ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), è assegnata la curva *K* di equazione:

(1) $$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con *A* il suo punto di massimo relativo.

b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove *a*, *b* sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse *x* e dalla curva *K*.

c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in *A* e la base sull'asse *x*, determinare quello il cui perimetro è 16.

d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva *K* divide il triangolo trovato sopra.

e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

PROBLEMA 2

Una piramide ha per base il quadrato *ABCD* di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza *VH* della piramide è lunga 7 cm e il suo piede *H* è il punto medio del lato *AB*. Condurre per la retta *AB* il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con *EF* la corda che il piano α intercetta sulla faccia *VCD* della piramide.

a) Spiegare perché il quadrilatero convesso *ABEF* è inscrivibile in una circonferenza γ.

b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile a una circonferenza?

c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.

d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (*Oxy*), determinare l'equazione della circonferenza γ.

QUESTIONARIO

1 La funzione $f(x) = \frac{3x - 2\,\text{sen}\,x}{2x - 3\,\text{sen}\,x}$ è, per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$:

A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2 Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10 000.

3 Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

4 Risolvere la seguente disequazione in x:

$$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2).$$

5 Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:

A) sempre maggiore di h;
B) sempre minore di h;
C) sempre uguale ad h;
D) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7 Il quadrilatero Q'' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne esauriente dimostrazione.

8 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)\,dx$. È allora possibile calcolare:

A) $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; B) $\int_0^3 f(3x)\,dx$; C) $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; D) $\int_0^1 f(3x)\,dx$.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

9 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x-1})$.

10 Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen}\beta = \frac{24}{25}$, ne esistono:

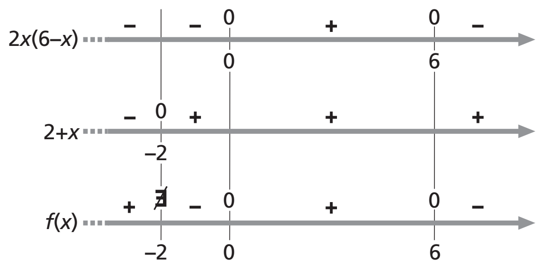
A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{2x(6-x)}{2+x}$ è l'intervallo $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ e si ottiene imponendo che il denominatore di f non sia nullo. Lo schema di figura 1 mostra il segno di f: la funzione si annulla in $x=0$ e in $x=6$, è positiva per $x<-2$ e per $0<x<6$, negativa per $-2<x<0$ e per $x>6$.



▲ Figura 1.

Calcoliamo i limiti. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f = -\infty, \quad \lim_{x\to-2^-} f = +\infty.$$

Quindi la retta $x=-2$ è asintoto verticale.
Cerchiamo eventuali asintoti obliqui di equazione $y=mx+q$, con $m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx]$. Si ha:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(6-x)}{2+x} = -2$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x(6-x)}{2+x} + 2x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{16x}{2+x} = 16.$$

La retta $y=-2x+16$ è asintoto obliquo di f.

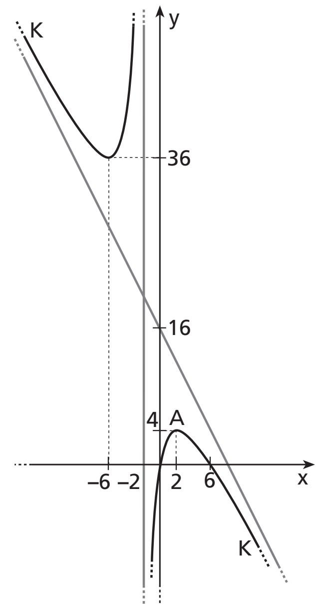
La derivata prima $f'(x) = \dfrac{(12-4x)(2+x)-12x+2x^2}{(2+x)^2} = \dfrac{-2(x^2+4x-12)}{(2+x)^2}$ ha campo di esistenza uguale a quello di f e si annulla per $x=-6$ e $x=2$. Essendo il denominatore sempre positivo, il segno di f' è concorde con il segno del numeratore. Si ha:

per $-6<x<2$, $f'(x)>0$ e la funzione f è crescente;
per $x<-6$ e $x>2$, $f'(x)<0$ la funzione f è decrescente.

Quindi $x=-6$ è punto di minimo relativo e $x=2$ è punto di massimo relativo. I corrispondenti valori di f sono $f(-6)=36$ e $f(2)=4$. Le coordinate del punto A sono dunque $A(2, 4)$.

