riferimento scelto è adeguato, infatti B, C e D non sono punti uniti mentre A può esserlo. Determiniamo l'affinità t:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

per cui:

$t(6;0) = (3;4)$; $t(3;4) = (0;4)$.

Imponendo la condizione $t(6;0) = (3;4)$ si ottiene:

$$\begin{cases} 6a = 3 \\ 6c = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Imponendo la seconda condizione $t(3;4) = (0;4)$ si ottiene:

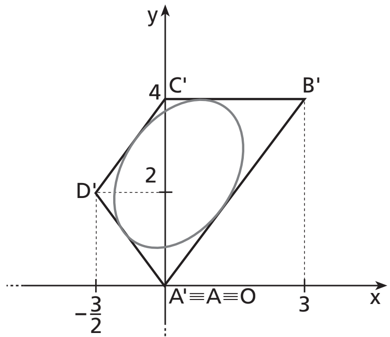
$\begin{cases} 3a + 4b = 0 \\ 3c + 4d = 4 \end{cases}$ e sostituendo i valori di a e c trovati si ha: $\begin{cases} b = -\dfrac{3}{8} \\ d = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Le equazioni dell'affinità cercata sono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

Calcoliamo $t(3;4) = \left(-\dfrac{3}{2}; 2\right)$ e disegniamo il quadrilatero $A'B'C'D'$, che è il trasformato mediante t del trapezio rettangolo $ABCD$ (figura 7).

Si noti che il quadrilatero $A'B'C'D'$ è ancora un trapezio, essendo $A'B' /\!/ C'D'$, ma non è più un trapezio rettangolo. Infatti una generica affinità preserva il parallelismo ma non la perpendicolarità.



▲ **Figura 7.**

d) Per determinare le eventuali rette unite, occorrono le equazioni della trasformazione inversa t^{-1}. Scriviamo t in forma matriciale $X' = AX$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{8} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Essendo $\det(A) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, la trasformazione inversa t^{-1} esiste ed ha la forma matriciale:

$$X = A^{-1}X'.$$

Calcoliamo A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ e le equazioni della trasformazione inversa sono:

$$\begin{cases} x=x'+\frac{3}{4}y' \\ y=-\frac{4}{3}x'+y' \end{cases}.$$

In alternativa, le stesse equazioni si possono ottenere come segue.

Dalle equazioni $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}y \\ y'=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y \end{cases}$

ricaviamo x e y in funzione di x' e y'. Si ha:

$$\begin{cases} x=\frac{8x'+3y}{4} \\ y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{8x'+3y}{4}+\frac{1}{2}y \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{8x'+3y}{4} \\ 6y'=8x'+3y+3y \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x=\frac{8x'+3y}{4} \\ y=y'-\frac{4}{3}x' \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{8x'+3y'-4x'}{4} \\ y=-\frac{4}{3}x'+y' \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x=x'+\frac{3}{4}y' \\ y=-\frac{4}{3}x'+y' \end{cases}$$

Con queste equazioni trasformiamo la retta generica r di equazione $y=mx+q$. Si ottiene:

$$-\frac{4}{3}x'+y'=m\left(x'+\frac{3}{4}y'\right)+q.$$

Togliamo gli apici e semplifichiamo:

$$\left(1-\frac{3}{4}m\right)y=\left(\frac{4}{3}+m\right)x+q.$$

Notiamo subito che se $1-\frac{3}{4}m=0$ allora la retta r non è unita, perché $t(r)$ sarebbe parallela all'asse delle ordinate mentre r non lo è. Possiamo quindi supporre $1 - \frac{3}{4}m \neq 0 \rightarrow m \neq \frac{4}{3}$ e scrivere:

$$y = \frac{\frac{4}{3} + m}{1 - \frac{3}{4}m}x + \frac{q}{1 - \frac{3}{4}m}.$$

Affinché le rette siano unite si deve verificare che:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{4}{3} + m}{1 - \frac{3}{4}m} = m \\ \dfrac{q}{1 - \frac{3}{4}m} = q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9m^2 + 16 = 0 \\ 3mq = 0 \end{cases}$$

che è un sistema impossibile, quindi nessuna retta di equazione $y = mx + q$ è unita per t.
Cerchiamo eventuali rette unite per t parallele all'asse y delle ordinate. La retta di equazione $x = a$ viene trasformata da t nella retta di equazione $x' + \frac{3}{4}y' = a$, che non è in nessun caso parallela all'asse delle ordinate.
Si conclude che non esistono rette unite per t.

