ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico G di f.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

PROBLEMA 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ *metri*, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di K.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

QUESTIONARIO

1 Trovate due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

2 Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

3 Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.

4 Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.

5 Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$. Trovate una espressione di $g(x)$.

6 Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

7 Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e γ. Quale è il valore di γ che massimizza l'area del triangolo?

8 La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

9 Calcolate: $\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx$.

10 Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

PROBLEMA 1

1) Il dominio della funzione f, come tutte le funzioni polinomiali, è l'intero asse reale; f è continua e derivabile e, poiché è somma di soli termini con esponenti dispari, si ha che $f(-x) = -f(x)$, ovvero f è simmetrica rispetto all'origine degli assi.

Poiché f non presenta punti di discontinuità gli unici limiti che ha senso considerare sono quelli per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$.

Come per tutte le parabole cubiche il risultato di tali limiti non può che essere ∞, di cui si deve determinare il segno; esso dipende dal segno del termine di grado massimo che in questo caso vale -3; pertanto c'è un'inversione del segno dell'infinito a cui tende la x con quello a cui tende la funzione; ovvero:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

La f interseca l'asse delle ascisse in $x = 0$, come tutte le funzioni simmetriche rispetto all'origine, e in $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ e risulta positiva per $x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee 0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$.

La derivata prima, $f'(x) = 2 - 9x^2$, è positiva per $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$ e pertanto la f è crescente in tale intervallo con un minimo relativo in $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ e un massimo relativo in $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$.

La derivata seconda $f''(x) = -18x$ è positiva per ogni $x < 0$ e pertanto la f ha la concavità verso l'alto in tale intervallo, con un punto di flesso nell'origine; per un disegno accurato del grafico di f è utile calcolare l'inclinazione della tangente nel punto di flesso sostituendo l'ascissa del punto di flesso nella $f'(x)$; si ottiene così $f'(0) = 2$.

Con queste informazioni è possibile disegnare il grafico di f (figura 1).

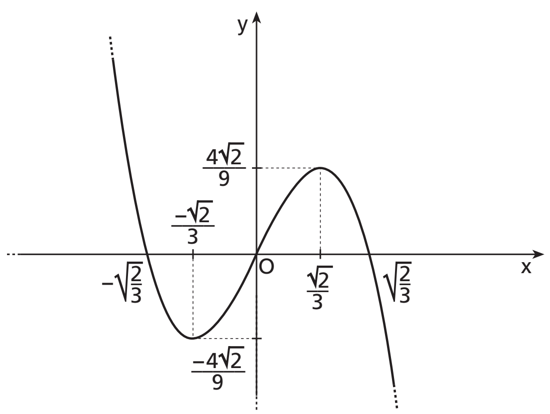
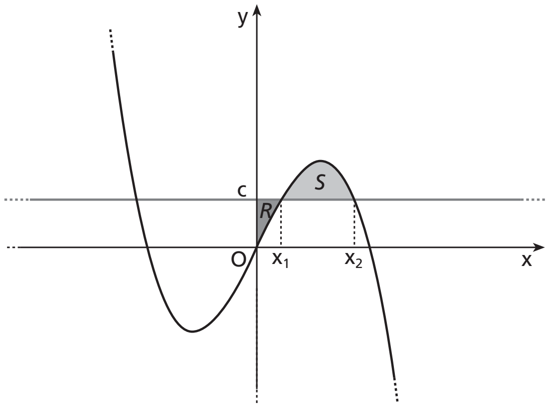


Figura 1.

2)



◀ **Figura 2.**

3) Siano x_1 e x_2 le ascisse dei punti di intersezione della $f(x)$ con la retta $y = c$; tali valori sono due delle soluzioni dell'equazione $2x - 3x^3 = c$ quando c è compresa tra 0 e la y del punto di massimo relativo; poiché questa equazione letterale di terzo grado non è risolubile per via algebrica occorre determinare x_1, x_2 e c ponendo a sistema le informazioni note, ovvero che $f(x_1) = c$, $f(x_2) = c$, e che l'area R, l'integrale della differenza tra la retta e la $f(x)$ calcolato tra 0 e x_1, è uguale all'area S, l'integrale della differenza tra la $f(x)$ e la retta calcolato tra x_1 e x_2, e cioè:

$$\int_0^{x_1} (c - 2x + 3x^3)dx = \int_{x_1}^{x_2} (2x - 3x^3 - c)dx$$

Dopo semplici passaggi si arriva all'equazione: $x_2 \cdot \left(x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c\right) = 0$ da cui, uguagliando il secondo fattore a zero, si arriva all'equazione da porre nel sistema:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c = 0 & (1) \\ 2x_2 - 3x_2^3 = c & (2) \\ 2x_1 - 3x_1^3 = c & (3) \end{cases}$$

Ricavando c dalla (1) e sostituendo nella (2) si ottiene un'equazione nella sola incognita x_2, che dopo un raccoglimento diventa un'equazione di secondo grado con due soluzioni $\pm \frac{2}{3}$. A noi interessa solo quella positiva poiché le intersezioni cercate si trovano nel 1° quadrante.