La derivata seconda $f''(x) = \dfrac{-64}{(x+2)^3}$ non si annulla in nessun punto del suo campo di esistenza, è positiva per $x<-2$, negativa per $x>-2$. Si conclude che la funzione f non ha flessi, ha concavità rivolta verso l'alto per $x<-2$ e concavità rivolta verso il basso per $x>-2$.

Il grafico riportato in figura 2 mostra che la curva K è un'iperbole non equilatera di asintoti $x = -2$ e $y = -2x + 16$.



b) La domanda richiede un conteggio diretto dei punti. Dalle ipotesi $0 \leq \frac{a}{2} \leq 6$ e $0 \leq \frac{b}{2} \leq f(x)$ (a e b numeri interi) si ricava: $0 \leq a \leq 12$ e $0 \leq b \leq 2f(x)$. Quindi i possibili valori che le ascisse dei punti possono assumere sono 13 e sono: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots\ldots\ldots, \frac{11}{2}, 6$. Fissato $x = \frac{a}{2}$, i punti da conteggiare lungo la verticale per x sono tutti i punti $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ che soddisfano la condizione $0 \leq b \leq 2f\left(\frac{a}{2}\right)$; essi sono $1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$, dove il simbolo int indica la funzione parte intera. Ricordiamo che dato z numero reale, $\text{int}(z)$ è il più grande numero intero minore o uguale a z. Memorizziamo i punti di ciascuna linea verticale nella seguente tabella.

▶ **Figura 2.**

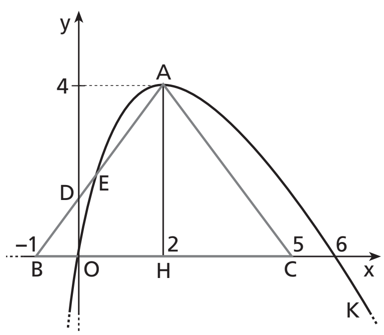
x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$2f(x)$	0	4,4	6,6	7,7	8	7,7	7,2	6,3	5,3	4,1	2,8	1,4	0
$1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$	1	5	7	8	9	8	8	7	6	5	3	2	1

Il numero di punti totale è quindi $\sum_{a=0}^{12} 1 + \text{int}\left(2f\left(\frac{a}{2}\right)\right) = 70$.

c) Indichiamo con $B(b; 0)$ il vertice a sinistra di $A(2; 4)$, con $C(c; 0)$ il vertice a destra di A e con $H(2; 0)$ il piede dell'altezza relativa alla base BC (vedi figura 3). Per le ipotesi sul triangolo ABC:

$$\overline{BH} = \overline{HC} \rightarrow c = 4 - b$$

e quindi il punto C ha coordinate $C(4 - b; 0)$. Sostituendo le coordinate dei punti A e B nella relazione $\overline{AB} + \overline{BH} = 8$ si ottiene: $\sqrt{(b-2)^2 + 16} + \sqrt{(b-2)^2} = 8$. Essendo $b < 2$ per ipotesi, si ha $|b - 2| = 2 - b$; quindi $\sqrt{(b-2)^2 + 16} = 6 + b$ che ha senso per $b > -6$. D'altronde se fosse $b < -6$, la base BC del triangolo avrebbe lunghezza superiore a 16 e quindi il perimetro non potrebbe essere 16. Possiamo elevare al quadrato ambo i membri della relazione $\sqrt{(b-2)^2 + 16} = 6 + b$ e risolvendo si ottiene $b = -1$. Quindi $c = 5$ e il triangolo richiesto ha vertici $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(5; 0)$.



▲ **Figura 3.**

d) Si osserva dalla figura 3 che la regione del triangolo ABC a sinistra della curva K è formata dall'unione del triangolo BOD, la cui area è $\frac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{OD}$, con la figura di vertici ODE, la cui area richiede il calcolo di un integrale. In sintesi: $A_{BOE} = A_{OBD} + A_{ODE}$.

Calcoliamo le coordinate di D ed E. La retta per A e B ha equazione $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$, quindi si ha $D\left(0;\frac{4}{3}\right)$ e $A_{OBD}=\frac{1}{2}\overline{OB}\cdot\overline{OD}=\frac{2}{3}$. Le coordinate di E si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2x^2+12x}{2+x} \\ y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione risolvente $5x^2-12x+4=0$ che ha due soluzioni, $x=2$ e $x=\frac{2}{5}$. Quindi $x=\frac{2}{5}$ è l'ascissa di E, essendo $x=2$ l'ascissa del punto A già noto.

