ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A;

b) chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p;

c) indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$;

d) stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

PROBLEMA 2

Si considerino le successioni di termini generali a_n, b_n e c_n tali che:

$$a_n = \sum_{i,\,k=1}^{n} ik, \quad b_n = \sum_{j=1}^{n} j^2, \quad c_n = \sum_{\substack{i,\,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik.$$

a) Dimostrare che risulta:

$$a_n = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2, \quad b_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \qquad c_n = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

b) Calcolare il più grande valore di n per cui a_n non supera 100 000.

c) Definire per ricorsione la successione di termine generale c_n.

d) Utilizzare la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi 20 numeri di quella successione e li comunichi sotto forma di matrice di 5 righe e 4 colonne.

QUESTIONARIO

1 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

2 Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

3 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

4 Il limite di $\text{tg}x$ per x tendente a $+\infty$:
A) è $+\infty$;
B) è $\frac{\pi}{2}$;
C) non esiste;
D) esiste ma non si riesce a calcolare.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5 Si consideri la seguente implicazione: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile nel punto a allora è continua in a». Come noto, essa enuncia un importante teorema di analisi matematica. Enunciare le implicazioni inversa, contronominale e contraria dell'implicazione considerata e dire di ciascuna di esse se si tratta di un teorema. Quando non lo è fornire un esempio che chiarisca la situazione.

6 Determinare il più grande valore del parametro reale m per cui il valore del seguente integrale:

$$\int_0^m \frac{2x - 3m}{x - 2m}\,dx$$

non supera 24.

7 In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato un triangolo qualsiasi. Dimostrare le formule che esprimono le coordinate del baricentro del triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici.

8 Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi con le facce numerate da «1» a «6», aventi tutte le stesse possibilità di uscire. Si ottiene un successo se, nell'esperimento, esce almeno un «5».
Determinare il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo.

9 Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Sapendo che sul podio finiscono i primi 3 classificati e ammesso che tutti gli atleti abbiano le stesse possibilità, calcolare le probabilità che:
a) sul podio finiscano sia Antonio che Pietro;
b) almeno uno dei due finisca sul podio;
c) nessuno dei due finisca sul podio.

10 In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases},$$

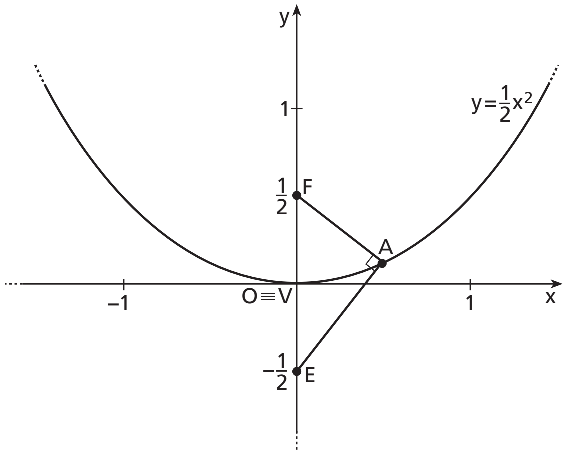
dove m è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di m.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

a) Posto il vertice V della parabola p nell'origine del sistema cartesiano e il fuoco F sul semiasse positivo delle y, le coordinate di tali punti sono: $V(0; 0)$ e $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Perciò la parabola p ha equazione del tipo $y = \frac{1}{4f}x^2$, dove f è l'ordinata del fuoco, e ha espressione $y = \frac{1}{2}x^2$. Nella figura 1 è riportato il suo grafico.



▲ **Figura 1.**

Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V, esso ha coordinate $E\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. Preso un generico punto A appartenente alla parabola, di coordinate $A\left(x; \frac{1}{2}x^2\right)$, affinché il triangolo AEF sia rettangolo in A è necessario che i punti E, F ed A appartengano a una semicirconferenza di diametro EF e centro V, ossia si abbia $FV \cong VA \cong VE$. Essendo:

$$\overline{VA}^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

otteniamo:

$$\overline{VA}^2 = \overline{VF}^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x^4 + 4x^2 - 1 = 0.$$

L'equazione biquadratica ha come soluzioni $x = \pm\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.
Pertanto esistono due punti della parabola, di coordinate

$$A_1\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}; \frac{\sqrt{5}-2}{2}\right) \quad \text{e} \quad A_2\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}; \frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)$$

per cui i triangoli A_1EF e A_2EF sono retti in A_1 e A_2.

