ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano Oxy sono date le curve λ e r di equazioni:

λ: $x^2 = 4(x - y)$ e r: $4y = x + 6$.

1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r.
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty]$, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \dfrac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

QUESTIONARIO

1 Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sen18°, sen36°.

2 Si dia una definizione di retta tangente ad una curva. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x \operatorname{sen} x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\operatorname{sen} x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\operatorname{sen} x = -1$.

3 Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione $\sigma \circ \varphi$ dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\varphi \circ \sigma$.

4 Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di latta necessaria per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

5 Come si definisce e qual è l'importanza del numero e di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

6 Le rette r e s d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.

7 Come si definisce $n!$ (*n fattoriale*) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

8 Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate (3; 4).

9 Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

10 Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

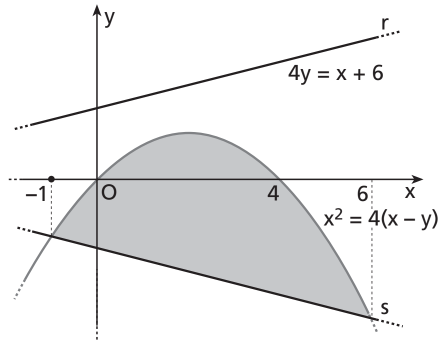
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE • P.N.I • 2005

PROBLEMA 1

1. Mettiamo a sistema le equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x^2 = 4(x-y) \\ 4y = x+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2} \\ x^2 = 4x - x - 6 \end{cases}$$

In forma normale la seconda equazione è $x^2 - 3x + 6 = 0$, e ha discriminante $3^2 - 4 \cdot 6 < 0$, quindi non ci sono soluzioni in campo reale.



▲ **Figura 1.**

2. La distanza di un punto $(x_0; y_0)$ da una retta $ax + by + c = 0$ è $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Per imporre che $(x_0; y_0)$ appartenga alla parabola basta sostituire x_0 e y_0 nell'equazione della parabola. Si ha: $y_0 = x_0 - \dfrac{1}{4}x_0^2$. Sostituendo nella formula della distanza si trova:

$$\frac{\left|x_0 - 4\left(x_0 - \dfrac{1}{4}x_0^2\right) + 6\right|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|x_0^2 - 3x_0 + 6|}{\sqrt{17}}$$

Il minimo della distanza si avrà, quindi, in corrispondenza del minimo della funzione a numeratore, cioè in $x_0 = \dfrac{3}{2}$. Il punto P ha quindi coordinate $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{15}{16}\right)$.

3. La simmetria rispetto all'asse x ha equazioni $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$, che sono uguali alle loro inverse, quindi la retta s ha equazione $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{2}$. Le intersezioni della retta s con la parabola si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{2} \\ y = x - \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases}$$

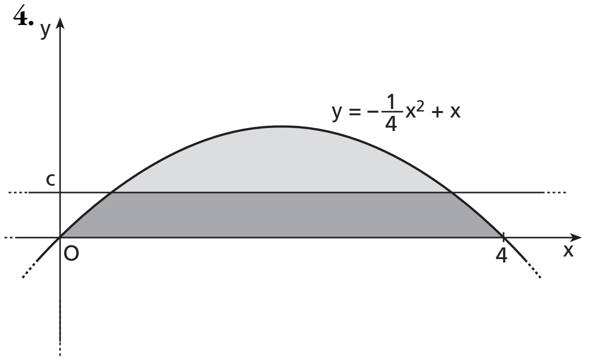
Le soluzioni della seconda equazione sono $x = -1$ e $x = 6$.
L'area della regione di piano definita da due curve e dalle rette $x = a$ e $x = b (b > a)$ è