L'area della figura di vertici ODE è:

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-f(x)\right)dx=\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{-2x^2+12x}{2+x}\right)dx.$$

Poiché $\frac{-2x^2+12x}{2+x}=-2x+16-\frac{32}{2+x}$, si ha:

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{-2x^2+12x}{2+x}\right)dx=\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}+2x-16+\frac{32}{2+x}\right)dx=$$

$$\int_0^{\frac{2}{5}}\left(\frac{10}{3}x-\frac{44}{3}+\frac{32}{2+x}\right)dx=\left[\frac{5}{3}x^2-\frac{44}{3}x+32\ln|x+2|\right]_0^{\frac{2}{5}}=32\ln\frac{6}{5}-\frac{28}{5}.$$

Quindi $A_{BOE}=A_{OBD}+A_{ODE}=\frac{2}{3}+32\ln\frac{6}{5}-\frac{28}{5}=32\ln\frac{6}{5}-\frac{74}{15}$.

Infine l'area della parte di triangolo a destra della curva K si calcola come differenza:

$$A_{OEAC}=A_{ABC}-A_{BOE}=12-32\ln\frac{6}{5}+\frac{74}{15}=\frac{254}{15}-32\ln\frac{6}{5}.$$

e) Una funzione $f\colon A\rightarrow B$ è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva. Se f è iniettiva ma non suriettiva, è sufficiente sostituire B con il codominio di f per ottenere una funzione invertibile, se f è suriettiva ma non iniettiva, per ottenere una funzione invertibile, si deve restringere il dominio di f ad un sottoinsieme di A in cui f sia iniettiva.

La funzione (1) $f(x)=\frac{2x(6-x)}{2+x}$ non è invertibile perché non è iniettiva: come dimostrato nel punto a), $f(0)=f(6)=0$. Osservando la figura 2 si può infatti notare che esistono infinite rette paralelle all'asse x che intersecano il grafico di f in 2 punti. Restringiamo il dominio di f $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ ad un sottoinsieme in cui f sia iniettiva. Sempre osservando la figura 2 si individuano almeno quattro sottoinsiemi in cui f è iniettiva: $D_1=]-\infty,-6]\cup]-2,+2]$, $D_2]-\infty,-6]\cup[+2,+\infty[$, $D_3=[-6,-2[\cup]-2,+2]$, $D_4=[-6,-2[\cup[+2,+\infty[$. Altri sottoinsiemi si ottengono restringendo ulteriormente ciascuno dei sottoinsiemi individuati.

L'espressione dell'inversa di f si ottiene ricavando x dalla relazione $y=\frac{2x(6-x)}{2+x}$. Si ha:

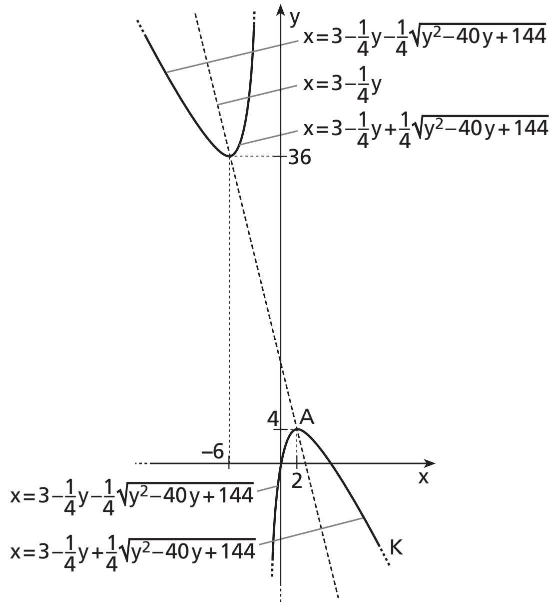
$$x=\frac{12-y\pm\sqrt{y^2-40y+144}}{4}\Leftrightarrow x=3-\frac{1}{4}y\pm\frac{1}{4}\sqrt{y^2-40y+144}.$$

Il segno $\pm$ conferma la non invertibilità della funzione f sul suo campo di esistenza. Affinché la radice sia definita deve essere $y^2-40y+144\geq 0$ che è soddisfatta per $y\in]-\infty,+4]\cup[36,+\infty[$; abbiamo così ritrovato il codominio di f.