Trovato $x_2 = \frac{2}{3}$ lo si sostituisce nella (1) o nella (2) e si trova $c = \frac{4}{9}$; posto quest'ultimo valore nella (3) si ha un'equazione di terzo grado nell'incognita x_1, che possiamo abbassare di grado dividendo per il binomio $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ poiché sappiano già che $x_2 = \frac{2}{3}$ è soluzione di tale equazione.

Si ottiene così l'equazione: $3x_1^2 + 2x_1 - \frac{2}{3} = 0$ che ha due soluzioni: $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$ di cui ci interessa solo quella positiva: $x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$.

4) Per determinare la funzione $g(x)$, simmetrica della $f(x)$ rispetto alla retta $y=\frac{4}{9}$, poiché sappiamo che la funzione simmetrica rispetto all'asse delle ascisse si ottiene cambiando il segno alla funzione, occorre

- riferire la $f(x)$ ad un sistema con asse delle ascisse $y=\frac{4}{9}$, ovvero: $f(x)-\frac{4}{9}$
- considerare la funzione opposta: $-\left(f(x)-\frac{4}{9}\right)$
- ritornare a riferire il tutto al sistema di riferimento originale, sommando $\frac{4}{9}$, ovvero:

$$g(x)=-\left(f(x)-\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}=3x^3-2x+\frac{8}{9}$$

PROBLEMA 2

1) Poiché ABC è un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza con l'ipotenusa come diametro; pertanto la mediana relativa all'ipotenusa sarà un raggio della semicirconferenza e come tale metà del diametro, ovvero dell'ipotenusa.

2) Indicati, per brevità con i l'ipotenusa BC, con h l'altezza relativa all'ipotenusa si può scrivere la seguente uguaglianza:
il prodotto dei cateti è uguale al prodotto dell'ipotenusa per l'altezza ad essa relativa; inoltre vale il teorema di Pitagora; ponendo a sistema le due uguaglianze si ottiene il seguente sistema simmetrico:

$$\begin{cases} AB\cdot AC=h\cdot i & (1)\\ AB^2+AC^2=i^2 & (2)\end{cases}$$

La (2) può essere riscritta come $(AB+AC)^2-2AB\cdot AC=i^2$ in cui si può sostituire ad $AB\cdot AC$ il valore fornito dalla (1), portare tale termine al secondo membro, estrarre la radice quadrata di entrambi i membri e considerare la sola radice positiva, in quanto la somma di segmenti è positiva; il sistema pertanto diventa:

$$\begin{cases} AB\cdot AC=hi & (1)\\ AB+AC=\sqrt{i^2+2hi} & (2)\end{cases}$$

Come per tutti i sistemi simmetrici le soluzioni sono rappresentate dalle radici dell'equazione: $t^2-st+p=0$, con s somma delle incognite e p prodotto; in questo caso diventa:
$t^2-t\sqrt{i^2+2hi}+hi=0$; indicato con AC il cateto maggiore le soluzioni saranno:

$$AC=\frac{\sqrt{i^2+2hi}+\sqrt{i^2-2hi}}{2} \quad \text{e} \quad AB=\frac{\sqrt{i^2+2hi}-\sqrt{i^2-2hi}}{2}$$

3) Se si indica con x uno dei due cateti, ad esempio AB l'altro sarà $AC=\sqrt{3-x^2}$; poiché il volume del cono dipende dal quadrato del raggio della base sarà conveniente usare AC come raggio e AB come altezza del cono; il volume di K pertanto sarà:

$$V_K=\frac{\pi\cdot AC^2\cdot AB}{3}=\frac{\pi\cdot(3-x^2)\cdot x}{3}=\frac{\pi}{3}(3x-x^3)\ m^3$$

Per cercare il cono di volume massimo occorre uguagliare a zero la derivata prima del volume rispetto alla variabile x; si ottengono così due valori: $x=-1$ e $x=1$, dove, essendo x la misura di un segmento, solo la soluzione positiva ha significato geometrico.

