ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.
a) Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:
b) la somma delle due aree sia minima?
c) la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo di base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

QUESTIONARIO

1 Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2 I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3 Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di $50\,\text{cm}^2$, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

4 La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

5 Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6 L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7 La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0; 1]$? Se sì trova il punto ξ che compare nella formula: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

8 La funzione $f(x) = \text{tg}\, x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

9 Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10 La funzione $f(x) = a\,\text{sen}\, x + b\cos x$ ha un estremo relativo per $x = \dfrac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica qual è il periodo di $f(x)$.

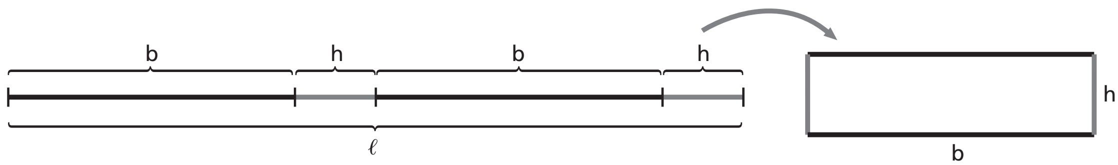
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Poiché la lunghezza del filo rappresenta il perimetro del rettangolo che delimita l'aiuola, detti b, h rispettivamente la base e l'altezza di tale rettangolo (figura 1), vale:

$$b+h=\frac{l}{2}.$$

▼ **Figura 1.**



Scelta b come incognita, si ha $h=\frac{l}{2}-b$, quindi la funzione area da massimizzare risulta la seguente:

$$\mathscr{A}(b)=b\cdot\left(\frac{l}{2}-b\right)=-b^2+\frac{l}{2}b,\qquad b\in\left]0;\frac{l}{2}\right[.$$

Il grafico di $\mathscr{A}(b)$ è una parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice di ascissa $\frac{l}{4}$. Quindi il massimo della funzione è l'ordinata del vertice, cioè:

$$\max_{b\in\left]0;\frac{l}{2}\right[}\mathscr{A}(b)=\mathscr{A}\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{l^2}{16}.$$

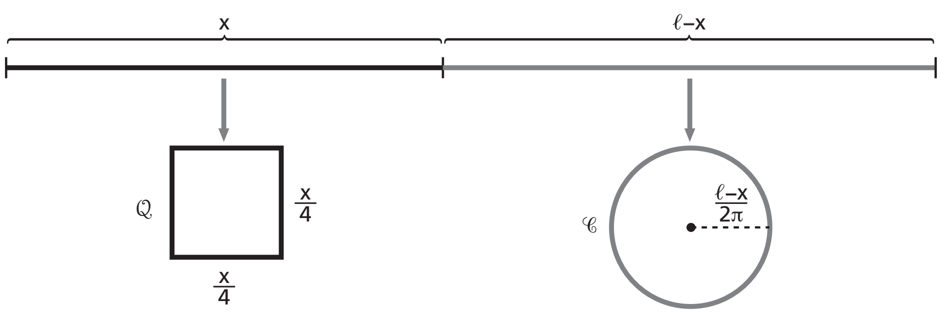
Si tratta del caso in cui l'aiuola ha la forma di un quadrato di lato $\frac{l}{4}$.

b) Si indica con x la parte del filo che si usa per delimitare l'aiuola di forma quadrata. La lunghezza del lato del quadrato $\mathscr{Q}$ è dunque $\frac{x}{4}$.