La parte dell'espressione di x che non dipende dal segno del radicale è $x = 3 - \frac{1}{4}y$ che, come si osserva in figura 4, è l'equazione della retta che passa dai punti di massimo e minimo relativi di f.

Quindi $x = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a sinistra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$, mentre

$x = 3 - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ rappresenta la parte di grafico della curva K situata a destra della retta $x = 3 - \frac{1}{4}y$.



▲ **Figura 4.**

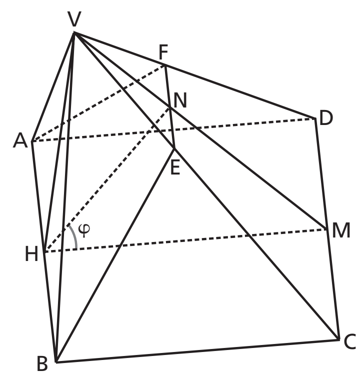
Allora, ad esempio, la funzione

$$g :]-\infty, +4] \cup [36, +\infty[\mapsto]-\infty, -6] \cup]-2, +2]$$

tale che $g(y) = 3 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\sqrt{y^2 - 40y + 144}$ è l'inversa della funzione (1) ristretta al dominio D_1. Procedendo in modo analogo si possono costruire altre funzioni inverse della funzione data (1).

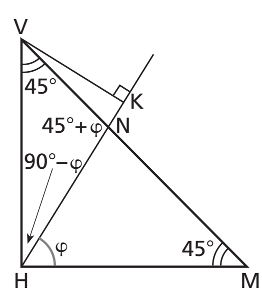
PROBLEMA 2

a) Costruiamo la piramide e conduciamo per la retta AB il piano α. La retta CD non interseca il piano α e quindi nemmeno la retta EF (intersezione di α col piano della faccia CDV), perciò $CD \parallel EF$. Per ipotesi $CD \parallel AB$, quindi la corda EF è parallela anche ad AB: pertanto il quadrangolo convesso $ABEF$ è un trapezio.
Per ipotesi la faccia AVB è un triangolo isoscele (l'altezza VH è mediana della base AB), quindi $VA \cong VB$. Per il primo criterio di congruenza le facce ADV e BCV sono triangoli rettangoli congruenti ($AD \cong BC$ per ipotesi, $VA \cong VB$, $DA \perp VA$, $BC \perp VB$ per il teorema delle tre perpendicolari) e anche la faccia CDV è un triangolo isoscele. Poiché EF è parallela a CD allora $VE \cong VF$, quindi, per il primo criterio di congruenza, il triangolo AFV è congruente al triangolo BEV, da cui $AF \cong BE$. Il trapezio $ABEF$ è dunque isoscele e quindi inscrittibile in una circonferenza (un quadrangolo convesso con angoli opposti supplementari è inscrittibile in una circonferenza).



▲ **Figura 5.**

b) Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che siano uguali le somme delle coppie di lati opposti. Nel nostro caso dobbiamo verificare se $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$.
Per determinare $\overline{EF}$ si osserva che i triangoli VEF e VDC sono simili; una volta determinato il rapporto di similitudine $\frac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ si può calcolare anche $\overline{EF}$. Studiamo quindi il triangolo VHM, riportato per comodità in figura 6: è un triangolo rettangolo isoscele, quindi $H\hat{V}M = H\hat{M}V = 45°$. Si ha poi $V\hat{H}N = 90° - \varphi$ e $V\hat{N}H = 45° + \varphi$.



▲ **Figura 6.**

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo VHN:

$$\frac{\overline{VN}}{\operatorname{sen}(90° - \varphi)} = \frac{\overline{VH}}{\operatorname{sen}(45° - \varphi)}$$

da cui si ricava:

$$\overline{VN} = \frac{7\cos\varphi}{\operatorname{sen}45°\cos\varphi + \cos 45°\operatorname{sen}\varphi}.$$

Poiché per ipotesi $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, si ha $\operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{5}$, quindi:

$$\overline{VN} = \frac{7\cdot\frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}} = \frac{21}{7\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Essendo $\overline{VM} = 7\sqrt{2}$, il rapporto di similitudine $\frac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ è allora $\frac{3}{7}$, pertanto $\overline{EF} = \frac{3}{7}\overline{CD} = 3\,\text{cm}$.