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

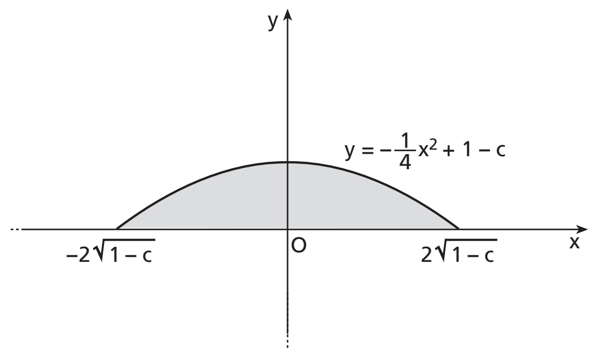
In questo caso

$$\int_{-1}^{6} \left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right] dx = \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{6} = \frac{343}{24}.$$

4.



a.



b.

L'area della regione superiore in cui viene divisa la regione S dalla retta $y = c$ ha area pari all'integrale tra i due punti di intersezione dell'asse x della parabola λ traslata verso il basso di c. Per semplificare i calcoli si può operare un'ulteriore traslazione (a sinistra di 2, cioè dell'ascissa del vertice) per portare il vertice sull'asse y. Le equazioni della traslazione composta sono dunque $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - c \end{cases} = \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + c \end{cases}$, quindi l'equazione della parabola trasformata è, omettendo gli apici, $y = -\dfrac{x^2}{4} + 1 - c$. Le intersezioni con l'asse x sono in $x = \pm 2\sqrt{1-c}$, quindi l'area risulta $2\displaystyle\int_0^{2\sqrt{1-c}} \left[-\frac{x^2}{4} + 1 - c\right] dx = 2\left[-\frac{x^3}{12} + (1-c)x\right]_0^{2\sqrt{1-c}} = \frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}}$ perché la funzione è pari.

Tale area deve essere pari alla metà dell'area della regione S, che si ottiene sostituendo $c = 0$, quindi $\dfrac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{8}{3}$. Risolvendo si ottiene $c = 1 - \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$.

5. Tale volume è l'integrale del quadrato della funzione associata a λ tra 0 e 4.

$$\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{16} - \frac{1}{2}x^3 + x^2\right) dx = \left[\frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{15}$$

PROBLEMA 2

1. Una funzione è continua in un punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. In questo caso, poiché la funzione ha come campo di esistenza $x \geq 0$, esaminiamo la continuità a destra di 0. Si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} x^2(3 - 2\log x) + 1 = 1 = f(0).$$

Infatti per il teorema di De L'Hopital si ha $\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x = 0$. La funzione è continua in 0.

Una funzione è derivabile in un punto x_0 se esiste ed è finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In questo caso:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}h^2(3 - 2\log h) + 1 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2} h(3 - 2\log h) = 0$$

quindi la funzione è derivabile in 0.

2. $Df(x) = \dfrac{1}{2}\left(2x(3 - 2\log x) - \dfrac{2}{x}x^2\right) = 2x(1 - \log x)$, quindi la funzione è crescente quando $\log x < 1$, cioè in $]0; e[$, mentre è decrescente in $]e; +\infty[$. In $x = e$ c'è un punto di massimo: $f(e) = \dfrac{1}{2}e^2 + 1 > 0$. Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = [+\infty \cdot (-\infty)] = -\infty$. In $]1; +\infty[$, quindi, la funzione deve attraversare l'asse x per il teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, essendo la funzione decrescente in tale intervallo, il punto di intersezione tra la funzione e l'asse x è unico.