Di conseguenza, la lunghezza della circonferenza che delimita l'aiuola $\mathscr{C}$ di forma circolare è $l-x$; si ricava quindi il raggio r:

$$2\pi r=l-x\quad\Rightarrow\quad r=\frac{l-x}{2\pi}.$$

▼ **Figura 2.**



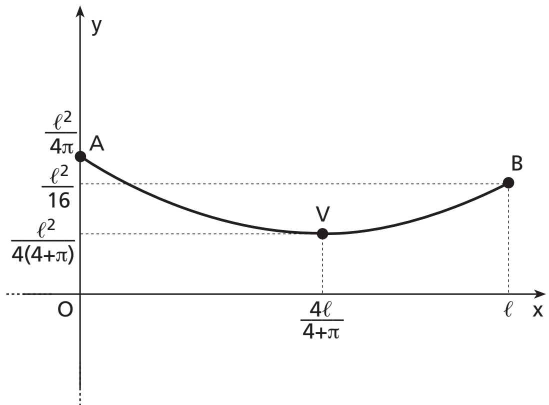
Si è ora in grado di calcolare le due aree:

$$\text{area}(\mathcal{Q}) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16};$$
$$\text{area}(\mathcal{C}) = \pi\left(\frac{l-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(l-x)^2}{4\pi}.$$

Sommando si ottiene la seguente funzione:

$$g(x) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi}\right)x^2 - \frac{l}{2\pi}x + \frac{l^2}{4\pi}, \qquad x \in [0; l].$$

Il grafico di g è un ramo di parabola compreso tra i punti $A(0; g(0))$ e $B(l; g(l))$, con la concavità rivolta verso l'alto (figura 3). Si osserva che i casi $x=0$ e $x=l$ corrispondono entrambi all'utilizzo del filo intero (senza effettuare alcun taglio) per delimitare una sola aiuola di forma circolare ($x=0$) o una sola aiuola di forma quadrata ($x=l$).



▶ **Figura 3.**

La funzione $g(x)$ è continua in un intervallo limitato e chiuso, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluti. Precisamente, detto V il vertice della parabola, il minimo di g è l'ordinata di V. Poiché $x_V = \frac{4l}{4+\pi}$, allora:

$$\min_{x\in[0;l]} g(x) = g\left(\frac{4l}{4+\pi}\right) = \frac{l^2}{4(4+\pi)}.$$

c) Il massimo di g viene assunto in uno degli estremi dell'intervallo di definizione. Osservando che:

$$\frac{l^2}{4\pi} = g(0) > g(l) = \frac{l^2}{16},$$

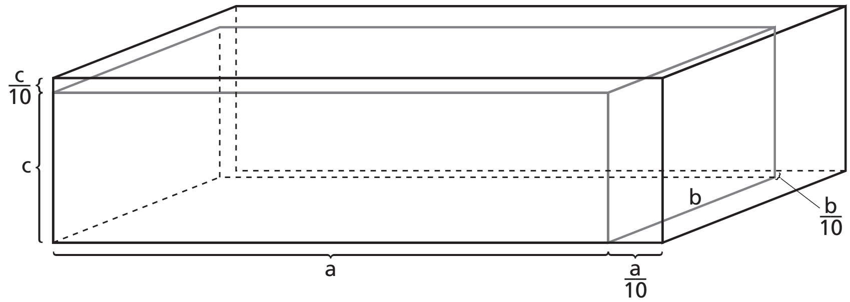
si conclude che $\max g(x) = \frac{l^2}{4\pi}$, cioè l'area massima si ottiene quando il filo non viene tagliato bensì utilizzato tutto per delimitare un'unica aiuola di forma circolare.

Si consideri ora un parallelepipedo a base rettangolare di dimensioni a, b, c. Il suo volume è:

$$V_1 = abc.$$

Incrementando del 10% ciascuna dimensione (figura 4), si ottiene un nuovo parallelepipedo di volume:

$$V_2 = \left(1+\frac{10}{100}\right)a\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)b\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)c = \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 abc = \left(\frac{11}{10}\right)^3 abc.$$



◀ **Figura 4.**

La differenza tra i due volumi risulta essere:

$$V_2 - V_1 = \left[\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1\right] abc.$$

In termini percentuali, pertanto, si ottiene:

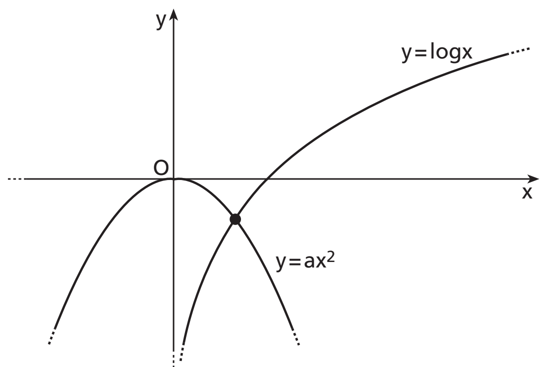
$$\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1 = \frac{1331}{1000} - 1 = \frac{331}{1000} = 33{,}1\%.$$

PROBLEMA 2

1. Primo metodo

Si discute l'equazione $\log x = ax^2$ con metodo grafico ponendo $y = \log x$ e $y = ax^2$ e determinando gli eventuali punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni, al variare di a.

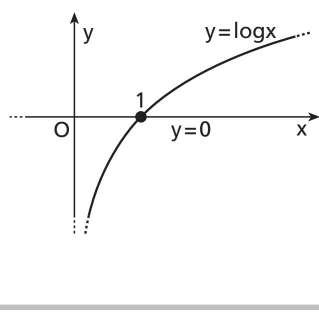
- $\boldsymbol{a < 0}$. La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso il basso (figura 5).



◀ **Figura 5.**

Si ha sempre un solo punto di intersezione.

▼ **Figura 6.**

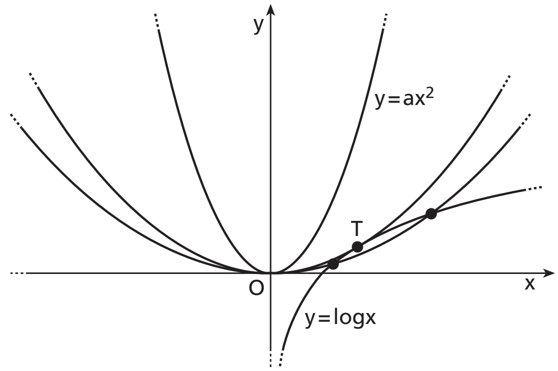


- $\boldsymbol{a = 0}$. La funzione $y = ax^2$ diventa $y = 0$.

  In questo caso (figura 6) il punto di intersezione ha coordinate $(1; 0)$ e la soluzione dell'equazione è quindi $x = 1$.

- $\boldsymbol{a > 0}$. La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso l'alto.

Ci sono tre possibilità al variare di a (figura 7):
- abbiamo parabole che intersecano il grafico di $y = \log x$ in due punti distinti;
- esiste una parabola tangente;
- ci sono parabole che non intersecano mai il grafico di $y = \log x$.



▶ **Figura 7.**

Determiniamo la parabola tangente. Risulta:

$$\begin{cases} ax^2 = \log x & \text{le due curve devono intersecarsi} \\ D(ax^2) = D(\log x) & \text{le due curve devono avere la stessa tangente nel punto comune} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} ax^2 = \log x \\ 2ax = \dfrac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \dfrac{1}{2} \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

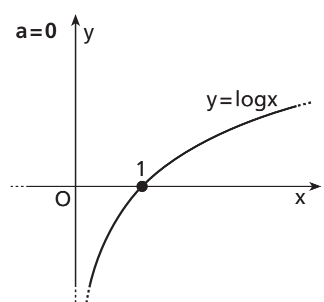
$$\begin{cases} x = \sqrt{e} \\ a = \dfrac{1}{2e} \end{cases}.$$

La parabola tangente ha quindi equazione $y = \dfrac{1}{2e}x^2$ e il punto di tangenza T ha coordinate $\left(\sqrt{e}; \dfrac{1}{2}\right)$.
Riassumendo la discussione dell'equazione $\log x = ax^2$, risulta:
- per $a \leq 0$, 1 soluzione;
- per $0 < a < \sqrt{e}$, 2 soluzioni distinte;
- per $a = \sqrt{e}$, 2 soluzioni coincidenti;
- per $a > \sqrt{e}$, nessuna soluzione.