Calcoliamo infine $\overline{NH}$ mediante il teorema di Carnot:

$$NH = \sqrt{VN^2 + VH^2 - 2VN\cdot VH\cdot\cos\hat{V}} = 5\,\text{cm}.$$

Affinché la relazione $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$ sia vera, dovrebbe essere $\overline{AF} = \frac{\overline{AB} + \overline{EF}}{2} = 5\,\text{cm}$. Ma, ricordando che $\overline{AF}$ è un lato obliquo del trapezio isoscele $ABEF$ e che l'altezza del trapezio è $\overline{NH} = 5\,\text{cm}$, deve essere $\overline{AF} > 5\,\text{cm}$, quindi la relazione $\overline{AB} + \overline{EF} = \overline{AF} + \overline{BE}$ è falsa e il trapezio $ABEF$ non è circoscrivibile a una circonferenza.

c) La parte superiore è la piramide $ABEFV$ di base il trapezio isoscele $ABEF$ la cui altezza $\overline{VK}$, come si vede in figura 6, si ottiene proiettando il vertice V sul piano α, in particolare sulla retta per $\overline{NH}$:

$\overline{VK} = \overline{VH}\cdot\operatorname{sen}(90° - \varphi) = 7\cos\varphi = \frac{21}{5}\,\text{cm}$. Quindi il volume della piramide $ABEFV$ è:

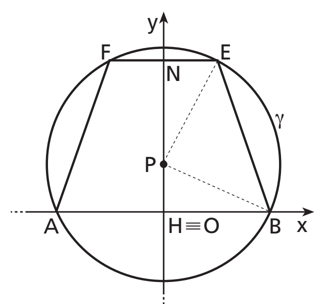
$$V_{(ABEFV)} = \frac{1}{3}A_{(ABEF)}\cdot\overline{VK} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{EF})\cdot\overline{HN}\cdot\frac{21}{5}\,\text{cm} = 35\,\text{cm}^3.$$

Il volume della parte inferiore della piramide $ABCDV$ si ottiene per differenza:

$$V_{(ABCDEF)} = V_{(ABCDV)} - V_{(ABEFV)} = \frac{1}{3}A_{(ABCD)}\cdot\overline{VH} - 35\,\text{cm}^3 = \frac{343}{3}\,\text{cm}^3 - 35\,\text{cm}^3 = \frac{238}{3}\,\text{cm}^3.$$

d) Scegliamo un sistema di riferimento di centro $O(0, 0) \equiv H$, avente come asse x la retta per AB orientata da A verso B e come asse y la retta per HN orientata da H verso N come illustrato in figura 7.

Cerchiamo l'equazione della circonferenza γ passante per i punti $A\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$, $B\left(+\frac{7}{2}, 0\right)$, $E\left(\frac{3}{2}, 5\right)$, $F\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$, simmetrica rispetto all'asse y e che quindi ha centro $P(0, k)$. L'equazione della circonferenza rispetto al sistema di riferimento scelto è quindi $x^2 + (y - k)^2 = r^2$. Determiniamo k ed r.



▲ **Figura 7.**

Il centro $P(0, k)$ deve essere equidistante da B ed E:

$$\overline{PE}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4} + (5 - k)^2 = \frac{49}{4} + k^2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}.$$

Quindi il centro ha coordinate $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $r^2 = \overline{PE}^2 = \frac{58}{4}$.

L'equazione di γ rispetto al sistema di riferimento scelto è $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{58}{4}$, che dopo alcuni calcoli diventa: $x^2 + y^2 - 3y - \frac{49}{4} = 0$.

QUESTIONARIO

1 La funzione $\operatorname{sen} x$ è limitata ($-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$) quindi i contributi di $2 \operatorname{sen} x$ al numeratore e di $3 \operatorname{sen} x$ al denominatore sono trascurabili per $x \to +\infty$. Per ogni x positivo possiamo scrivere: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$, e siccome $\lim_{x \to +\infty} \left(\pm \frac{1}{x}\right) = 0$, per il teorema del confronto anche $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.
Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 2 \operatorname{sen} x}{2x - 3 \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{2 \operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(2 - \frac{3 \operatorname{sen} x}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{2 \operatorname{sen} x}{x}}{2 - \frac{3 \operatorname{sen} x}{x}} = \frac{3}{2}.$$

La risposta esatta è la B).

