

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004**

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ **PROBLEMA 1**

Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ ;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* [da *Karl Friedrich Gauss (1777-1855)*]. Una *media* $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

■ **PROBLEMA 2**

Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b , esiste sempre un valore di x tale che

$$f(x) = \frac{a+b}{2}$$

2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

QUESTIONARIO

- 1** La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
- 2** Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
- 3** Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
- 4** Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B ?
- 5** Dare un esempio di funzione g , non costante, tale che:
- $$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4.$$
- 6** Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.
- 7** Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
- 8** Si trovino due numeri reali a e b , $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
- 9** Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
- 10** Nel piano è data la seguente trasformazione:
- $$\begin{aligned}x &\rightarrow x\sqrt{3} - y \\ y &\rightarrow x + y\sqrt{3}\end{aligned}$$
- Di quale trasformazione si tratta?

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

PROBLEMA 1

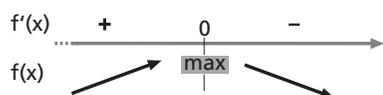
1. La funzione $f(x) = ke^{-\lambda x^2}$, $k > 0$, $\lambda > 0$, è definita e positiva su tutto \mathbb{R} .

$f(-x) = f(x)$, la funzione è pari. Il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Il grafico interseca l'asse delle ordinate nel punto $M(0, k)$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

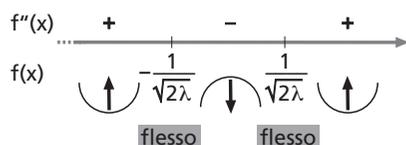
La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale. Non ci sono altri asintoti.

Derivata prima: $f'(x) = -2\lambda kxe^{-\lambda x^2} > 0$, se $x < 0$. Lo schema di figura 1 mostra che la funzione ha un massimo in $x = 0$. $f(0) = k$, allora $M(0, k)$ è un punto di massimo assoluto per il grafico della funzione.



◀ Figura 1.

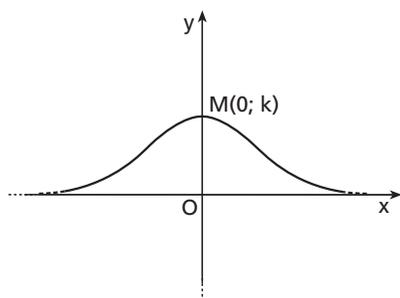
Derivata seconda: $f''(x) = -2\lambda ke^{-\lambda x^2} - 2\lambda kx(-2\lambda xe^{-\lambda x^2}) = 2\lambda ke^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1) > 0$, se $(2\lambda x^2 - 1) > 0$, che si ottiene per $x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$. La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per $x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e rivolta verso il basso per $-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ (figura 2).



◀ Figura 2.

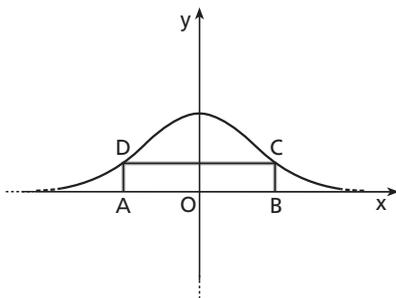
Il grafico della funzione presenta due punti di flesso $F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; ke^{-\frac{1}{2}}\right)$ e $F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; ke^{-\frac{1}{2}}\right)$.

L'andamento del grafico della funzione (ponendo, per esempio $k = \lambda = 1$) è rappresentato in figura 3. All'aumentare del valore di k aumenta il valore massimo della funzione; all'aumentare del valore di λ la forma "a campana" della curva si restringe.



◀ Figura 3.