Secondo metodo
Le eventuali soluzioni dell'equazione $\log x = ax^2$ sono gli zeri della funzione $h(x) = \log x - ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, che risulta continua nel suo campo di esistenza $D =]0; +\infty[$.
Osserviamo che per $a = 0$ si ottiene la nota funzione logaritmica che ha un unico zero in $x = 1$ (figura 8).
Sia ora $a \neq 0$ e studiamo l'andamento della funzione agli estremi del campo di esistenza.
Vale:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{per ogni valore di } a,$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 0 \\ -\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$$



▲ **Figura 8.**

Trattiamo separatamente i casi $a<0$ e $a>0$.

- $\boldsymbol{a<0}$**.** Dallo studio dei limiti effettuato, deduciamo che esistono $x_1,\ x_2 \in D$ tali che $f(x_1)<0$ e $f(x_2)>0$. Per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto nell'intervallo $]x_1; x_2[$ in cui la funzione si annulla. D'altra parte, risulta:

  $$h'(x)=\frac{1}{x}-2ax>0, \qquad \text{per } x\in D,$$

  quindi la funzione è strettamente crescente. Pertanto anche nel caso $a<0$ l'equazione $\log x = ax^2$ ha un'unica soluzione.

- $\boldsymbol{a>0}$**.** In questo caso i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi. Studiamo il segno della derivata prima $h'(x)=\dfrac{1-2ax^2}{x}$ in D. Risulta:

  $$h'(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-2ax^2\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0<x\leq \sqrt{\frac{1}{2a}}\ .$$

Poiché il massimo della funzione è assunto in $x=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$, l'esistenza degli zeri di h dipende dal segno di tale massimo. Calcoliamo l'immagine:

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=\log\sqrt{\frac{1}{2a}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(\log 2a+1).$$

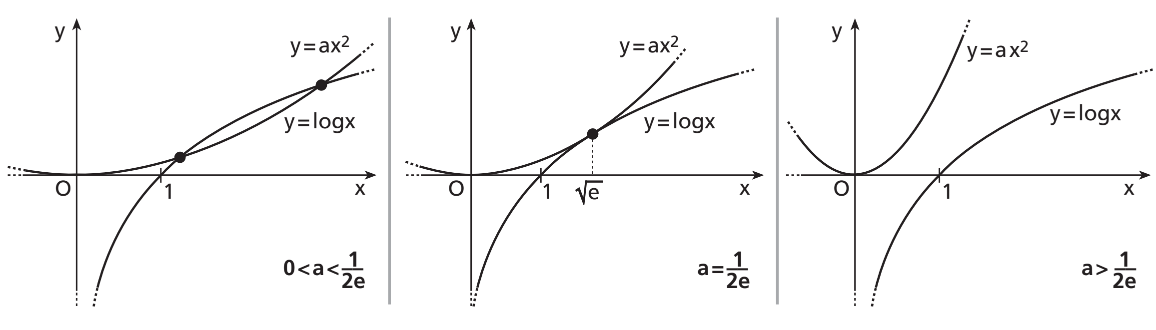
Studiamo la disequazione:

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log 2a+1\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\leq\frac{1}{2e}.$$

In conclusione:

- $0<a<\dfrac{1}{2e}$: il massimo di h è positivo, i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi ed esiste un solo punto critico; quindi la funzione $h(x)$ ammette due zeri;
- $a=\dfrac{1}{2e}$: il massimo di h è zero ed esiste un solo punto critico, pertanto l'ascissa di tale massimo è l'unica soluzione dell'equazione assegnata dal problema;
- $a>\dfrac{1}{2e}$: poiché max $h<0$, non esistono soluzioni di $h(x)=0$.

Gli zeri dell'equazione $\log x = ax^2$ possono essere interpretati graficamente come le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, come mostra la figura 9.