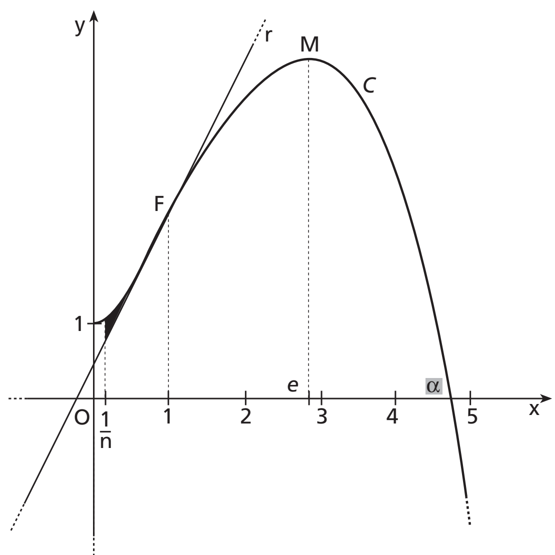
Per stimare il valore della soluzione si può procedere, per esempio, con il metodo di bisezione. Notiamo innanzitutto che $f(4) \simeq 2{,}82 > 0$, mentre $f(5) \simeq -1{,}74 < 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$	$(a+b)/2$	$f[(a+b)/2]$
4	2,82	5	−1,74	4,5	0,92
4,5	0,92	5	−1,74	4,75	−0,31
4,5	0,92	4,75	−0,31	4,625	0,33

E così via fino alla precisione voluta (la soluzione è circa 4,6901).

3. Per disegnare C, oltre ad utilizzare gli elementi studiati nel punto 2, calcoliamo $f''(x) = 2\left[1 - \log x + x\left(-\frac{1}{x}\right)\right] = -2\log x$. La concavità è rivolta verso l'alto quando $-2\log x > 0$, cioè quando $x < 1$, mentre è rivolta verso l'alto per $x > 1$. In $x = 1$ c'è un punto di flesso obliquo ($f'(1) = 2$). La generica retta tangente alla curva $f(x)$ in un punto x_0 è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Sostituendo $x_0 = 1$ si ottiene $y - \frac{5}{2} = 2(x-1)$ *quindi* $y = 2x + \frac{1}{2}$ (tangente inflessionale).

Rappresentiamo il grafico di C (figura 2)



▲ **Figura 2.**

4. L'area A_n richiesta è data dal seguente integrale

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 - 2x - \frac{1}{2}\right] dx.$$

$$\int \left[\frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 - 2x - \frac{1}{2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \int x^2 \log x \, dx =$$

$= (\textit{integrando per parti})$

$$= \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\log x + \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\log x + \frac{x^3}{9} + c =$$

$$= \frac{11}{18}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\log x + c.$$

L'area richiesta è $A_n = \left[\frac{11}{18}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\log x\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{9} - \frac{11}{18}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3}\log n$

5. Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} A_n$. Si ha: $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{9}$ perché il secondo, il terzo e il quarto termine nel limite sono della forma $\left[\frac{a}{+\infty}\right]$, mentre l'ultimo tende a 0 per la regola del confronto tra infiniti. Visto che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, il risultato ottenuto rappresenta

$$\int_{0}^{1} \left[\frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + \frac{1}{2} - 2x\right] dx,$$

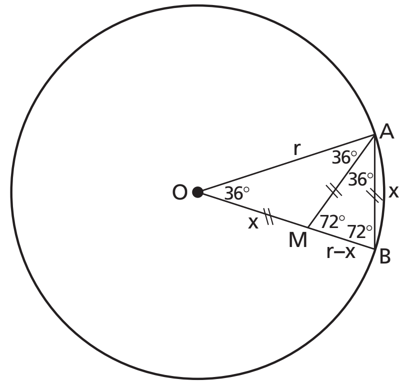
che geometricamente si può interpretare come l'area compresa tra la curva e la retta r tra 0 e 1.

QUESTIONARIO

1 Consideriamo il triangolo OAB, in cui O è il centro della circonferenza circoscritta al decagono e AB un suo lato. $A\hat{O}B = 36°$ perché è un decimo dell'angolo giro. Essendo poi il triangolo isoscele si ha che $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 72°$. Tracciamo ora la bisettrice di $O\hat{A}B$, che interseca il lato OB in M. Si ha che sia il triangolo OMA che il triangolo AMB sono isosceli, quindi $OM = AB$. Indicato con r il raggio della circonferenza e con x il lato del decagono, per il teorema della bisettrice si ha che,

$$\frac{x}{r} = \frac{(r-x)}{x}$$

L'uguaglianza scritta è equivalente a $r : x = x : (r-x)$, quindi x è la misura della sezione aurea del segmento di misura r.