b) Un generico punto della parabola p ha coordinate $P\left(x;\ \frac{1}{2}x^2\right)$. I restanti vertici del triangolo PEF sono $E\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e $F\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Applicando le formule delle coordinate del baricentro di un triangolo, $x_G = \frac{x_P + x_E + x_F}{3}$ e $y_G = \frac{y_P + y_E + y_F}{3}$, si ottiene:

$$G\begin{cases} x_G = \dfrac{x}{3} \\ y_G = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}x^2. \end{cases}$$

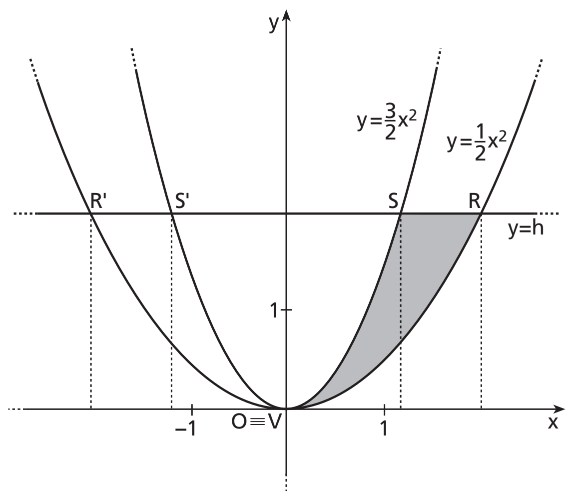
Le equazioni trovate sono parametriche in x e rappresentano il luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p. L'equazione cartesiana del luogo si determina ricavando dalla prima equazione x e andando a sostituire la sua espressione nella seconda equazione.

$$\begin{cases} x = 3x_G \\ y_G = \dfrac{1}{6}(3x_G)^2 = \dfrac{3}{2}x_G^2 \end{cases}.$$

Pertanto il luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p è la parabola di equazione

$$y = \frac{3}{2}x^2.$$

c) Si tracciano nel sistema cartesiano i grafici dei luoghi p e k, di equazione rispettivamente $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{3}{2}x^2$, e una retta generica r di equazione $y = h$, con $h > 0$, perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p che interseca i luoghi nel primo quadrante nei punti R e S. Essi hanno coordinate $R(\sqrt{2h};\ h)$ e $S\left(\sqrt{\frac{2}{3}h}\ ;\ h\right)$ (figura 2).



▶ **Figura 2.**

Individuata sul grafico la figura mistilinea VRS, la sua superficie A si ottiene come la metà della differenza dei segmenti parabolici $S_{VRR'}$ e $S_{VSS'}$

$$A = \frac{1}{2}(S_{VRR'} - S_{VSS'}).$$

Si calcolano le superfici al secondo membro, ricordando che l'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del relativo rettangolo:

$$S_{VRR'} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2h} \cdot h) = \frac{4\sqrt{2}}{3}h\sqrt{h},$$

$$S_{VSS'} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{\frac{2}{3}h} \cdot h\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}h\sqrt{h}.$$

Sostituendo, la superficie A diventa:

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}h\sqrt{h}-\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}h\sqrt{h}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)h\sqrt{h}.$$

Si ponga per ipotesi tale area uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)h\sqrt{h}=\frac{8}{9}(3-\sqrt{3}) \quad\to\quad \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)h\sqrt{h}=\frac{8}{9}\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \quad\to$$

$$\to \quad h\sqrt{h}=\frac{4}{\sqrt{2}} \quad\to\quad h^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}} \quad\to\quad h=2.$$

La retta r ha equazione $y=2$ e ha distanza dal vertice V, coincidente con l'origine del sistema cartesiano, pari a 2.

d) La distanza trovata $h=2$ è espressa da un numero razionale.

PROBLEMA 2

a) Si dimostrano le relazioni attraverso il principio di induzione matematica.

a1) Si deve dimostrare che $\sum_{i,\,k=1}^{n} ik=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Per $n=1$, $a_1=1\cdot 1=1$ e $\frac{1}{4}1^2(1+1)^2=1$, pertanto la relazione precedente è vera; ora, posto $a_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$, bisogna dimostrare che $a_{n+1}=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$.