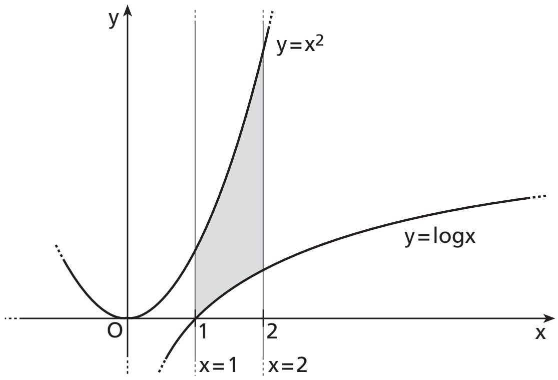
▲ **Figura 9.**

I grafici di f e g sono tangenti solo per $a=\dfrac{1}{2e}$. Infatti le due curve sono tangenti se e solo se si intersecano e hanno la stessa retta tangente nel punto di intersezione. Algebricamente, questo equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x)=f(x) \\ g'(x)=f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2=\log x \\ ax^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=\dfrac{1}{2} \\ ax^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se $x=\sqrt{e}$ e $a=\dfrac{1}{2e}$.

2. Dobbiamo determinare l'area $\mathcal{A}$ evidenziata in figura 10, dove si considera $a=1$ come richiesto.



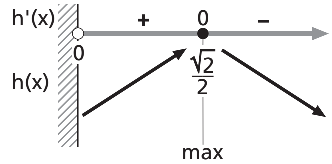
◀ **Figura 10.**

$$\mathcal{A}=\int_1^2 [g(x)-f(x)]\,dx=\int_1^2 (x^2-\log x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2-\left([x\log x]_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)=\frac{7}{3}-(2\log 2-[x]_1^2)=$$

$$=\frac{10}{3}-2\log 2.$$

3. Scegliamo $a=1$ e studiamo la funzione $h(x)=\log x-x^2$. Per quanto visto nei punti precedenti:
- il campo di esistenza è $D=]0;+\infty[$;
- non esistono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione è sempre negativa perché il massimo è negativo;
- i limiti agli estremi di D sono entrambi $-\infty$;
- $f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{x}$, la funzione è crescente in $\left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, decrescente in $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ e $\max\limits_{x\in D} h(x)=h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$, come riassunto nella figura 11.



▲ **Figura 11.**

Osserviamo che non vi sono asintoti obliqui perché $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=-\infty$.

Rimane ora da studiare la derivata seconda:

$$h''(x)=\frac{-4x\cdot x-(1-2x^2)}{x^2}=\frac{-2x^2-1}{x^2}.$$

Risulta quindi:

$$h''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x^2+1) \geq 0$$

e questa disequazione non è mai soddisfatta. Pertanto la derivata seconda è sempre negativa e la funzione ha la concavità rivolta verso il basso in tutto il campo di esistenza. Il grafico della funzione è riportato nella figura 12.

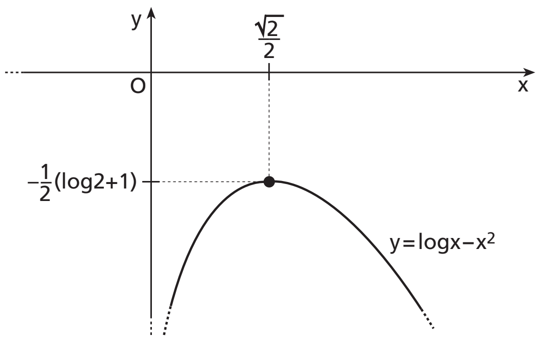


Figura 12.

QUESTIONARIO

1 Si tratta di calcolare la somma dei primi 64 termini della progressione geometrica $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, con ragione $q = 2$. Poiché la somma vale:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q},$$

risulta:

$$s_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 \simeq 1{,}84 \cdot 10^{19},$$

dove s_{64} rappresenta il numero dei chicchi.
Si calcola il peso m, tenendo conto che 1000 chicchi pesano circa 38 g.

$$m \simeq 1{,}84 \cdot 10^{16} \cdot 38\,\text{g} = 69{,}92 \cdot 10^{16}\,\text{g} = 69{,}92 \cdot 10^{10}\,\text{t}.$$