2 L'espressione $\sum_{k=5}^{n} k$ rappresenta la somma di $(n-5)+1 = n-4$ termini consecutivi della progressione aritmetica di ragione 1: $a_n = a_{n-1} + 1$, con $a_0 = 0$. Quindi la somma $\sum_{k=5}^{n} k$ si può esprimere come la media aritmetica del primo e ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini:

$$\sum_{k=5}^{n} k = \frac{a_5 + a_n}{2}(n-4) = \frac{5+n}{2}(n-4) = \frac{1}{2}(n^2 + n - 20).$$

Imponendo la condizione $\frac{1}{2}(n^2 + n - 20) \leq 10\,000$, si ottiene la disequazione di secondo grado $n^2 + n - 20\,020 \leq 0$ che in $\mathbb{R}$ è verificata per $\frac{-1 - \sqrt{80\,081}}{2} \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{80\,081}}{2}$. Poiché n è un numero naturale e $\frac{-1 + \sqrt{80\,081}}{2} \simeq 140{,}993$, si conclude che il più grande valore di n che soddisfa il quesito è $n = 140$.

Infatti $\sum_{k=5}^{140} k = 9860$ e $\sum_{k=5}^{141} k = 10\,001$.

3 Dal testo del quesito si deduce che F è derivabile almeno 2 volte nel punto a. Essendo $F''(a) < 0$ si ha che $\lim_{x \to a} \frac{F'(x) - F'(a)}{x - a} = F''(a) < 0$ e quindi, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno I di a tale che, per ogni $x \in I$ il rapporto incrementale $\frac{F'(x) - F'(a)}{x - a}$ è negativo, cioè numeratore e denominatore hanno segno discorde, e quindi si verifica: $x < a \Rightarrow F'(x) > F'(a)$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < F'(a)$. Essendo per ipotesi $F'(a) = 0$, si ha che per ogni $x \in I$, $x < a \Rightarrow F'(x) > 0$ e $x > a \Rightarrow F'(x) < 0$, ma, poiché F è continua e derivabile in a, questa è una condizione sufficiente affinché a sia punto di massimo relativo.

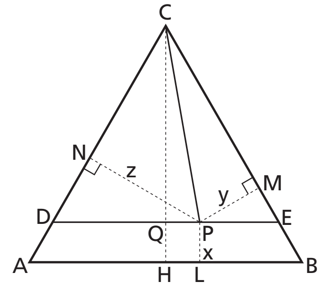
4 Deve essere $x > 0$ affinché la disequazione abbia senso, quindi si può scrivere $\ln(x^2) = 2 \ln x$; la disequazione $(\ln x^2) \geq \ln(x^2)$ diventa $(\ln x)^2 - 2 \ln x \geq 0$. Posto $\ln x = y$, si ottiene $y^2 - 2y \geq 0$ che è soddisfatta per $y \leq 0 \vee y \geq 2$. Essendo:
$\ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ e $\ln x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2$, l'insieme delle soluzioni della disequazione è: $]0, 1] \cup [e^2, +\infty[$.

5 Sia P un punto interno al triangolo ABC e indichiamo con L, M e N i piedi delle perpendicolari condotte da P ai lati AB, BC e AC rispettivamente. Tracciamo l'altezza CH relativa alla base AB e la parallela ad AB passante per P che interseca il triangolo in D ed E e l'altezza CH in Q come si osserva in figura 8.

Le ipotesi sono $\overline{PL}=x$, $\overline{PM}=y$, $\overline{PN}=z$ e $\overline{CH}=h$.

Per costruzione $\overline{QH}=\overline{PL}=x$ perché il quadrilatero $PLHQ$ è un rettangolo e $\overline{CQ}=\overline{CH}-\overline{QH}=h-x$.

Il triangolo CDE è simile al triangolo ABC e quindi è anch'esso equilatero. Indichiamo con l la misura di uno dei suoi lati. Se congiungiamo C con P notiamo che $A_{CDE}=A_{CDP}+A_{CEP}$, che PM è l'altezza del triangolo CEP relativa alla base CE, e che PN è l'altezza del triangolo CDP relativa alla base CD.



▲ **Figura 8.**

Quindi: $A_{CDE}=\dfrac{1}{2}\,l\,\overline{CQ}=\dfrac{1}{2}\,l\,(h-x)$; $A_{CDP}=\dfrac{1}{2}\,l\,\overline{PN}=\dfrac{1}{2}\,l\,z$; $A_{CEP}=\dfrac{1}{2}\,l\,\overline{PM}=\dfrac{1}{2}\,l\,y$.