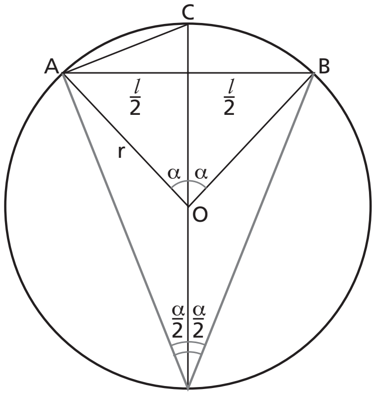
e) Un'importante proprietà delle affinità è che il rapporto tra l'area S di una figura e quella della sua trasformata S' è costante e vale la relazione:

$A_{S'} = |\det(A)| A_S$ dove A è la matrice associata all'affinità.

Essendo $\det(A) = \frac{1}{2}$, l'area della figura trasformata del cerchio inscritto, che è un'ellisse, è la metà dell'area del cerchio ed è quindi pari a $\frac{1}{2}\pi(2)^2 = 2\pi$.

QUESTIONARIO

1 Il testo del quesito suggerisce la risoluzione per via trigonometrica. Si consideri nel cerchio di centro O e raggio dato r di figura 8 la corda AB, sottesa dall'angolo al centro $A\hat{O}B$ e di lunghezza nota l, e la corda AC sottesa dall'angolo al centro $A\hat{O}C = \frac{1}{2}A\hat{O}B$. Indichiamo con α e 2α gli angoli al centro $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ rispettivamente. I corrispondenti angoli alla circonferenza che sottendono le corde AB e AC misurano allora $\frac{\alpha}{2}$ e α.



▲ **Figura 8.**

Per il teorema della corda si ha:

$$\overline{AB} = 2r \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad \overline{AC} = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dalla prima relazione, poiché $\overline{AB} = l$, si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{l}{2r}.$$

Per la formula di bisezione del seno:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}\,,$$

nel nostro caso $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$ essendo $0<2\alpha<\pi \quad\rightarrow\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ e quindi $\operatorname{sen}\alpha>0$ e $\cos\alpha>0$.

Per la relazione fondamentale della trigonometria:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{l^2}{4r^2}}\,.$$

Quindi:

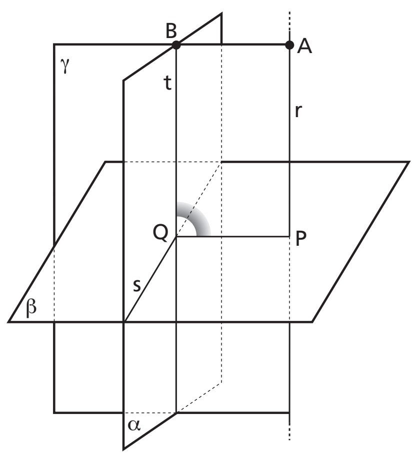
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{l^2}{4r^2}}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4r}\sqrt{4r^2-l^2}}=\sqrt{\frac{2r-\sqrt{4r^2-l^2}}{4r}}$$

e

$$\overline{AC}=2r\sqrt{\frac{2r-\sqrt{4r^2-l^2}}{4r}}=\sqrt{r}\sqrt{2r-\sqrt{4r^2-l^2}}\,.$$

2 In figura 9 sono riportati i piani α e β e la retta r parallela ad α e perpendicolare a β. Si vuole dimostrare che i due piani α e β sono perpendicolari.

Sia s la retta $s=\alpha\cap\beta$, spigolo del diedro formato dai piani α e β. Sia P il punto in cui la retta r interseca il piano β e tracciamo sul piano β da P la perpendicolare alla retta s e sia Q il piede della perpendicolare. Per il teorema delle tre perpendicolari il piano γ contenente r e Q origina una sezione normale del diedro formato da α e β. Sia t la retta $t=\alpha\cap\gamma$. Essendo $r/\!/\alpha$ ed essendo t complanare di r rispetto al piano γ, si ha che le rette r e t sono parallele. Infatti, se così non fosse, r e t dovrebbero incontrarsi nel punto di incidenza, e quindi anche il piano α, cui t appartiene, e la retta r dovrebbero incontrarsi, cosa che è contraria all'ipotesi $r/\!/\alpha$. Quindi gli angoli $P\hat{Q}B$ e $Q\hat{P}A$ sono supplementari, perché angoli coniugati interni rispetto alla coppia di rette parallele r e t e alla trasversale per PQ, ed essendo $Q\hat{P}A$ retto per costruzione si ha che anche $P\hat{Q}B$ è retto. Quindi una sezione normale del diedro genera un angolo retto e quindi α e β sono perpendicolari.



▲ **Figura 9.**

3 Affinché i radicali abbiano entrambi senso deve essere:

$$\begin{cases}x^2-2x\geq 0\\ x-\sqrt{x^2-2x}\geq 0\end{cases}\quad\text{che equivale al sistema}\quad\begin{cases}x^2-2x\geq 0\\ x^2\geq x^2-2x\\ x\geq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x(x-2)\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\quad\text{che ha soluzioni } x=0\vee x\geq 2.$$

Il campo di esistenza della funzione data è quindi $x=0\vee x\geq 2$ e la risposta esatta è D.