2 Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo angoloide devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Inoltre, per un noto teorema di geometria solida, in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore strettamente di 360°. Se le facce del poliedro sono triangoli equilateri, l'angolo di ogni faccia è di 60°, quindi si possono avere angoloidi di tre facce (si ottiene il tetraedo), di quattro facce (si ottiene l'ottaedro), di cinque facce (si ottiene l'icosaedro) ma non di più, perché la loro somma sarebbe maggiore o uguale a 360° e ciò è impossibile per il suddetto teorema. Se le facce del poliedro regolare sono quadrati, l'angolo di ogni faccia è di 90°, quindi si può avere solo l'angoloide di tre facce (si ottiene il cubo). Se le facce del poliedro regolare sono pentagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 108°, quindi si può avere l'angoloide di tre facce (si ottiene il dodecaedro) ma non di più. Se le facce del poligono regolare sono esagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 120° quindi non si possono avere poliedri relativi perché la somma degli angoli di tre facce è 360° il che è impossibile. Analogamente non è possibile costruire poliedri regolari aventi per facce poligoni regolari con più di sei lati.

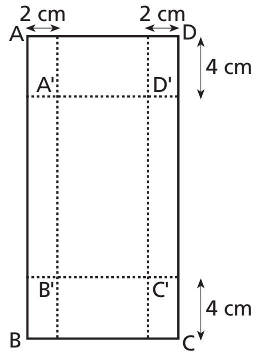
3 Nella figura 13 è rappresentato il foglio di carta $ABCD$ con area di stampa $A'B'C'D'$.
Posto $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, risulta:

$$\overline{A'B'} = x - 8,$$

$$\overline{B'C'} = y - 4.$$

Imponiamo che l'area di stampa sia 50 cm^2; risulta allora:

$$(x-8)(y-4) = 50 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4x+18}{x-8}.$$



▶ **Figura 13.**

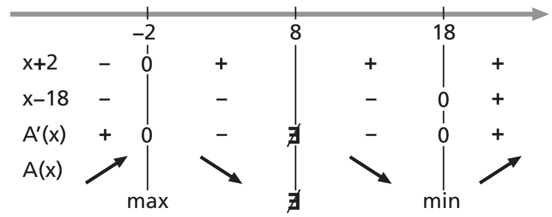
Pertanto la superficie del foglio vale:

$$\text{Area}(ABCD) = xy = \frac{4x^2 + 18x}{x-8}.$$

Tale area è funzione di x. La funzione da minimizzare è quindi:

$$A(x) = \frac{4x^2 + 18x}{x-8}.$$

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno.



▲ **Figura 14.**

$$A'(x) = \frac{(18+8x)(x-8) - (18+4x^2)}{(x-8)^2} = \frac{4(x+2)(x-18)}{(x-8)^2}.$$

Dalla figura 14, risulta che l'area è minima per $x = 18$ e in tal caso vale $y = 9$.
Il foglio di carta di superficie minima ha dimensioni 18 cm e 9 cm.

4 Si consideri un cubo inscritto in una circonferenza.
Indicato con l il lato del cubo, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo DAG e al triangolo CDG risulta:

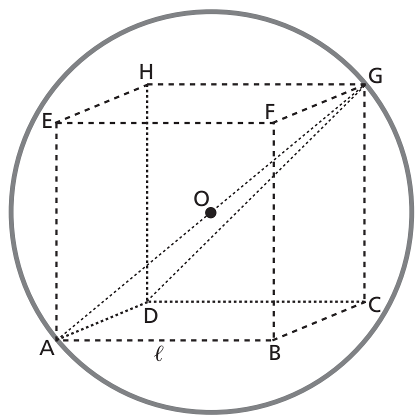
$$\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{CG}^2 = 3\overline{AD}^2.$$

Posto $\overline{AD} = l$, $\overline{AG} = 1$ m, si trova:

$$l^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{m}.$$

Il volume del cubo inscritto è:

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{27}\,\text{m}^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{m}^3.$$



▲ **Figura 15.**

Poiché $1\,\text{m}^3 = 1000\,\text{l}$, allora:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 1000 \simeq 192{,}45\,\text{l}.$$