Se $AB=1$ allora $AC=\sqrt{2}$ e $V_K=\frac{2}{3}\pi\ \ m^3$; ma un litro corrisponde ad un dm^3 e pertanto:

$$V_K=\frac{2\cdot 10^3}{3}\pi \quad \textit{litri}$$

4) La misura di un angolo in radianti è pari al rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio; lo sviluppo piano della superficie laterale del cono K origina un settore circolare compreso tra un arco, la cui misura è pari alla misura della circonferenza della base di $K(2\sqrt{2}\pi)$, e due raggi che misurano quanto l'apotema del cono K, ovvero $\sqrt{3}$. Pertanto l'angolo α sarà:

$\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi \approx 5{,}1$ radianti o, in gradi sessagesimali, $\alpha_g = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\cdot 180° \approx 293°56'19''$

QUESTIONARIO

1 Indicato con m sia la somma dei due numeri cercati sia il loro prodotto, tali numeri saranno le radici dell'equazione:

$x^2 - mx + m = 0$ ovvero: $a = \dfrac{m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$ e $b = \dfrac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$

con la condizione, dovendo essere a e b numeri reali diversi tra loro, che il discriminante sia positivo, ovvero: $m < 0 \lor m > 4$.

2 La superficie totale di un cilindro equilatero, avente cioè l'altezza uguale al diametro $2r$ della base, è: $6\pi r^2$ mentre il volume della sfera circoscritta al cilindro, ovvero una sfera di raggio $r\sqrt{2}$, ha una superficie pari a $8\pi r^2$; il rapporto tra le due superficie è, quindi, $\dfrac{3}{4}$.

3 La funzione più semplice è da ricercare all'interno delle funzioni polinomiali; una funzione con un minimo relativo per $x = -1$ e un massimo relativo per $x = 1$ è crescente per valori interni a tale intervallo e, pertanto, la derivata prima contiene il fattore $(1 - x^2)$; la presenza di un fattore costante non altera il risultato e pertanto la derivata prima può essere:

$f'(x) = a(1 - x^2)$ che integrata fornisce: $f(x) = ax - \dfrac{a}{3}x^3 + c$

Imponendo il passaggio della funzione per i punti forniti dal quesito si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 3 = +\dfrac{2}{3}a + c \\ 2 = -\dfrac{2}{3}a + c \end{cases} \quad \text{che ha soluzione:} \quad \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ c = \dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \text{da cui: } f(x) = -\dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$$

4 Le soluzioni dell'equazione: $e^x + 3x = 0$ sono rappresentate dalle intersezioni della funzione $f(x) = e^x + 3x$ con l'asse delle ascisse; tale funzione ha derivata prima: $f'(x) = e^x + 3$, positiva per qualunque x reale, e pertanto $f(x)$ risulta essere monotona crescente e, come tale, assume una e una sola volta tutti i valori del suo codominio; essendo il codominio $]-\infty, +\infty[$ la $f(x)$ assumerà una e una sola volta il valore $y = 0$, intersecando quindi una e una sola volta l'asse delle ascisse.

5 Le funzioni che soddisfano le condizioni indicate dal quesito sono infinite ma tutte devono presentare un punto di discontinuità di terza specie in $x = 2$; un esempio di $g(x)$ è il seguente:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & per\ x \neq 2 \\ 4 & per\ x = 2 \end{cases}$$

6 In base alle proprietà dei logaritmi si può trasformare $g(x)$ come segue:

$$g(x) = \log(2x)^3 = 3\log(2x) = 3\log 2 + 3\log x = 3\log 2 + f(x)$$

Pertanto $g(x)$ e $f(x)$ differiscono solamente per la costante $3\log 2$ e avranno quindi la stessa derivata: $g'(x) = f'(x) = \dfrac{3}{x}$.

7 L'area di un triangolo qualunque è uguale alla metà del prodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso, ovvero $A = \dfrac{1}{2} ab \operatorname{sen}\delta$; tale area sarà massima quando $\operatorname{sen}\delta = 1$ e cioè quando $\delta = \dfrac{\pi}{2}$.

8 Il grado sessagesimale è la 360ª parte dell'angolo giro; il radiante è l'angolo al centro del cerchio goniometrico che insiste su un arco di lunghezza unitaria; il grado centesimale è la 400ª parte dell'angolo giro.

9 Questo integrale può essere calcolato con la formula di integrazione per parti prendendo come fattore finito $\operatorname{arcsen} x$ e come fattore differenziale $1 \cdot dx$, si ottiene così:

$$\left[x \cdot \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

10 Dovendo associare a ciascuno dei quattro elementi di A uno dei tre elementi di B si ottengono 3^4 diverse applicazioni, ovvero tutte le possibili disposizioni con ripetizione di 3 elementi presi a gruppi di 4.