Consideriamo i primi termini della successione a_n:

$$a_1=1\cdot 1$$

$$a_2=a_1+1\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 2=a_1+2(1\cdot 2)+2\cdot 2$$

$$a_3=a_2+1\cdot 3+3\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 2+3\cdot 3=a_2+2(1\cdot 3+2\cdot 3)+3\cdot 3$$

…

Possiamo dedurre che in generale:

$$a_{n+1}=a_n+2[1(n+1)+2(n+1)+3(n+1)+\ldots+n(n+1)]+(n+1)(n+1)=$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+2(n+1)(1+2+\ldots+n)+(n+1)(n+1).$$

Essendo $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ si ottiene:

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+(n+1)^2n+(n+1)^2=$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{1}{4}n^2+n+1\right)=(n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

come volevasi dimostrare.

Pertanto è dimostrata la relazione: $\sum_{i,\,k=1}^{n} ik = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$.

a2) Si deve dimostrare che $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Per $n=1$, $b_1 = 1^2 = 1$ e $\frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$, perciò la precedente relazione è vera; ora, posto $b_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, è necessario dimostrare che $b_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$.

Consideriamo i primi termini della successione b_n:

$b_1 = 1$

$b_2 = 1 + 4 = b_1 + 2^2$

$b_3 = 1 + 4 + 9 = b_2 + 3^2$

…

In generale, deduciamo che:

$$b_{n+1} = b_n + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) =$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)] =$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]$$

come volevasi dimostrare.

Pertanto è dimostrata la relazione: $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

a3) Dobbiamo dimostrare che $\sum_{\substack{i,\,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

Per $n=1$, $c_1 = 1 \cdot 1 = 1$ e $\frac{1}{24} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 1$, pertanto la relazione sopra è vera; ora, posto

$c_n = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$,

bisogna dimostrare che $c_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4)$.

Consideriamo i primi termini della successione c_n:

$c_1 = 1 \cdot 1 = 1$

$c_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = c_1 + 2(1+2)$

$c_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = c_2 + 3(1+2+3)$

…

In generale, deduciamo che:

$$c_{n+1} = c_n + (n+1)[1 + 2 + \ldots + n + (n+1)] = c_n + (n+1)\frac{(n+1)(n+2)}{2} = c_n + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2).$$

Sostituendo $c_n = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$, risulta:

$$c_{n+1} = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2) = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(3n^2+n+12n+12),$$

per la scomposizione dei polinomi, $3n^2 + 13n + 12 = (n+3)(3n+4)$,

$$c_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4),$$

come si voleva dimostrare.

Pertanto è dimostrata la relazione: $\sum_{\substack{i,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

b) Essendo $a_n = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$, si ponga $\frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \leq 100\,000$. Si risolve la disequazione in $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{4} n^2(n+1)^2 \leq 100\,000 \quad \rightarrow \quad n(n+1) \leq \sqrt{400\,000} \quad \rightarrow \quad n^2 + n - 200\sqrt{10} \leq 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 1 \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + 800\sqrt{10}}}{2}.$$

Poiché $\frac{-1 + \sqrt{1 + 800\sqrt{10}}}{2} \simeq 24{,}6$, il massimo valore di n per cui a_n non supera $100\,000$ è $n = 24$.

c) Considerata la successione $c_n = \sum_{\substack{i,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$, nel punto a3) del problema si era trovato che $c_1 = 1$ e $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2)$; pertanto la definizione per ricorsione della successione è:

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2) \end{cases}.$$

d) Utilizziamo l'ambiente Excel.

Aperto un foglio di lavoro, si opera secondo i seguenti passaggi:

- si raccolgono nelle prime 20 righe della prima colonna (colonna A) i valori dell'indice n che vanno dall'1 al 20; per questo nella cella A1 si scrive 1, nella cella A2 si scrive `=A1+1` e la si copia fino ad A20;
- nella colonna B si calcolano i primi 20 valori della successione c_n; perciò si immette nella cella B1 il valore di c_1, cioè 1, nella cella B2 si scrive `=B1+(A1+1)^2*(A1+2)/2` e si copia dalla cella B3 alla B20;
- i valori trovati di c_n, posti nelle prime 20 righe della colonna B, si ridispongono in una matrice 5×4 collocata dalla cella D1 alla cella G5; pertanto in D1 si scrive `=B1` e si copia fino alla cella D5; in E1 si scrive `=B6` e si copia fino alla cella E5; in F1 si scrive `=B11` e si copia fino alla cella F5; in G1 si scrive `=B16` e si copia fino alla cella G5.