4 Sia $p(x)$ un polinomio di grado $n\geq 2$ a coefficienti reali. Se $p(x)$ ammette due zeri uguali al numero reale α esso si può fattorizzare come $p(x)=(x-\alpha)^2 q(x)$ con $q(x)$ polinomio di grado $n-2$.

Dimostriamo la prima implicazione: $p(x)=(x-\alpha)^2 q(x)$ e $q(\alpha)\neq 0 \quad\rightarrow\quad p(\alpha)=0,\ p'(\alpha)=0$.

Essendo $p'(x)=2(x-\alpha)\,q(x)+(x-\alpha)^2\cdot q'(x)$, si ha $p(\alpha)=0$ e $p'(\alpha)=0$.

Dimostriamo la seconda implicazione: $p(\alpha)=0,\ p'(\alpha)=0 \rightarrow \alpha$ è radice almeno doppia di $p(x)=0$.

Essendo $p(\alpha)=0$ si può scrivere la fattorizzazione $p(x)=(x-\alpha)\cdot s(x)$ con $s(x)$ polinomio di grado $n-1$. Inoltre $p'(x)=s(x)+(x-\alpha)\cdot s'(x)\rightarrow p'(\alpha)=s(\alpha)$, quindi $p'(\alpha)=0\rightarrow s(\alpha)=0$ e allora $s(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$ e si può fattorizzare nel seguente modo: $s(x)=(x-\alpha)\cdot q(x)$ con $q(x)$ polinomio di grado $n-2$. Sostituendo nella fattorizzazione di $p(x)$ si ottiene: $p(x)=(x-\alpha)\cdot s(x)\rightarrow p(x)=(x-\alpha)\cdot(x-\alpha)\cdot q(x)=$ $=(x-\alpha)^2\cdot q(x)$ e quindi α è almeno radice doppia di $p(x)$.

5 Il campo di esistenza della funzione $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ è $]-1,0[\,\cup\,]0,+\infty[$. Non ha allora senso cercare il $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Il $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ è una forma indeterminata della forma 1^{∞}. Posto $x=\dfrac{1}{y}$, si ottiene il limite notevole $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=e.$

Il $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ è una forma indeterminata del tipo ∞^0. Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$. Quando $x\to+\infty$ sia il numeratore che il denominatore di $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ tendono a $+\infty$, quindi si può applicare la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0.$$

Allora: $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$

6 Un sistema omogeneo ammette la sola soluzione nulla se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo. Calcoliamo il determinante della matrice associata al sistema omogeneo dato:

$$\det\begin{bmatrix} k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{bmatrix}=k(k^2-1)-(k-1)+(1-k)=(k-1)(k^2+k-2)=(k-1)(k-1)(k+2)=(k-1)^2(k+2).$$

Si ha $\det=0\leftrightarrow k=1\vee k=-2$, quindi l'affermazione «il sistema ammette la sola soluzione $x=0$, $y=0$, $z=0$ per ogni valore di k diverso da 1» è falsa perché anche per $k=-2$ (che è un valore diverso da 1) il sistema ammette soluzioni non nulle oltre a quella nulla.

7 La formula dell'area dell'ellisse di semiassi noti a e b è πab.

Dimostriamola utilizzando le proprietà delle affinità. Trasformiamo l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ mediante l'affinità:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x}{a}\\[2ex] y'=\dfrac{y}{b}\end{cases}.$$

Si ottiene la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$ di area π. Un' importante proprietà delle affinità è che il rapporto tra l'area S di una figura e quella della sua trasformata S' è costante e vale la relazione:

$A_{S'}=|\det(A)|A_S$ dove A è la matrice associata all'affinità. Nel nostro caso $\det(A)=\dfrac{1}{ab}$ e $A_{S'}=\pi$, quindi *Area ellisse* $=A_S=\dfrac{A_{S'}}{|\det(A)|}=\pi ab.$

8 La generica affinità $\begin{cases} x'=\alpha x+\beta y+\gamma\\ y'=\alpha' x+\beta' y+\gamma'\end{cases}$ è diretta se $\det\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{bmatrix}>0$, ed è una similitudine se sono verificate le seguenti condizioni: $\begin{cases}\alpha^2+\alpha'^2=\beta^2=\beta'^2\\ \alpha\beta+\alpha'\beta'=0\end{cases}$.