▲ **Figura 3.**

Risolvendo rispetto a x e scartando la soluzione negativa si ottiene $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$.

Tracciamo l'asse di AB. Detto P il punto medio di AB si ha che $OA \cdot \operatorname{sen} 18° = AP$, quindi $\operatorname{sen} 18° = AP/OA = = \frac{x/2}{r} = \frac{(-1+\sqrt{5})}{4}$. Per calcolare $\operatorname{sen} 36°$ si può ricorrere alla formula $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = = 2 \operatorname{sen} a \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$ perché in questo caso $0° < a < 90°$. Sostituendo si ha

$$\operatorname{sen} 36° = 2\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-4\sqrt{5}}.$$

2 La retta tangente a una curva si può definire come la posizione limite della secante, cioè, detto P il punto di tangenza, $\lim_{Q \to P} r_{P,Q}$ (con Q appartenente alla curva) dove $r_{P,Q}$ è la retta passante per i punti P e Q. La generica retta tangente a una funzione $y = f(x)$ in un suo punto $(t, f(t))$ è $y - f(t) = f'(t)(x-t)$, quindi in questo caso, tenendo conto che $Dx \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x + x \cos x$, si ha: $y - t \operatorname{sen} t = (\operatorname{sen} t + t \cos t)(x-t)$. Se $\operatorname{sen} t = 1$ allora $\cos t = 0$, quindi, sostituendo, si ha, $y - t = x - t$, da cui $y = x$, come richiesto. Si ha $\cos t = 0$ anche se $\operatorname{sen} t = -1$, quindi, sostituendo, si trova $y + t = -x + t$, quindi $y = -x$.

3 La composizione di due simmetrie assiali rispetto a rette parallele è una traslazione di vettore perpendicolare alle due rette. Per dimostrarlo consideriamo un punto P a distanza rispettivamente d e $d+h$ rispetto alle rette r e s. Tutti i trasformati di P rispetto alle possibili composizioni di simmetrie rispetto a queste due rette appartengono alla perpendicolare condotta da P alle rette. Il simmetrico P' di P rispetto a r avrà distanza $h-d$ da s e distanza $2d$ da P. Il simmetrico di P' rispetto a s avrà, quindi, distanza $2d + 2(h-d) = 2h$ da P. Come si può notare tale distanza non dipende dalla posizione di P rispetto alle due rette e si tratta perciò del modulo di una traslazione. È da notare che h può anche essere negativo, e questo definisce il verso della traslazione.

La trasformazione considerata è una traslazione di vettore perpendicolare alla bisettrice del 2° e 4° quadrante, quindi le due rette rispetto alle quali vanno effettuate le simmetrie sono parallele a $y = x$.

Il modulo del vettore è $\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}$, quindi la distanza tra le due rette deve essere $\sqrt{10}/2$. Questo succede quando, scritte in forma esplicita, il loro termine noto differisce di $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}/2 = \sqrt{5}$, perché le due rette sono inclinate di $\pi/4$ rispetto all'asse y. Quindi le due rette sono della forma, nell'ordine, $y = x + k$ e $y = x + k - \sqrt{5}$, con k qualsiasi. La composizione inversa darà come risultato una traslazione di vettore con uguale modulo e direzione rispetto a quello della traslazione considerata, ma di verso opposto. Tale composizione è perciò:

$$\begin{cases} x' = x - \sqrt{5} \\ y' = y + \sqrt{5} \end{cases}$$

4 Detti V il volume del cilindro, r il suo raggio di base e h la sua altezza si sa che $V = \pi r^2 h$, quindi $h = \frac{V}{\pi r^2}$. La superficie $S(r)$ risulta invece

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right).$$

Affinché sia minima la quantità di materiale utilizzato per realizzare la lattina, deve essere minima la superficie.