Si ottiene:

$$A_{CDE}=A_{CDP}+A_{CEP}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,l\,(h-x)=\frac{1}{2}\,l\,y+\frac{1}{2}\,l\,z \Leftrightarrow h-x=y+z \Leftrightarrow h=x+y+z.$$

Quindi la somma $x+y+z$ è sempre uguale ad h e la riposta esatta è la C).

6 L'equazione di secondo grado $xy+px+qy+r=0$ è l'equazione di una conica. Dall'applicazione dei determinanti alla geometria analitica sappiamo che una conica è degenere se il determinante della matrice associata è nullo, altrimenti la conica è non degenere.

$$\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{q}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{q}{2} & r \end{bmatrix}=\frac{1}{8}pq+\frac{1}{8}pq-\frac{1}{4}r=\frac{1}{4}(pq-r).$$

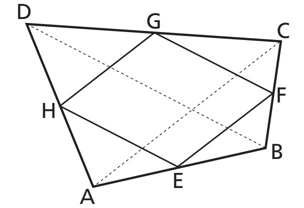
Si ha che $\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{q}{2} \\ \frac{p}{2} & \frac{q}{2} & r \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}(pq-r)=0 \Leftrightarrow pq=r.$

Quindi l'equazione della conica $xy+px+qy+r=0$ rappresenta l'insieme di due rette se e solo se $pq=r$. Infatti sostituendo la relazione $pq=r$ nell'equazione della conica data questa diventa $(x+q)(y+p)=0$ che rappresenta l'equazione della coppia di rette parallele agli assi cartesiani: $x=-q$ e $y=-p$.

Nel caso non si conosca l'applicazione dei determinanti alle coniche, il quesito può essere risolto nel seguente modo.

Se esprimiamo y in funzione di x, si ottiene $y=-\dfrac{px+r}{x+q}$. Si tratta di una funzione omografica che per $pq\neq r$ rappresenta un'iperbole equilatera, e che per $pq=r$ diventa $y=-\dfrac{px+pq}{x+q}$, con $x+q\neq 0$. Se studiamo l'equazione nella forma $y(x+q)=-p(x+q)\Leftrightarrow(x+q)(y+p)=0$, essa rappresenta l'equazione della coppia di rette parallele agli assi cartesiani $x=-q$ e $y=-p$. Abbiamo così ritrovato il risultato precedentemente ottenuto.

7 Disegniamo un quadrilatero qualunque Q' di vertici A, B, C e D e il quadrilatero Q'' avente come vertici i punti medi E, F, G e H dei lati del quadrilatero $ABCD$, come illustrato in figura 9. Tracciamo poi le diagonali AC e BD. Applicando il teorema di Talete ai triangoli ABD e BCD si ha: $EH /\!/ BD$, $GF /\!/ BD$ e $EH \cong GF \cong \frac{1}{2} BD$. In modo analogo applicando il teorema di Talete ai triangoli ABC e ADC si ottiene: $EF /\!/ AC$, $HG /\!/ AC$ e $EF \cong HG \cong \frac{1}{2} AC$.

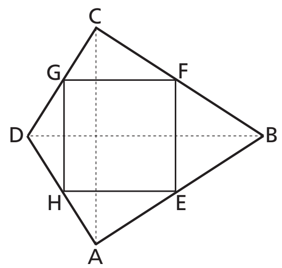


▲ **Figura 9.**

Quindi il quadrilatero $EFGH$ è un parallelogramma.
Nel caso particolare in cui il quadrilatero $EFGH$ è un quadrato, come in figura 10, si verifica anche che le diagonali AC e BD sono fra loro congruenti e perpendicolari.
Infatti:

$$EH \cong EF \rightarrow \frac{1}{2} BD \cong \frac{1}{2} AC \rightarrow BD \cong AC;$$