La matrice ottenuta ha i valori dei primi 20 termini della successione c_n posti in colonna ossia così collocati:

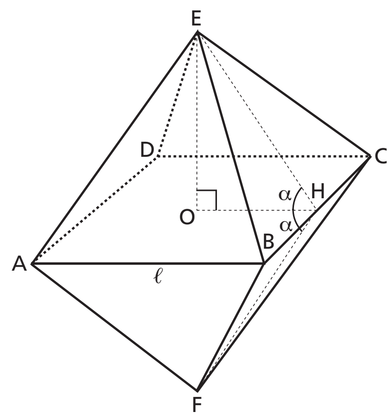
$$\begin{bmatrix} c_1 & c_6 & c_{11} & c_{16} \\ c_2 & c_7 & c_{12} & c_{17} \\ c_3 & c_8 & c_{13} & c_{18} \\ c_4 & c_9 & c_{14} & c_{19} \\ c_5 & c_{10} & c_{15} & c_{20} \end{bmatrix}.$$

QUESTIONARIO

1 Nella figura 3 è rappresentato un ottaedro regolare *ABCDEF* di lato *l*.

Si prendano le due facce consecutive *BCF* e *BCE* e si sezioni perpendicolarmente il diedro da esse formato con un piano passante per il vertice *E*. Tale piano intercetta il triangolo rettangolo *EOH*, dove *O* è il piede della perpendicolare da *E* al piano *ABCD* e *H* è il punto medio dello spigolo *BC* del diedro. Indicato con α l'angolo $O\hat{H}E$, l'ampiezza del diedro è 2α. Per il teorema dei triangoli rettangoli vale $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{EH}}$.

Figura 3.



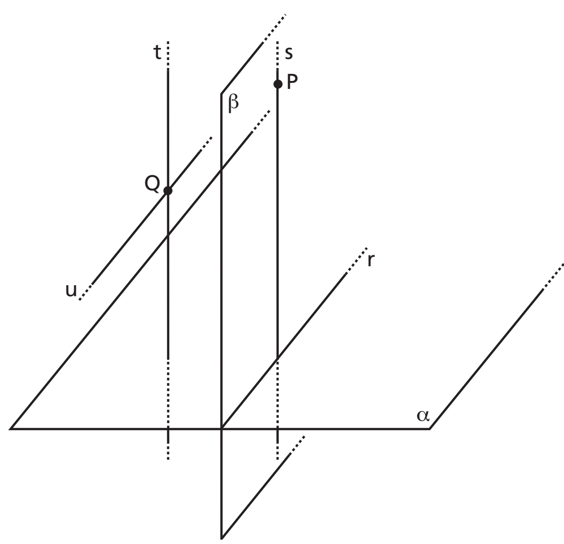
Poiché il segmento *OH* è pari a metà del lato del quadrato *ABCD*, vale: $\overline{OH} = \dfrac{l}{2}$. Inoltre *EH* è l'altezza del triangolo equilatero *BCE*, per cui $\overline{EH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$. Risulta allora: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{EH}} = \dfrac{\dfrac{l}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}l} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Essendo $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, ricaviamo:

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$2\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \simeq 109{,}4712° \simeq 109°28'16''.$$

Figura 4.



2 Nella figura 4 sono rappresentati due piani α e β perpendicolari tra loro. Sia *r* la loro intersezione.

Preso un punto *P* appartenente a β, si mandi la retta *s*, perpendicolare al piano α. Si vuole dimostrare che tale retta appartiene al piano β. Infatti, se non giacesse su β, mandando da *P* su β la perpendicolare alla retta *r*, essa risulterebbe perpendicolare al piano α e allora dal punto *P* si potrebbero condurre due rette perpendicolari allo stesso piano α e ciò è assurdo.

Considerato il punto *Q* esterno al piano β, si tracci da esso la retta *t* perpendicolare al piano α. Si vuole dimostrare che tale retta è parallela a β. Si considerino le rette *s* e *t*: esse sono perpendicolari allo stesso piano α, pertanto, per un noto teorema, sono tra loro parallele. Ora, preso il piano passante per le rette parallele s e t, esso taglia il piano β lungo la retta s stessa; se la retta t non fosse parallela a β, lo dovrebbe quindi incontrare in un punto della retta s, ma ciò va contro al parallelismo delle rette r e s, pertanto la retta t è parallela al piano β, come volevasi dimostrare.