Quindi l'affinità $\begin{cases}x'=(a+1)x-by+a\\ y'=(a-1)x+2by-1\end{cases}$ è una similitudine diretta se valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases}(a+1)^2+(a-1)^2=b^2+4b^2\\ -(a+1)b+(a-1)2b=0\\ 2b(a+1)+b(a-1)>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2a^2+2=b^2+4b^2\\ ab-3b=0\\ 3ab>0\end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $a=3$, e sostituendo nelle altre si ha:

$$\begin{cases}b^2=4\\ a=3\\ 9b>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}b=2\\ a=3\end{cases}.$$

La similitudine richiesta è quindi:

$$\begin{cases}x'=4x-2y+3\\ y'=2x+4y-1\end{cases}.$$

Cerchiamo il punto unito. Poniamo:

$$\begin{cases}x=4x-2y+3\\ y=2x+4y-1\end{cases} \text{ da cui:}$$

$$\begin{cases}3x-2y+3=0\\ 2x+3y-1=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{3}y-1\\ \dfrac{4}{3}y-2+3y-1=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{7}{13}\\ y=\dfrac{9}{13}\end{cases}.$$

Il punto unito ha coordinate $\left(-\dfrac{7}{13};\dfrac{9}{13}\right)$.

9 **a)** La prima pallina estratta viene rimessa nell'urna, quindi la probabilità della seconda estrazione è indipendente da quanto successo nella prima estrazione e vale:

$$P=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$$

b) Dopo la prima estrazione rimangono nell'urna 29 palline di cui 17 bianche, quindi $P=\dfrac{17}{29}$.

c) Non avendo informazioni sulla prima estrazione, per quanto riguarda la seconda estrazione possiamo solo dire che la pallina estratta sarà una delle 30 palline di cui 18 bianche e 12 nere. Quindi $P=\dfrac{18}{30}=\dfrac{3}{5}$.

Verifichiamo il ragionamento usando il teorema della probabilità totale. Indichiamo con E, A e B gli eventi:

$E=$ "La seconda pallina estratta è bianca",
$A=$ "La prima pallina estratta è bianca",
$B=$ "La prima pallina estratta è nera".

Si ha: $P(E)=P(A)\cdot P(E\,|\,A)+P(B)\cdot P(E\,|\,B)=\dfrac{18}{30}\dfrac{17}{29}+\dfrac{12}{30}\dfrac{18}{29}=\dfrac{3}{5}$, e abbiamo ritrovato il risultato precedente.

10 Affinché l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, abbia due radici reali deve essere $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. In tal caso le due radici sono:

- distinte e della forma $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ se $\Delta > 0$,

- coincidenti e della forma $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$ se $\Delta = 0$.

Esprimiamo l'algoritmo in linguaggio di progetto:
Inizio;
Ripeti
    Leggi a, b, c;
finché $a = 0$;
Assegna $b^2 - 4ac$ a Δ;
se $\Delta < 0$,
    allora Scrivi "Le radici non sono reali";
Se $\Delta > 0$,
    allora Assegna $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ a x_1;
        Assegna $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ a x_2;

        Scrivi "Le radici sono distinte: ", x_1, " e ", x_2,;

Se $\Delta = 0$
    allora Assegna $\dfrac{-b}{2a}$ a x;

        Scrivi "Le radici sono coincidenti: ", x;

Fine.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 12 pag. L 429 punti a) e b) • Problema 288 pag. L 224 • Problema 289 pag. L 224 • Problema 24 pag. W 139 • Problema 26 pag. W 140 • Esercizio 176 pag. V 265 • Problema 514 pag. J_1 112 • Problema 23 pag. J_1 122
Problema 2	• Quesito 8 pag. J_1 119 • Problema 24 pag. J_1 123 • Problema 20 pag. J_1 122 • Esercizio 545 pag. J_1 114 • Esercizio 511 pag. J_1 111 • Esercizio 505 pag. J_1 110
Quesito 1	• Esercizio 111 pag. Q 124 • Quesito 10 pag. W 169
Quesito 2	• Quesito 7 pag. π 96 • Esercizio 12 pag. π 71 • Quesito 10 pag. π 142 • Quesito 9 pag. W 165
Quesito 3	• Test 1 pag. U 41 • Problema 10 pag. U 43 punto a) • Esercizio 106 pag. U 28
Quesito 4	• Quesito 5 pag. W 173
Quesito 5	• Quesito 6 pag. U 207 • Quesito 7 pag. U 207 • Esercizio 258 pag. U 174
Quesito 6	• Test 7 pag. T 143 • Quesito 27 pag. W 184 • Quesito 29 pag. W 184
Quesito 7	• Quesito 8 pag. J_1 119 • Esercizio 500 pag. J_1 109
Quesito 8	• Esercizio 511 pag. J_1 111 • Quesito 3 pag. W 171
Quesito 9	• Quesito 4 pag. α 94 • Problema 10 pag. α 99 • Problema 11 pag. α 99