5 Lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio si può ottenere con la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n} b^n.$$

La somma dei coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima del binomio si ottiene ponendo $a = 1$ e $b = 1$:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Si ha quindi:

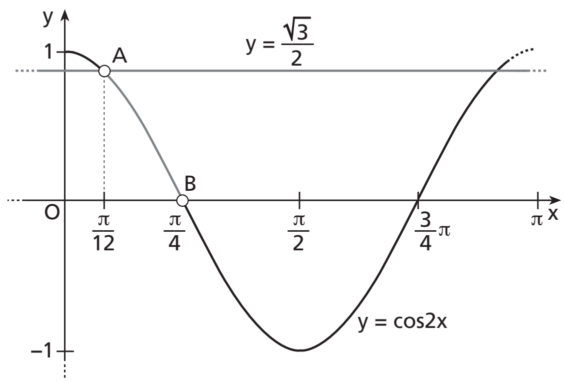
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

6 Per $k = 0$ l'equazione diventa $2 = 0$ che è impossibile; si può quindi dividere per $k \neq 0$ e diventa:

$$\cos 2x = \frac{5k-2}{k},$$

che (con le limitazioni espresse in radianti) equivale al sistema:

$$\begin{cases} y = \cos 2x \\ y = \dfrac{5k-2}{k} \\ \dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



▲ **Figura 16.**

Risolviamo il sistema graficamente (figura 16).
Si trova:

$$y_A = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5k-2}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4(\sqrt{3}+10)}{97};$$

$$y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{5}.$$

Pertanto l'equazione ammette una sola soluzione per:

$$\frac{2}{5} < k < \frac{4(\sqrt{3}+10)}{97}.$$

7 La funzione è polinomiale, quindi è continua nell'intervallo chiuso [0; 1] e derivabile nell'intervallo aperto]0; 1[. Pertanto verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.
Calcoliamo:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1.$$

Sostituiamo nella formula $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ e otteniamo:

$$\frac{-1-0}{1} = 3x^2 - 4x \quad \rightarrow \quad -1 = 3x^2 - 4x.$$

Risolviamo l'equazione:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3},$$

quindi $x = 1$ oppure $x = \frac{1}{3}$. Ne consegue che $\xi = \frac{1}{3}$ poiché interno all'intervallo [0; 1], mentre $x = 1$, poiché è un estremo dell'intervallo, non soddisfa il teorema di Lagrange.

8 La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ non è continua nell'intervallo I perché non è definita per $x = \frac{\pi}{2}$ (in cui presenta una discontinuità di seconda specie). Quindi non è applicabile il teorema di esistenza degli zeri, in cui un'ipotesi essenziale è la continuità della funzione in ogni punto dell'intervallo chiuso e limitato. Pertanto non c'è contraddizione.

9 Una funzione reale f, diversa da zero in ogni punto del suo campo di esistenza, che soddisfa la condizione $f'(x) = f(x)$ è la funzione esponenziale $f(x) = ke^x$, con k reale. Imponendo la condizione $f(0) = 1$, risulta: $k = 1$ e $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Qualora si abbiano competenze sulle equazioni differenziali, si può risolvere il problema considerando l'equazione $\frac{dy}{dx} = y$.
Separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y} = dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| = x + c \quad \rightarrow \quad y = ke^x \text{ con } k \text{ reale.}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$, risulta $y = e^x$.

10 La derivata prima della funzione è:

$$f'(x) = a\cos x - b\operatorname{sen} x$$

che deve annullarsi per $x = \frac{4}{3}\pi$ per la condizione necessaria di estremo relativo, per cui:

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0.$$

Inoltre per $x = \frac{2}{3}\pi$ la funzione deve valere 1:

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1.$$

Mettendo a sistema entrambe le condizioni trovate, risulta:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3}b \\ 3b - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

La funzione diventa quindi:

$$f(x) = \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x.$$

Con il metodo dell'angolo aggiunto, si può scrivere:

$$f(x) = \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x = 2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

che ha come periodo $T = 2\pi$.