Viceversa, non si può dire che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro. Infatti, si prenda, per esempio, la retta u passante per Q e parallela alla retta r; essa è parallela al piano β e risulta anche parallela al piano α, pertanto non può essere perpendicolare a quest'ultimo.

3 Considerata $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$, si tratta di una funzione logaritmica. Per l'esistenza della radice, deve essere $x \geq 0$. Inoltre, la condizione di esistenza del logaritmo impone che il suo argomento sia positivo, ovvero che $1 - 2x + \sqrt{x} > 0$. È necessario quindi risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{x} > 2x - 1$. Essa è equivalente all'unione dei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x > (2x-1)^2 \end{cases}.$$

Risolvendoli, si trova:

$$\text{I sistema: } \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 0 \leq x < \frac{1}{2};$$

$$\text{II sistema: } \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ x > 4x^2 + 1 - 4x \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} < x < 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'unione dei due intervalli, perciò $0 \leq x < 1$.
Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$ è C.E.: $0 \leq x < 1$.

4 Data una funzione $f(x)$, condizione necessaria e sufficiente affinché essa ammetta limite l, finito o infinito, è che per ogni successione x_n, per la quale $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, si abbia $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$. Considerata la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$, si prendano le seguenti successioni: $a_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$ e $b_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$. I limiti per n tendente a $+\infty$ valgono: $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$, mentre i limiti delle successioni $f(a_n)$ e $f(b_n)$ risultano:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \lim_{n \to +\infty} (-1) = -1.$$

Poiché i due limiti non coincidono, non è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg} x$ poc'anzi enunciata. Pertanto il limite $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{tg} x$ non esiste e la risposta esatta è C).

5 Date due proposizioni p e q, si chiama implicazione il connettivo logico $p \rightarrow q$ che si esprime nella forma linguistica «se è vera l'ipotesi p allora è vera la tesi q». Sono definite rispettivamente implicazione contraria, contronominale e inversa le implicazioni seguenti: non $p \rightarrow$ non q; non $q \rightarrow$ non p, $q \rightarrow p$. Considerata l'implicazione diretta «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile nel punto a allora è continua in a», l'implicazione contraria è: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ non è derivabile nel punto a allora non è continua in a». Tale implicazione non è un teorema poiché la non derivabilità non implica la non continuità della funzione. Per esempio, considerata la funzione reale $f(x) = |x|$, essa non è derivabile nel punto $x=0$ ma in esso è continua. Si enuncia l'implicazione contronominale della implicazione diretta nel seguente modo: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ non è continua nel punto a allora non è derivabile in a». Si tratta in questo caso di un teorema: la continuità della funzione è una condizione necessaria per la derivabilità. In ultimo, l'implicazione inversa è: «Se la funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nel punto a allora è derivabile in a». Tale implicazione non è un teorema. Basti pensare nuovamente alla funzione $f(x)=|x|$: tale funzione è continua nel punto $x=0$ ma in esso non è derivabile.

6 Inizialmente si pone $m>0$. La funzione integranda è razionale fratta ed è continua nell'intervallo di integrazione. Eseguendo la divisione tra il numeratore e il denominatore, si trova:

$$\frac{2x-3m}{x-2m}=2+\frac{m}{x-2m}.$$

Pertanto si può scrivere:

$$\int_0^m \frac{2x-3m}{x-2m}\,dx=\int_0^m\left(2+\frac{m}{x-2m}\right)dx=$$

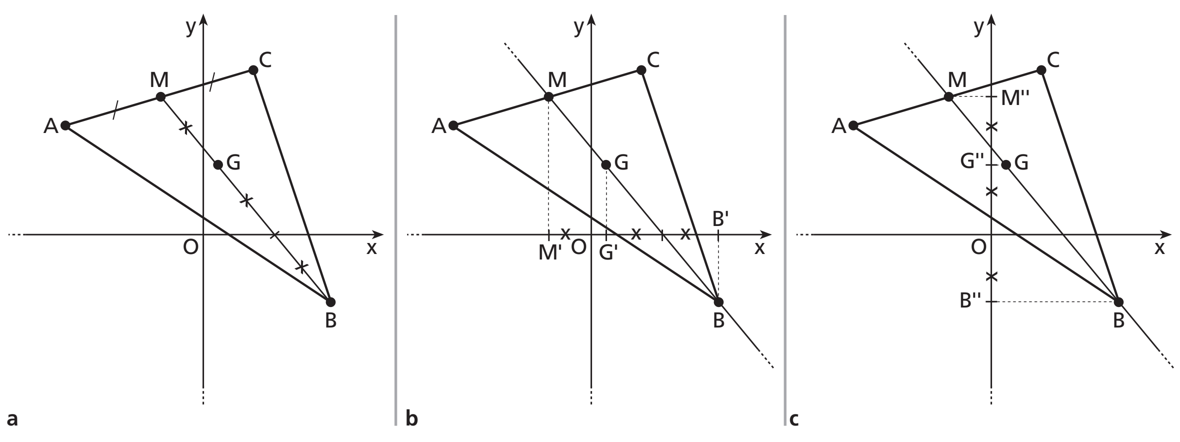
$$=\int_0^m\left(2-\frac{m}{2m-x}\right)dx=[2x+m\ln(2m-x)]_0^m=2m+m\ln m-m\ln 2m=2m-m\ln 2=m(2-\ln 2).$$