Calcoliamo la derivata prima di $S(r)$. Si ha

$D(S(r)) = 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right)$ che si annulla per $r = \sqrt[3]{\frac{V}{(2\pi)}}$. Dal segno della derivata si deduce che è un punto di minimo. Sostituendo $V = 400\,\text{cm}^3$ si ottiene $r \simeq 4\,\text{cm}$ e quindi $h \simeq 8\,\text{cm}$.

5 Il numero di Nepero e è definito come $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Per calcolarne un valore approssimato si può, quindi, sostituire nella espressione all'interno del limite un valore di x "molto grande". Per quanto riguarda l'importanza di e si può parlare di alcune situazioni, per esempio in fisica, in cui occorre usare la funzione esponenziale per descrivere un fenomeno. Vengono descritte da una funzione esponenziale del tempo, ad esempio, la quantità di carica sulle piastre di un condensatore in circuito alimentato a corrente continua, oppure le extracorrenti di apertura e di chiusura.

6 Le equazioni di una generica omotetia di centro l'origine sono $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ e le inverse $\begin{cases} x = \frac{x'}{k} \\ y = \frac{y'}{k} \end{cases}$.

Sostituendo nell'equazione di r si ottiene $y = 2x + k$. Confrontando con l'equazione di s si ricava $k = -4$.

7 $n!$, per n intero positivo, è definito come il prodotto di tutti gli interi tra 1 e n. Inoltre $0! = 1! = 1$. Nel calcolo combinatorio è il numero di permutazioni di un insieme di n elementi. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi di k elementi di un insieme di n elementi, che si chiamano anche combinazioni semplici. Gli insiemi di k elementi che differiscono per gli elementi contenuti o per l'ordine in cui compaiono (disposizioni semplici), sono $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.
Dividendo per le permutazioni di un insieme di k elementi e moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)!$ si ottiene:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

8 Ricavando e^t dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene $y = \frac{1}{x-2} + 3$. Questa equazione rappresenta effettivamente una curva che passa per il punto $(3; 4)$.

Poiché $y'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$, allora il coefficiente angolare della retta tangente in $(3; 4)$ è $-\frac{1}{(3-2)^2} = -1$. La retta tangente è quindi $y - 4 = -(x-3)$, cioè $y = -x + 7$.

9 Ci sono tre casi per cui la somma dei punteggi dei due dadi è 10:

1° dado 4, 2° dado 6;   1° dado 5, 2° dado 5;   1° dado 6, 2° dado 4.

Le possibilità totali sono 36, quindi la prima probabilità richiesta è $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

La seconda probabilità richiesta si calcola con la formula per la probabilità di prove ripetute indipendenti, quindi è pari a $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(1-\frac{1}{12}\right)^4=15\frac{11^4}{12^6}\simeq 0{,}0735$.

La terza probabilità richiesta è complementare alla probabilità di ottenere zero oppure un 10 tra i sei lanci, quindi è $1-\left[\left(\frac{11}{12}\right)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{11}{12}\right)^5\right]=1-\frac{6\cdot 11^5+11^6}{12^6}=1-\frac{17\cdot 11^5}{12^6}\simeq 0{,}0831$.

10 Detta P la popolazione totale, x l'età media del 40% della popolazione che ha da 60 anni in poi e y l'età media del resto della popolazione, si ha:

$$\frac{0{,}4P\cdot x+0{,}6P\cdot y}{P}=30$$

con $x\geq 60$ e $0<y<60$.

Si ha: $0{,}4x+0{,}6y=30$ e semplificando $2x+3y=150$.

Ricaviamo $y=\frac{150-2x}{3}=50-\frac{2}{3}x$ e poiché deve essere $0<y<60$, si ha:

$0<50-\frac{2}{3}x<60$ da cui

$-15<x<75$.

Tale condizione è possibile con $x\geq 60$, pertanto è possibile che l'età media della popolazione sia uguale a 30.