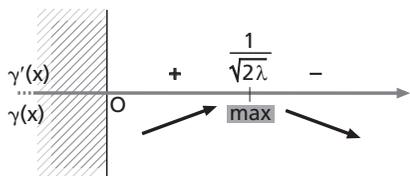
2. Con riferimento alla figura 4, detta x l'ascissa del punto B , per ragioni di simmetria i vertici del rettangolo saranno: $A(-x; 0)$, $B(x; 0)$, $C(x; f(x))$, $D(-x; f(-x))$. La funzione è pari, $f(-x) = f(x)$, quindi l'area del rettangolo $ABCD$ vale $y = 2x \cdot f(x) = 2kxe^{-\lambda x^2}$, con $x > 0$.



◀ Figura 4.

$$y' = 2ke^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2) > 0, \text{ se } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

Lo schema di figura 5 mostra che l'area del rettangolo $ABCD$ è minima per $x=0$, massima per $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, cioè quando i punti C e D coincidono con i flessi. L'area massima vale $2 \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} ke^{-\frac{1}{2}}$.



◀ Figura 5.

3. L'area compresa tra γ e l'asse x , posto $\lambda = \frac{1}{2}$, risulta:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2} dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

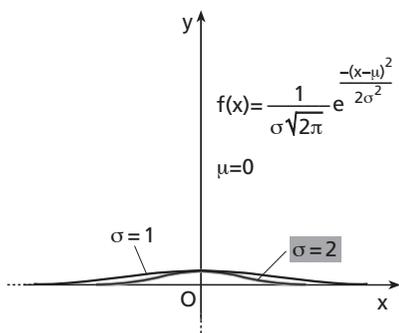
ponendo $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ e quindi $dx = \sqrt{2} \cdot dt$ si ottiene:

$$A = k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{2} \cdot dt = \sqrt{2} k \sqrt{\pi},$$

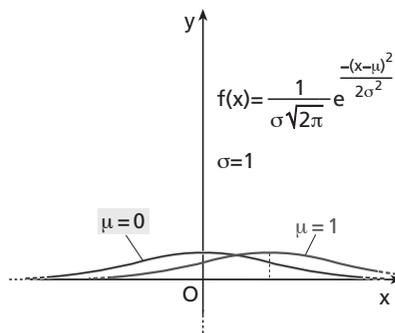
da cui $A = 1$ se $k\sqrt{2\pi} = 1$, dunque $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ è il valore cercato.

4. La normale di Gauss ha equazione generale $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Un aumento dello scarto quadratico medio σ determina una diminuzione del valore di k e quindi diminuisce l'ordinata del punto di massimo. Inoltre la forma della curva diventa più "piatta" ed aumenta la dispersione rispetto al valore medio (figura 6). Se la media μ è diversa da zero la curva risulta traslata rispetto all'asse delle x di una quantità pari a μ (figura 7).



◀ Figura 6.



◀ Figura 7.

PROBLEMA 2

1. Una funzione f , continua in $[a; b]$, con $f(a) \neq f(b)$, assume, almeno una volta, nell'interno di tale intervallo, un qualsiasi valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. (Teorema dei valori intermedi, o di Darboux)

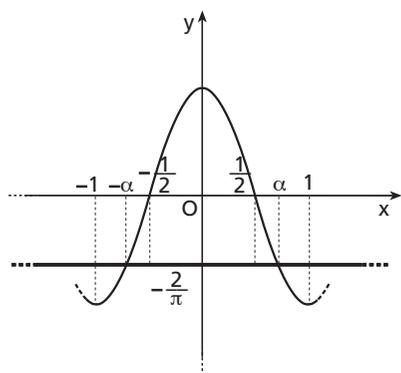
La funzione $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) + x$ è continua su tutto \mathbb{R} , in particolare nell'intervallo chiuso limitato $[a; b]$. In tale intervallo la funzione assume ogni valore compreso tra $f(a) = a$ e $f(b) = b$, in particolare il valore $\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a+b}{2}$.

2. Ponendo $a = 2b = 2$ si ottiene $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x = \frac{1}{2}\sin(\pi x) + x$.