Posto $I=m(2-\ln 2)$, si tratta di una funzione di diretta proporzionalità in m, perciò l'integrale I non supera 24 se $m(2-\ln 2)\le 24$ ovvero se $m\le\dfrac{24}{2-\ln 2}$. Il valore più grande cercato di m è pertanto $\dfrac{24}{2-\ln 2}$.
Si osserva che è inutile discutere il caso di m minore di zero, in quanto bisogna trovare il valore massimo di m per cui l'integrale I non superi 24.

7 Si consideri il triangolo ABC, rappresentato in un sistema di assi cartesiani ortogonali, di vertici $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, (figura 5a). Si vogliono calcolare le coordinate del baricentro G, punto di incontro delle tre mediane. Individuato il punto medio M del lato AC, di coordinate $x_M=\dfrac{x_A+x_C}{2}$ e $y_M=\dfrac{y_A+y_C}{2}$, si tracci la mediana BM. Per la proprietà del baricentro, vale la relazione: $\overline{BG}=2\overline{GM}$. Si proiettino ortogonalmente i punti M, G e B sull'asse delle ascisse (figura 5b); per il teorema di Talete applicato alle parallele, MM', GG', BB' tagliate dalla trasversale MB e dall'asse x, vale la relazione: $\overline{B'G'}=2\overline{G'M'}$. Si scriva quest'ultima utilizzando le coordinate dei punti:

$$|x_B-x_G|=2|x_G-x_M| \quad\rightarrow\quad x_B-x_G=2x_G-2x_M.$$

▼ **Figura 5.**



Sostituendo l'espressione di x_M trovata in precedenza, si ricava:

$$x_B - x_G = 2x_G - 2\frac{x_A + x_C}{2} \quad \rightarrow \quad x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Alla stessa maniera, si ricava:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Le coordinate del baricentro G di un triangolo ABC sono: $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ e $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

8 Si consideri l'evento $E =$ «nel lancio di due dadi esce almeno un 5». I casi favorevoli sono le uscite del numero 5, da un dado, e dei numeri che vanno dall'1 al 6, dall'altro:

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5).

I casi favorevoli sono pertanto 11. I casi possibili sono le disposizioni con ripetizione di 6 elementi a gruppi di 2, ovvero $D'_{6,2}$. Per la definizione classica di probabilità, la probabilità del singolo evento E vale:

$$p(E) = \frac{11}{D'_{6,2}} = \frac{11}{6^2} = \frac{11}{36}.$$

Per lo schema delle prove ripetute o di Bernoulli, dato un evento E sottoposto a n esperimenti indipendenti ognuno con probabilità p costante di verificarsi, essendo $q = 1 - p$ la probabilità dell'evento di non verificarsi, la probabilità di ottenere k successi su n prove è:

$$p_{(k,\, n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Nel nostro caso, supposto di compiere n volte il lancio, la probabilità di ottenere k successi è data dalla seguente espressione:

$$p_{(k,\, n)} = \binom{n}{k} \left(\frac{11}{36}\right)^k \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^{n-k}.$$

La probabilità che non si assista a nessun successo è pertanto:

$$p_{(0,\, n)} = \binom{n}{0} \left(\frac{11}{36}\right)^0 \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^n = \left(\frac{25}{36}\right)^n.$$

Tenendo conto che la probabilità che si assista almeno a un successo è data da:

$$p_{(k \geq 1,\, n)} = 1 - p_{(0,\, n)},$$

risulta:

$$p_{(k \geq 1,\, n)} = 1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n.$$

Si ponga tale probabilità maggiore o uguale a 99%:

$$1 - \left(\frac{25}{36}\right)^n \geq 0{,}99 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{25}{36}\right)^n \leq 0{,}01.$$

Applichiamo i logaritmi ad ambo i membri:

$$\ln\left(\frac{25}{36}\right)^n \leq \ln 0{,}01$$

$$n \ln \frac{25}{36} \leq \ln 0{,}01.$$

Essendo $\ln\frac{25}{36} < 0$, otteniamo:

$$n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{25}{36}} \simeq 12{,}63.$$

Pertanto, il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento, per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo, è 13.