$$EH \perp EF \rightarrow BD \perp AC.$$



▲ **Figura 10.**

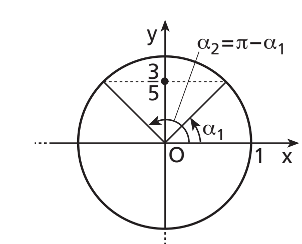
8 Sia $I = \int_0^3 f(x)\,dx$. Condizione necessaria affinché, noto I, sia possibile calcolare uno degli integrali dati, è che gli intervalli in cui varia l'argomento di f siano uguali. Questa considerazione ci porta ad escludere gli integrali $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$, $\int_0^3 f(3x)\,dx$ e $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$, essendo rispettivamente $[0; 1]$, $[0; 9]$, e $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ gli intervalli in cui varia l'argomento di f. L'argomento di f nell'integrale $\int_0^1 f(3x)\,dx$ è invece l'intervallo $[0; 3]$. Calcoliamo per sostituzione $\int_0^1 f(3x)\,dx$. Poniamo $t = 3x$, allora $x = \frac{1}{3} t \rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$ e per $x = 0 \rightarrow t = 0$, per $x = 1 \rightarrow t = 3$. Quindi: $\int_0^1 f(3x)\,dx = \int_0^3 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(t)\,dt = \frac{1}{3} I$ e la risposta esatta è la D).

9 Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x-1})$ è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 & \rightarrow \text{condizione di esistenza della radice} \\ 2x - \sqrt{4x-1} > 0 & \rightarrow \text{condizione di esistenza del logaritmo} \end{cases}$$

Dalla prima disequazione si ottiene $x \geq \frac{1}{4}$. Elevando al quadrato ambo i membri della seconda disequazione scritta nella forma: $2x > \sqrt{4x-1}$, si ottiene $4x^2 > 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.
Il dominio della funzione assegnata è pertanto: $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

10 La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto, quindi deve essere $0 < \alpha + \beta < \pi$. La conoscenza di $\operatorname{sen}\alpha$ e di $\operatorname{sen}\beta$ non determina univocamente gli angoli α e β. Dato un numero positivo x ci sono 2 angoli minori di π il cui seno vale x, che sono un angolo acuto ed il suo supplementare ottuso. Infatti come mostrato in figura 11, l'equazione $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ ha due soluzioni: $\alpha_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) \simeq 0{,}65$ e $\alpha_2 = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right) \simeq 2{,}5$; analogamente l'equazione $\operatorname{sen}\beta = \frac{24}{25}$ ha due soluzioni: $\beta_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{24}{25}\right) \simeq 1{,}29$ e $\beta_2 = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{24}{25}\right) \simeq 1{,}86$.



▲ **Figura 11.**

Verifichiamo quali e quante coppie di angoli soddisfano la relazione $0 < \alpha + \beta < \pi$, escludendo subito la combinazione $\alpha_2 + \beta_2$ perché un triangolo non può avere 2 angoli ottusi.

Essendo $\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0{,}65 + 1{,}29 = 1{,}94 < \pi \\ \alpha_1 + \beta_2 = 0{,}65 + 1{,}86 = 2{,}51 < \pi \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2{,}5 + 1{,}29 = 3{,}79 > \pi \end{cases}$, si ottengono le combinazioni possibili, che sono due. Quindi esiste un solo triangolo con un lato di 10 cm ed angoli adiacenti $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_1$ entrambi acuti, ed un solo triangolo ottusangolo con lato di 10 cm e angoli adiacenti $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_2$. La risposta è quindi la C) perché esistono due triangoli non congruenti che soddisfano le ipotesi del quesito.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 246 pag. W 121 • Esercizio 56 pag. V 244 • Problema 19 pag. V 285 (punto a) • Problema 12 pag. V 289 • Esercizio 521 pag. L 85
Problema 2	• Problema 23 pag. π 146
Quesito 1	• Quesito 4 pag. U 110 • Quesito 6 pag. U 207 • Quesito 3 pag. U 247
Quesito 2	• Esercizio 144 pag. U 237 • Esercizio 146 pag. U 237
Quesito 3	• Quesito 1 pag. V 215 • Quesito 3 pag. V 215 • Quesito 7 pag. W 173
Quesito 4	• Quesito 3 pag. N 95 • Esercizio 555 pag. N 78 • Quesito 4 pag. W 167
Quesito 5	• Problema 23 pag. P^+ 209
Quesito 6	• Esercizio 317 pag. T 74 • Esercizio 12 pag. T 78 • Problema 8 pag. L 421 (punti b, d)
Quesito 7	• Problema 84 pag. P^+ 90
Quesito 8	• Esercizio 32 pag. W 108 • Quesito 2 pag. W 136
Quesito 9	• Esercizio 45 pag. U 23 • Esercizio 98 pag. U 27 • Problema 7 pag. U 42 (punto b)
Quesito 10	• Test 3 pag. Q 152 • Test 4 pag. Q 152