$g(-x) = -g(x)$, la funzione è dispari, quindi simmetrica rispetto all'origine degli assi. $g(0) = 0$, il grafico passa per l'origine.

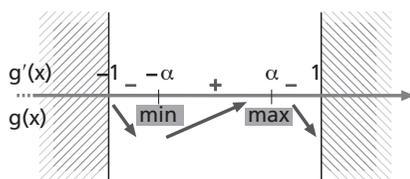
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

$g'(x) = \frac{1}{2}\pi \cos(\pi x) + 1 > 0$, se $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi}$. La rappresentazione grafica di $g'(x)$ (figura 8) mostra che $\cos(\pi x) > -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\alpha + 2k < x < \alpha + 2k$, con $\alpha = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)$ e $k \in \mathbb{Z}$.



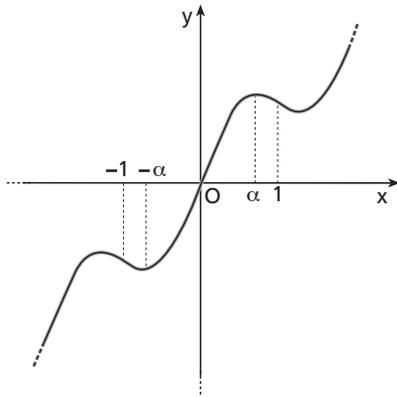
◀ Figura 8.

Si hanno quindi punti di minimo relativo per $x = -\frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ e punti di massimo relativo per $x = \frac{1}{\pi} \arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right) + 2k$ (vedi figura 9).



◀ Figura 9.

$g''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \text{sen}(\pi x) > 0$, se $\text{sen}(\pi x) < 0$, tale condizione è verificata per $1 + 2k < x < 2 + 2k$. Si hanno punti di flesso per $x = 1 + 2k$ e $x = 2 + 2k$. Il grafico di g è rappresentato in figura 10.



◀ Figura 10.

3. Al punto precedente si è ottenuto: $g'(\alpha) = \frac{\pi \cdot \cos \pi}{2} + 1 = 0$.

Considerando che: $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ e

$g'(1) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0$, segue che $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$.

Si applica il metodo di bisezione a $g'(x)$, ottenendo:

c	$f(c)$	α
$0,75 = (0,5 + 1)/2$	$-0,11 < 0$	$0,5 < \alpha < 0,75$
$0,625 = (0,5 + 0,75)/2$	$-0,40 > 0$	$0,625 < \alpha < 0,75$
$0,6875 = (0,625 + 0,75)/2$	$-0,13 > 0$	$0,6875 < \alpha < 0,75$
$0,71875 = (0,6875 + 0,75)/2$

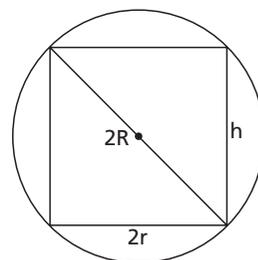
Si arriva infine al valore $\alpha \cong 0,72$.

QUESTIONARIO

1 Il grado sessagesimale è $1/90$ di angolo retto; il grado centesimale è $1/100$ di angolo retto. Il radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

2 Detto R il raggio della sfera, r il raggio del cilindro e h la sua altezza, valgono le seguenti relazioni: $b = 2r$ (il cilindro è equilatero), $2R = b\sqrt{2}$ ($2R$ è la diagonale del quadrato di lato $b = 2r$; figura 11). Dunque $R = r\sqrt{2}$.

La superficie della sfera risulta $S_{\text{sfera}} = 4\pi R^2 = 8\pi r^2$, quella del cilindro è $S_{\text{cil}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 6\pi r^2$, il rapporto tra le due aree è $\frac{3}{4}$.



▲ Figura 11.

3 Le aree di due solidi simili stanno tra loro come i quadrati delle misure lineari, nel caso in esame il rapporto è $3^2 = 9$. I volumi di due solidi simili stanno tra loro come i cubi delle misure lineari, il rapporto è quindi $3^3 = 27$.