9 Si risolve il problema applicando la definizione classica di probabilità di un evento, intendendo quest'ultima come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

a) Considerato l'evento E_1 = «Antonio e Pietro sono sul podio», si vuole calcolare la probabilità $P(E_1)$. I casi favorevoli f sono le terne in cui compaiono i due amici e un terzo atleta, appartenente all'insieme dei sei sportivi rimanenti. Pertanto $f = P_3 \cdot 6 = 36$. I casi possibili u sono le disposizioni di 8 elementi a gruppi di 3: $u = D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. La probabilità cercata è quindi: $P(E_1) = \frac{f}{u} = \frac{36}{336} = \frac{3}{28}$.

b) Indicato con E_2 l'evento che sul podio finisca almeno uno dei due amici, i casi favorevoli si ottengono dalla somma dei casi favorevoli del punto a) (ambedue gli amici sul podio) con i casi in cui nella terna compaia un solo amico e due atleti, tra i sei rimanenti. I casi favorevoli sono allora $f = 36 + D_{6,2} \cdot 3 \cdot 2 = 36 + 180 = 216$.
I casi possibili sono sempre $u = D_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. La probabilità cercata risulta quindi:

$$P(E_2) = \frac{216}{336} = \frac{9}{14}.$$

c) Considerato E_3 = «né Antonio né Pietro sono sul podio», si osserva che $E_3 = \overline{E_2}$, dove E_2 = «almeno uno dei due amici è sul podio» del punto b) del problema. Pertanto $P(E_3) = 1 - P(E_2)$ e quindi:
$P(E_3) = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$.

10 La trasformazione $\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases}$ è un'affinità se $\begin{vmatrix} m & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, ossia se $m \neq 2$. Perché un punto sia unito si deve avere $X = x \wedge Y = y$, quindi sostituendo nelle equazioni dell'affinità $\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases}$, risulta:
$\begin{cases} x = mx + 2y - m \\ y = -x - y + m \end{cases}$.

Si ottengono le equazioni parametriche del luogo ricavando x e y in funzione di m:

$$\begin{cases} x = mx + 2\left(-\frac{1}{2}x + \frac{m}{2}\right) - m \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{m}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = mx - x + m - m \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{m}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (m-2)x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{m}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{m}{2},\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Osservando le equazioni ottenute, si può concludere che il luogo dei punti uniti dell'affinità data è l'asse y, escluso il punto (0; 1).

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Esercizio 10 pag. L 195 • Esercizio 94 pag. L 50 • Esercizio 145 pag. L 54 • Esercizio 331 pag. L 230 (punto b) • Esercizio 346 pag. L 232 • Esercizio 53 pag. L 368 (punto a)
Problema 2	• Quesito 4 pag. S 182 • Problema 11 pag. S 183 (punti b e c) • Quesito 5 pag. S 175 • Quesito 5 pag. S 182
Quesito 1	• Quesito 8 pag. W 167
Quesito 2	• Esercizio 14 pag. π 71 • Quesito 7 pag. π 96 • Quesito 9 pag. W 165
Quesito 3	• Esercizio 41 pag. U 23 • Esercizio 76 pag. U 26
Quesito 4	• Esercizio 6 pag. U 207 • Quesito 9 pag. W 169
Quesito 5	• Quesito 2 pag. V 90
Quesito 6	• Esercizio 152 pag. W 113
Quesito 7	• Problema 10 pag. L 93 (punto a) • Esercizio 188 pag. L 57
Quesito 8	• Esercizio 79 pag. α 84 (punto c) • Esercizio 83 pag. α 85(punto d) • Quesito 5 pag. α 94
Quesito 9	• Problema 9 pag. α 94
Quesito 10	• Quesito 3 pag. J_1 119 • Problema 26 pag. J_1 123 (punto a)