4 Per la definizione di funzione, ad ognuno dei 4 elementi di A può corrispondere uno ed uno solo dei 3 elementi di B . Le applicazioni di A in B sono pari alle disposizioni con ripetizione di 3 oggetti di classe 4:

$$D_{3,4}^* = 3^4.$$

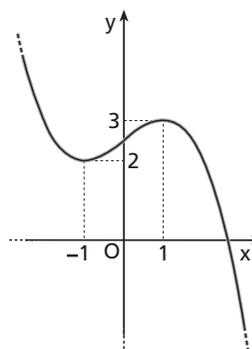
5 Consideriamo per semplicità la funzione algebrica definita a tratti:

$$g(x) = \begin{cases} g(x) = x + 1 & \text{se } x \neq 2 \\ g(x) = 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$g(x)$ è definita ovunque e discontinua in $x = 2$.

6 Si consideri una cubica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. La derivata è $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. La derivata si deve annullare per $x = \pm 1$. Imponendo il passaggio per i punti $(-1; 2)$ e $(1; 3)$, si ottiene:

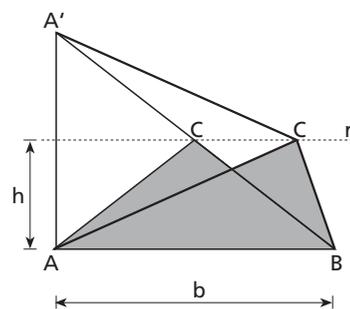
$$\begin{cases} f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \\ f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \\ f(-1) = -a + b - c + d = 2 \\ f(1) = a + b + c + d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = \frac{3}{4} \\ d = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}.$$



► Figura 12.

7 Con riferimento alla figura 13, si considerino i triangoli di uguale base $AB = b$. I triangoli hanno la stessa area, quindi anche l'altezza è sempre la stessa e vale $h = \frac{2S}{b}$, in cui S è l'area uguale per tutti i triangoli.

Allora il terzo vertice C appartiene alla retta r parallela alla retta di AB , ad una distanza h . Per rendere minimo il perimetro, dato che AB è costante, occorre rendere minima la somma $AC + CB$. Considerando A' simmetrico di A rispetto alla retta r , risulta $AC = A'C$, quindi il perimetro è minimo per il valore minimo di $A'C + CB$, che si verifica se A' , C e B sono allineati. In tal caso C è il punto medio di $A'B$, quindi $CB = A'C = AC$, dunque $AC = CB$: il triangolo è isoscele.



▲ Figura 13.

8 $a \neq b, a + b = a \cdot b \Rightarrow a = \frac{b}{b-1}$. Per esempio $b = \frac{1}{2}$ ed $a = -1$ rispondono alla richiesta.

9 La funzione $f(x) = e^x + 3x$ è definita e continua su tutto l'asse reale, quindi anche in $[-1; 0]$. Risulta $f(-1) = e^{-1} - 3 < 0$, e $f(0) = 1 > 0$, quindi per il teorema degli zeri $f(x)$ si annulla almeno una volta nell'intervallo $] -1; 0[$. Inoltre la funzione è sempre derivabile, con derivata $f'(x) = e^x + 3 > 0, \forall x$: la funzione è strettamente crescente e quindi si annulla una sola volta.

Applicando il metodo di bisezione si ottiene:

c	$f(c)$	α
-0,5	-0,893 < 0	-0,5 < α < 0
-0,25	+0,029 > 0	-0,5 < α < 0,25
-0,375

Procedendo per approssimazioni successive si ottiene $x \cong -0,2576$.

10 La trasformazione si può scrivere:
$$\begin{cases} x' = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y \right) \\ y' = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \end{cases}$$
, quindi la trasformazione è una composizione

di una rotazione di 30° e di una omotetia di rapporto $k = 2$.